

Anwendungen zur
**BIOMEDIZINISCHEN
STRÖMUNGSMECHANIK**

Aufgaben und Lösungen

Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule
Aachen

Aerodynamisches Institut
und
Lehrstuhl für Strömungslehre

Prof. Dr. Wolfgang Schröder

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	iv
1 Einleitung	1
2 Herz	2
2.1 Allgemeine Fragen zum Herzmechanik	2
2.2 Autoregulation des Herzens	2
2.2.1 pV-Diagramm des Herzens 1	2
2.2.2 pV-Diagramm des Herzens 2	3
2.2.3 Kurvenveränderungen	4
2.3 Herzklappen	5
2.4 Maxwellsches Herzmuskelmodell	6
2.5 Kreislaufhämodynamik	7
3 Blut	8
3.1 Allgemeine Fragen zum Blut	8
3.2 Zellulärer Bestandteil des Blutes	8
3.3 Hämoglobin	9
3.4 Rheologische Eigenschaften von Blut	9
3.4.1 Hämolyse	9
3.4.2 Fließverhalten von Blut	10
3.4.3 Gerinnungssystem	11
3.4.4 Fahraeus-Lindqvist-Effekt	11
3.5 Rheologische Modelle von Blut	11
3.6 Pathophysiologische Einflüsse auf Blutviskosität	12
3.7 Blutviskositätsmessung	12
4 Blutgefäße	14
4.1 Allgemeine Fragen	14
4.1.1 Rohrströmung bei Existenz einer Fließgrenze τ_y	14
4.1.2 Strömung zwischen ebenen Platten mit Fließgrenze τ_0	14
4.2 Wellenausbreitung in elastischen Gefäßen	15
4.3 Strömung in elastischen Gefäßen	16
5 Atemsystem	19
5.1 Allgemeine Fragen zum Atemsystem	19
5.2 Evolutionstheorie	19
5.3 Alveolarer Gasaustausch	20
5.4 Oxygenator-Typen	22
5.4.1 Membranoxygenator	22
5.4.2 Blasenoxxygenator	24

5.4.3	Filmoxygenator	26
6	Bionik und Messsysteme	28
6.1	Allgemeine Fragen zur Strömungssimulation	28
6.2	Messverfahren	28
6.3	Biologische Strömungsanpassung	29
6.4	Vogelflug	30
7	Musterlösung-Herz	31
7.1	ML-Allgemeine Fragen zum Herzmechanik	31
7.2	ML-Autoregulation des Herzens	33
7.2.1	ML-pV-Diagramm des Herzens 1	33
7.2.2	ML-pV-Diagramm des Herzens 2	34
7.2.3	ML-Kurvenveränderungen	35
7.3	ML-Herzklappen	36
7.4	ML- Maxwellsches Herzmuskelmodell	41
7.5	ML-Kreislaufhämodynamik	42
8	Musterlösung-Blut	47
8.1	ML-Allgemeine Fragen zum Blut	47
8.2	ML-Zellulärer Bestandteil des Blutes	48
8.3	ML-Hämoglobin	49
8.4	ML-Rheologische Eigenschaften von Blut	50
8.4.1	ML-Hämolyse	50
8.4.2	ML-Fließverhalten von Blut	52
8.4.3	ML-Gerinnungssystem	55
8.4.4	ML-Fahraeus-Lindqvist-Effekt	56
8.5	ML-Rheologische Modelle von Blut	56
8.6	ML-Pathophysiologische Einflüsse auf Blutviskosität	59
8.7	ML-Blutviskositätsmessung	59
9	Musterlösung-Blutgefäße	63
9.1	ML-Allgemeine Fragen	63
9.1.1	ML-Rohrströmung bei Existenz einer Fließgrenze τ_y	63
9.1.2	ML-Strömung zwischen ebenen Platten mit Fließgrenze τ_0	64
9.2	ML-Wellenausbreitung in dehnbaren Gefäßen	66
9.3	ML-Strömung in elastischen Gefäßen	70
10	Musterlösung-Atemsystem	76
10.1	ML-Allgemeine Fragen zum Atemsystem	76
10.2	ML-Evolutionstheorie	77
10.3	ML-Alveolarer Gasaustausch	79
10.4	ML-Oxygenator-Typen	81
10.4.1	ML-Membranoxygenator	81
10.4.2	ML-Blasenxygenator	89
10.4.3	ML-Filmoxygenator	92
11	Musterlösung-Bionik und Messsysteme	94
11.1	ML-Allgemeine Fragen zur Strömungssimulation	94

11.2 ML-Messverfahren	96
11.3 ML-Biologische Strömungsanpassung	96
11.4 ML-Vogelflug	98

Abbildungsverzeichnis

2.1	pV-Diagramm des Herzens	3
2.2	pV-Diagramm des Herzens bei Frank-Starling-Mechanismus	4
2.3	Druck-Volumen Verlauf von linkem Ventrikel	5
3.1	kegel-Plate-Rheometer	13
4.1	Stroemung bei ebenen Platten	14
4.2	Druckwelle	16
4.3	Blutgefassaessverzweigung	18
5.1	Lungengeneration	19
5.2	Durchmesserverhaeltnis D_i / D_0 als Funktion von Rohrweige	20
5.3	Alveolarer Gasaustausch	21
5.4	kreisfoermige Kapillare eines Membranoxygenators	22
5.5	kreisfoermige Kapillare eines Membranoxygenators	23
5.6	Sauerstoffblasen mit dem Durchmesser D in einem Blasenoxxygenator	25
5.7	Kugeloberflaeche als seitliche Mantelflaeche eines Wuürfels mit der Kantenlaenge D	26
5.8	Filmoxygenatoren	26
6.1	Verzweigende Rohrsystem der Atemwege	29
7.1	Skizze des menschlichen Herzens	31
7.2	Druck-Volumen-Diagramm der linken Herzkammer	32
7.3	Aktivierungsfunktion des Herzmuskels	33
7.4	ML-pV-Diagramm des Herzens	34
7.5	ML- pV-Diagramm des Herzens bei Frank-Starling-Mechanismus	35
7.6	Kurvenveraenderungen fuer den Fall einer Aortenklappen-Stenos/-Insuffizienz	35
7.7	Kugelklappe	37
7.8	Kippscheibenklappe	37
7.9	Stremungsbild in Fall einer Bjoerk-Shiley-Prothese	39
7.10	Stromlinienverläufen im fall von verschiedebnen Klappen	40
7.11	Schematische Darstellung des Herzmuskelmodells	41
7.12	systolen-Diastolen-dauer	42
7.13	Druck-Volumen-Diagramm der linken Herzkammer	44
7.14	Herzminutenvolumen als Funktion des Blutdrucks	45
7.15	Reizfrequenz-Verlauf in Abhängigkeit von Blutdruck und Zeit	46
8.1	Arterielle Blutdruck	47
8.2	Lippiddoppelschicht-Biomembran	48
8.3	Erythrozytenform	48
8.4	Bulls-Versuch Erythrozytenform	49

8.5	Verläufe der kritischen Schubspannungen	49
8.6	Hämoglobin-Sättigungskurve	50
8.7	Feder-Dämpfer System zur Vorstellung von schubspannungsbedingter Hämolyse	50
8.8	Fliesskurve für newtonsches und nichtnewtonsches Fluid	52
8.9	Duckverteilung nach G.I.Taylor	53
8.10	Schubspannungsverteilung und Geschwindigkeitsverteilung in ebenen Plattendialysator	54
8.11	Schubspannungs-, Scherrate-, Geschwindigkeits-verlauf bei niedrigem und höherem Hämatokritwert	55
8.12	Fliessgrenze in Abhängigkeit von Hämatokrit	55
8.13	Wirkung von Schubspannungen und Wandkontakt auf Erythrozyten und Thrombozyten	55
8.14	Endstrecke von Gerinnungskaskade	56
8.15	Fahraeus-Lindqvist-Effekt	56
8.16	Verlauf der dynamischen Zähigkeit zum Durchmesser von Kapillare	57
8.17	Fliesskurve nach Modell vom Merville und Pelletier	57
8.18	Coply Modelle	57
8.19	Rabinowitsch-Mooney Beziehung	58
8.20	Kräftegleichgewicht	60
8.21	Couette-Rheometer	61
8.22	Parametern bei Kegel/ Platte-Rheometer	61
8.23	Bestimmung von Viskosität durch Fliesskurve	62
9.1	Rohrströmungs-kräftegleichgewicht	63
9.2	Verlaufen bei Existanz einer Fließgrenze	64
9.3	Kräftegleichgewicht an einem infinitesimalen Element	65
9.4	Verlauf einer rechtslaufende welle	67
9.5	Wellensystem mit fünf Wellenzügen	67
9.6	Strömung in Gefässverzweigung	68
9.7	Druckwelle	69
9.8	Kraeftegleichgewicht	73
10.1	Modell der äusseren Atmung	76
10.2	Ermittlung des Druck-Volumen-Diagramms der Atmung	77
10.3	pV-Diagramm von Atemsystem	77
10.4	lungenevolution	79
10.5	Kräftegleichgewicht	81
10.6	Molenbilanz	85
10.7	Blasenoxxygenator	90
10.8	Blasenoxxygenator	91
11.1	widerstandsanteile	97
11.2	reynolds-kugel	97
11.3	Widerstandsoptimierte Körperform für ein Kleinstlebewese	98
11.4	Strömungsangepasste Form des Kopfes eines Eispinguins	98

1 Einleitung

Die „Anwendungen zur Biomedizinischen Strömungsmechanik“ enthalten mehr als 100 Aufgaben und Lösungen zu grundlegenden Fragestellungen in der biomedizinischen Strömungsmechanik, die während des Studiums der Ingenieur- und Naturwissenschaften sowie im späteren Berufsleben von Interesse sind. Die Aufgabensammlung verdeutlicht die Breite der technischen Anwendungen der Strömungslehre im Bereich der Biomedizin.

Die Einteilung der Kapitel folgt der Darstellung der Themenbereiche in der einführenden Fluidmechanik, in dem die theoretischen Zusammenhänge und die fundamentalen Ansätze ausführlich diskutiert sind. Aus diesem Grund werden die Lösungen nicht detailliert kommentiert. Die Lösungen der ersten Aufgaben zu den jeweiligen Kapiteln sind exemplarisch mathematisch umfassend angegeben, während bei den weiteren Aufgaben die Lösungen kompakter dargestellt sind, da sich wiederholende Lösungsschritte zusammenfassen ließen. Zum besseren Verständniss wurden die Aufgabenstellungen und Lösungsangaben durch zahlreiche Skizzen und graphische Darstellungen ergänzt.

2 Herz

2.1 Allgemeine Fragen zum Herzmechanik

- a) Skizzieren Sie schematisch das menschliche Herz mit Vorhöfen und Kammern und kennzeichnen Sie die dazugehörigen Klappen.
- b) Beschreiben Sie kurz die mechanische Funktion des menschlichen Herzens mit Benennung der Hohlräume und Klappen.
- c) Skizzieren Sie ein pV-Diagramm der linken Herzkammer des Erwachsenen mit den wichtigsten Druck- und Volumenwerten, mit Kennzeichnung der Aktionsphasen der Kammer und der Volumenverluste an den Klappen.
- d) Bei welchem Kammerdruck (etwa) öffnet und schließt sich die Aortenklappe eines gesunden Erwachsenen unter Ruhebedingungen.
- e) Skizzieren Sie schematisch die Aktivierungsfunktion der linken Herzkammer für mindestens zwei Arbeitsspiele mit Benennung der Phasen.
- f) Wieviel Prozent des Herzminutenvolumens durchströmen bei durchschnittlicher Belastung folgende Organe: Herz, Lunge, Herzkranzgefäße, Gehirn, Nieren, Eingeweide, Muskeln, Haut und Skelett?

2.2 Autoregulation des Herzens

2.2.1 pV-Diagramm des Herzens 1

Gegeben ist das pV-Diagramm des Herzens mit den Kurven der isometrischen Maxima, der isotonischen Maxima und der Ruhedehnungskurve.

Weitere gegebene Werte sind:

- Enddiastolisches Volumen: 150 ml
- Schlagvolumen: 60 ml
- Druck bei dem die Aortenklappe öffnet: 120 mmHg

- a) Benennen Sie die im Diagramm gegebenen Kurven.
- b) Ermitteln Sie die Kurve der Maxima der Unterstützungszuckungen.

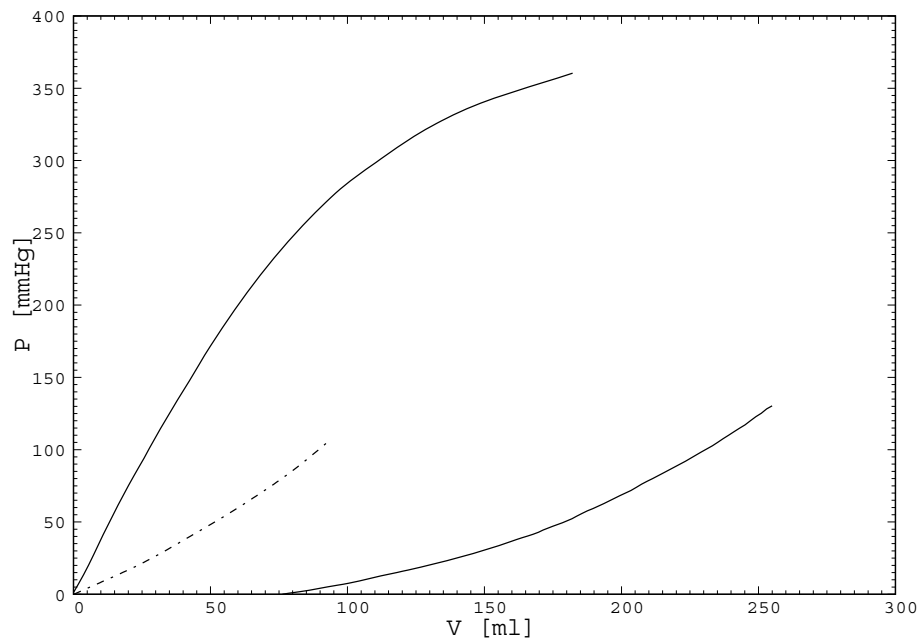


Abbildung 2.1: *pV-Diagramm des Herzens*

- Stellen Sie die Arbeit des linken Ventrikels im PV-Diagramm dar.
- Wie sieht das pV-Diagramm im neuen Gleichgewichtszustand aus, wenn sich der Aortendruck auf 240 mmHg erhöht hat und die Aortenklappe bei 160 mmHg öffnet? Skizzieren Sie auch einen Zwischenzustand, bevor der neue Gleichgewichtszustand erreicht ist.
- Wie ändert sich unter sonst gleichen Bedingungen (enddiastolisches Volumen 150 ml, gleicher Aortendruck) das pV-Diagramm bei Sympmatikusstimulation?

2.2.2 pV-Diagramm des Herzens 2

Frank-Starling-Mechanismus:

Gegeben ist das unten dargestellte Diagramm:

- Wie reagiert der Organismus auf einen plötzlich erhöhten Leistungsbedarf?
- Wie ändert sich dadurch der Verlauf der Starling-Kurve und der Venendruck-Kurve?
- Wo wird sich der neue Arbeitspunkt aufgrund der Autoregulation einstellen?
- Wie wirkt sich ein starker Blutverlust auf den Verlauf der Venendruck-Kurve aus?
- Welcher Venendruck stellt sich bei Herzstillstand ein?
- Wie ändert sich die Venendruck-Kurve bei vergrößertem peripherem Widerstand?

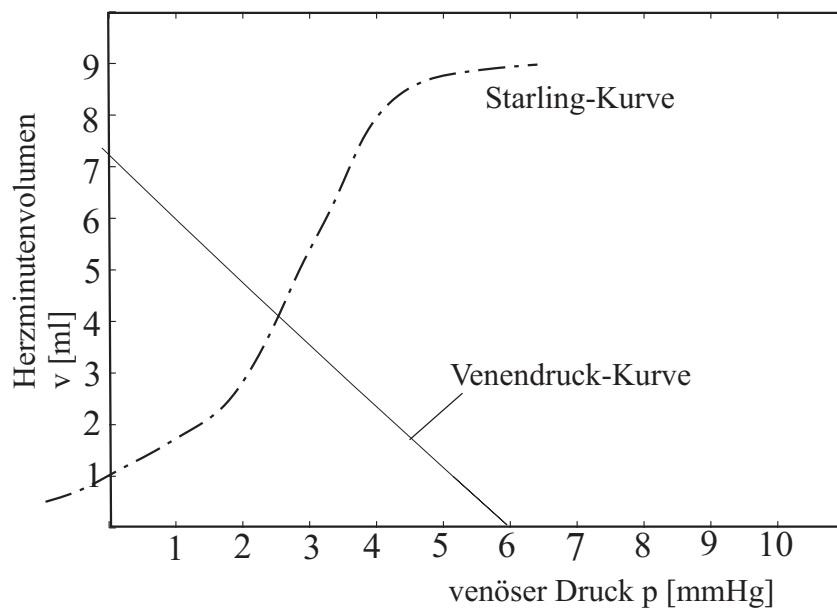


Abbildung 2.2: pV -Diagramm des Herzens bei Frank-Starling-Mechanismus

- g) Wie wirkt sich eine Erhöhung folgender Einflussgrößen auf den arteriellen Blutdruck aus:
- i) Blutvolumen im Kreislauf
 - ii) Venenkapazität
 - iii) Ventrikeldehnbarkeit
 - iv) Coronardurchblutung
 - v) Sinusfrequenz
 - vi) peripherer Widerstand

2.2.3 Kurvenveränderungen

Gegeben sei der schematische Druck-Volumen-Verlauf im linken Ventrikel und in der Aorta bei einer Schlagfrequenz von ca. $70/min$. Skizzieren Sie im Diagramm sorgfältig und kennzeichnen Sie eindeutig die Kurvenveränderungen für den Fall:

- a) einer Aortenklappen-Stenose mit ca. 40% Verengung.
- b) einer Aortenklappen-Insuffizienz mit ca. 5% Restöffnung.

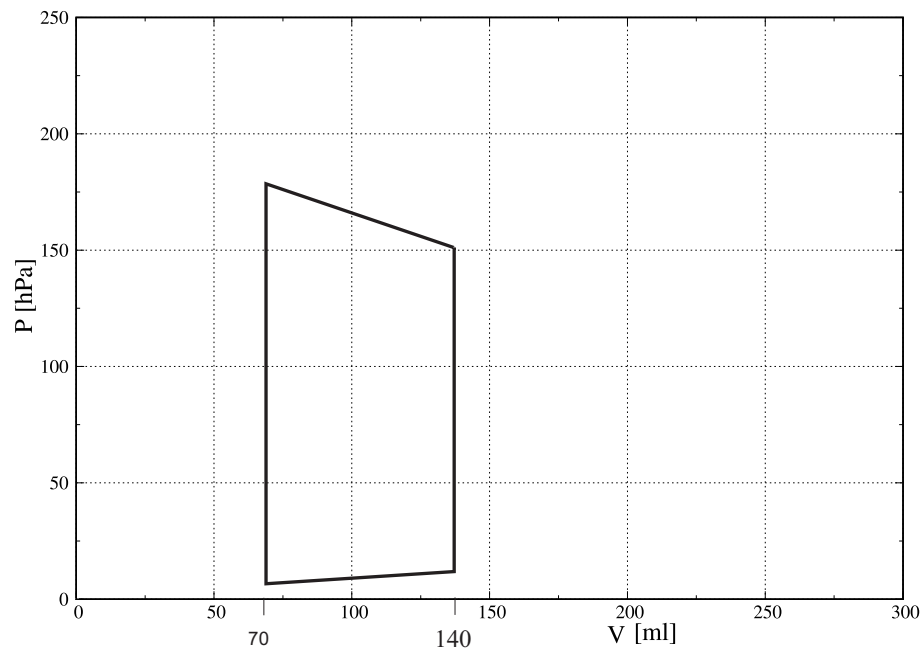


Abbildung 2.3: Druck-Volumen Verlauf von linkem Ventrikel

2.3 Herzklappen

- a) Was ist bei der konstruktiven Gestaltung blutdurchströmter künstlicher Organe und medizinischer Geräte zu beachten?
- b) Welche Mechanismen können bei Blutpumpen (Rollenpumpen) zur Hämolyse führen?
- c) Welche Beobachtungen machten Gehrman, Loogen, Bleifeld an Patienten mit künstlichen Herzklappen? Welche Untersuchungsmethode wurde dabei angewandt? Welche Mechanismen können bei künstlichen Herzklappen zur Hämolyse führen?
- d) Bei krankhaft veränderten Aortenklappen unterscheidet man zwischen „Aortenklappeninsuffizienz“ und „Aortenklappenstenose“.
 - i) Erläutern Sie beide Begriffe.
 - ii) Welche Herzbelastung resultiert aus der jeweiligen Erkrankung? Wie kompensiert das Herz diese Belastung? Nennen Sie Konsequenzen für die Versorgung des Herzmuskels. Warum ist die in der Regel sich entwickelnde Zunahme des enddiastolischen Volumens so ungünstig für die Herzmuskelbelastung?
 - iii) Nennen und skizzieren Sie zwei in ihrer Funktionsweise grundsätzlich zu unterscheidende künstliche Herzklappen, mit denen der Aortenklappenfehler behoben werden könnte.
 - iv) Welche Komplikationen können künstliche Herzklappen auslösen?
- e) Welche Vorteile hat biologischer Klappenersatz, welche Nachteile?
- f) Welchen Vorteil und welchen Nachteil hat ein großer Öffnungswinkel einer Scheibpendelklappe? Durch welche Maßnahmen können Vor- und Nachteil günstig beeinflusst werden?

- g) Benennen Sie die beiden Taschenklappen und die beiden Segelklappen im Herzen und geben Sie an, zwischen welchen Herzkammern bzw. Gefäßen sich die Klappen jeweils befinden.
- h) In welcher Phase des Herzzyklus ist es gerechtfertigt, die Strömungsverhältnisse in der Aortenklappe quasistationär zu betrachten? Wie vereinfachen sich dadurch die Ähnlichkeitsbedingungen, die bei Modellversuchen einzuhalten sind?
- i) Skizzieren Sie das Strömungsbild im linken Ventrikel während der Diastole, wenn die Mitralklappe durch eine Björk-Shiley-Prothese ersetzt wurde.
- j) Welchen Vorteil hat ein großer Öffnungswinkel bei einer Scheibenpendelklappe und welcher nachteilige Effekt kann damit verbunden sein? Durch welche Gestaltungsmaßnahme kann der nachteilige Effekt wesentlich reduziert werden?
- k) Nennen Sie die Ähnlichkeitsbedingungen, die bei Modellversuchen mit künstlichen Herzklappen einzuhalten sind. In welcher Phase des Herzzyklus ist es gerechtfertigt, die Strömungsverhältnisse in der Aortenklappe quasistationär zu betrachten? Wie vereinfachen sich dadurch die Ähnlichkeitsbedingungen, die bei Modellversuchen einzuhalten sind?
- l) Nennen Sie drei Fragestellungen zur Funktion künstlicher Herzklappen, die sich mit Mitteln strömungsmechanischer Modellexperimente in dreidimensionalen Modellen untersuchen lassen. Nennen Sie drei Fragestellungen, die sich mit Wasserwannen-Modellexperimenten untersuchen lassen.
- m) Nennen Sie die Randbedingungen, die bei der Auslegung blutführender Systeme zu beachten sind, um die Blutschädigung zu minimieren.
- n) Skizzieren Sie den Stromlinienverlauf im Bereich
- i) einer natürlichen Aortenklappe
 - ii) einer Starr-Edwards-Klappe in Aortenposition,
 - iii) einer Björk-Shiley-Klappe in Aortenposition.

2.4 Maxwellsches Herzmuskelmodell

Unter Verwendung des Maxwellschen Herzmuskelmodells kann die folgende Differentialgleichung für den zeitlichen Druckverlauf innerhalb eines Ventrikels entwickelt werden.

$$\frac{dp}{dt} = [K_S \cdot (p - p_P + C_S) + \frac{dp_P}{dV}] \cdot \frac{dV}{dt} + \frac{K_S \cdot (p - p_P + C_S) \cdot (A \cdot S_{Lc} \cdot f_a(t) - p + p_P)}{a \cdot f_a(t) + b \cdot (p - p_P) + g}$$

- a) Skizzieren Sie die technische Repräsentation des Maxwellschen Herzmuskelmodells und erläutern Sie kurz die physikalische bzw. physiologische Bedeutung der einzelnen Terme der obigen Gleichung.
- b) Nennen Sie mindestens vier Beispiele für Anwendungsgebiete zur Herzmechanik.

2.5 Kreislaufhämodynamik

- a) Nennen Sie vier aus strömungstechnischer Sicht wesentliche Besonderheiten, die bei der Behandlung der Strömung von Blut im Herz-Kreislaufsystem zu beachten sind.
- b) Skizzieren Sie qualitativ den Verlauf der Systolendauer und der Diastolendauer in Abhängigkeit von der Schlagfrequenz des Herzens. Welche Konsequenzen ergeben sich daraus für die Füllung des Herzens bei hoher Schlagfrequenz?
- c) Wodurch werden die Schlagvolumina der beiden Herzkammern einander angeglichen?
- d) Erläutern Sie kurz den Frank-Starling-Mechanismus (Aufgabe und Funktionsweise).
- e) Wie erhält man die Volumenfunktion? Zeichnen Sie entsprechende Kurven in einem pV-Diagramm ein.
- f) Was beschreibt der Frank-Starling-Mechanismus? Wie ermittelt man am isolierten Herzpräparat die Ruhedehnungskurve, wie die Kurve der isometrischen Maxima und wie die Kurve der isotonischen Maxima?
- g) Guyton hat für das isolierte Herz-Lungen-Präparat das Herzminutenvolumen als Funktion des Blutdrucks im rechten Vorhof ermittelt.
 - i) Stellen Sie qualitativ den Kurvenverlauf für den rechten Ventrikel und den linken Ventrikel dar.
 - ii) Durch welche anatomischen Gegebenheiten erklärt sich der Unterschied in der Steigung beider Kurven?
- h) Was versteht man unter der Windkesselfunktion des arteriellen Systems? Welche Konsequenzen ergeben sich daraus für die Pulsation von Volumenstrom und Druck bei einer arteriosklerotisch veränderten Aorta?
- i) Was versteht man unter Ventilebenenmechanismus, was unter Vorhofkontraktion? Unter welchen Bedingungen kommen diesen Mechanismen besondere Bedeutung zu?
- j) Erläutern Sie Aufgabe und Funktionsweise des Barorezeptors im Carotis-Sinus.
- k) Skizzieren Sie ein Diagramm, aus dem sich die Abhängigkeit der Reizfrequenz vom arteriellen Blutdruck ergibt. Wie ist der Verlauf der Reizfrequenz über der Zeit bei mehrtägiger Blutdruckerhöhung?
- l) Welche grundsätzlichen Unterschiede bestehen zwischen linker und rechter Ventrikelmuskulatur?
- m) Die Venenkapazität $C_v = \Delta V_v / \Delta P_v$ beträgt das ca. 20-fache der Arterienkapazität.
 - i) Wie ändert sich bei festem peripherem Widerstand der venöse Blutdruck bei steigendem Herzminutenvolumen?
 - ii) Wie lässt sich dieser Zusammenhang in einem Diagramm nach Guyton graphisch darstellen?
 - iii) Wie wirkt sich eine Erhöhung des peripheren Widerstandes auf den Kurvenverlauf aus?
 - iv) Wie wirkt sich eine Änderung des in Umlauf befindlichen Blutvolumens auf den Kurvenverlauf aus?

3 Blut

3.1 Allgemeine Fragen zum Blut

- a) Welche beiden Möglichkeiten der Blutdruckmessung kennen Sie? Erläutern Sie die Methode nach Riva-Rocci und Korotkoff, und verdeutlichen Sie anhand einer Grafik wie sich der Manschettendruck in Relation zum arteriellen Blutdruck während der Messung ändert und erklären Sie wodurch die im Stetoskop wahrnehmbaren Geräusche verursacht werden.
- b) Welche Aufgaben hat das Blut im menschlichen Organismus? Warum kommen Einzeller ohne Blutkreislauf aus?
- c) Geben Sie an, wie sich das Blut prozentual auf die verschiedenen Gefäßabschnitte Arterien/Arteriolen, kapillaren, Venen, Lungengefäße, Herz aufteilt.

3.2 Zellulärer Bestandteil des Blutes

- a) Welche Aufgaben haben Erythrozyten (rote Blutkörperchen), Thrombozyten (Blutplättchen) und Leukozyten (weiße Blutkörperchen) im Organismus?
- b) Aus welchen Molekülen wird die Membran von Erythrozyten gebildet? Welche Schichtdicke hat die Membran?
- c) Skizzieren Sie den molekularen Membranaufbau. Machen Sie hydrophile und hydrophobe Molekülteile kenntlich. Welche mechanischen Eigenschaften hat eine solche Membran?
- d) Skizzieren Sie die Gestalt eines Erythrozyten, geben Sie die Hauptabmessungen an.
- e) Beschreiben Sie, mit welchem Versuch Bull zeigen konnte, dass Erythrozyten kein inneres Gerüst haben. Erläutern Sie die Versuchsdurchführung anhand von Skizzen.
- f) Skizzieren Sie qualitativ in einem doppellogarithmischen Diagramm die Verläufe der kritischen Schubspannungen für Erythrozyten und Thrombozyten in Abhängigkeit von der Belastungszeit (Zahlenangaben sind nicht erforderlich). Begründen Sie die Unterschiede in den Kurvenverläufen.
- g) Wie wirken sich niedrige Schubspannungen auf Thrombozyten aus?
- h) Nennen Sie drei Arten von Leukozyten. Was versteht man unter Phagozytose? Was versteht man unter Migratiosfähigkeit, was unter Taxis, was unter Tropismus?

3.3 Hämoglobin

- a) Wieviel Prozent des Inhalts von Erythrozyten bestehen aus Hämoglobin? Welches Molekulargewicht (ungefähr) hat Hämoglobin? Wieviel O_2 - Moleküle können von einem Hämoglobinmolekül reversibel gebunden werden?
- b) Beschreiben Sie, wodurch die O_2 - Dissoziationskurve des Hämoglobins die O_2 - Aufnahme bzw. - Abgabe unterstützt. Veranschaulichen Sie dies anhand einer graphischen Darstellung der O_2 - Dissoziationskurve unter Berücksichtigung ihrer Abhängigkeit von Temperatur und pH-Wert.

3.4 Rheologische Eigenschaften von Blut

3.4.1 Hämolyse

- a) Erläutern Sie anhand eines Feder-Dämpfer-Elementes wie man sich den Zerstörungsmechanismus bei schubspannungsbedingter Hämolyse bei
 - i) kurzfristig wirkenden hohen laminaren Schubspannungen,
 - ii) langfristig wirkenden niedrigen laminaren Schubspannungenvorstellen kann.
- b) Beschreiben Sie die Vorgänge bei der osmotischen Hämolyse. Was versteht man unter Zellschatten (bzw. ghosts)? Wie lassen sich die Vorgänge der osmotischen Hämolyse wieder umkehren?
- c) Nennen Sie vier Versuchsanordnungen, mit denen die schubspannungsbedingte Hämolyse roter Blutkörperchen untersucht wurde. Welche der genannten Anordnungen sind besonders für die Erzeugung hoher, kurzzeitiger Schubspannungen geeignet?
- d) Kann hydrostatischer Überdruck (bis ca. 100 bar) Ursache für Hämolyse sein? Wie wirkt sich hydrostatischer Unterdruck auf rote Blutkörperchen aus? Geben Sie für hydrostatischen Unterdruck eine Grenze an, ab der mit Hämolyse gerechnet werden muss.
- e) Nennen Sie 4 Formen künstlicher Hämolyse.
- f) Welche Mechanismen können bei Patienten mit künstlichen Herzklappen zur Hämolyse führen?
- g) Wie kann man sich den Zerstörungsmechanismus bei schubspannungsbedingter Hämolyse vorstellen?
- h) Was versteht man unter natürlicher Hämolyse, wie erkennt der Organismus gealterte Erythrozyten, wie eliminiert er sie? Welche Rolle spielt Haptoglobin im Zusammenhang mit der Hämolyse?
- i) Kann hydrostatischer Überdruck Ursache für Hämolyse sein? Wie wirkt sich hydrostatischer Unterdruck auf rote Blutkörperchen aus? Geben Sie eine Grenze an, ab der mit Hämolyse gerechnet werden muss.

3.4.2 Fließverhalten von Blut

- a) Skizzieren Sie in einem $\tau = f(\dot{\gamma})$ -Diagramm die Fließkurven für ein newtonsches und für ein nichtnewtonsches Fluid. Tragen Sie an den Achsen Dimensionen und Zahlenwerte ein.
- b) Skizzieren Sie die Druckverteilung um einen Flüssigkeitstropfen, der sich in einem ebenen Scherfeld einer anderen Flüssigkeit befindet. Kennzeichnen Sie äußerer Überdruck mit (+), äußerer Unterdruck mit (-).
- c) Erläutern Sie, warum normales Vollblut ein nichtnewtonsches Fließverhalten hat.
- d) Aufgrund welchen Effektes ist zu erwarten, dass Vollblut eine Fließgrenze besitzt?
- e) Beschreiben Sie das Verhalten roter Blutkörperchen, wenn Blut, ausgehend vom Zustand der Ruhe, mit langsam steigender Schergeschwindigkeit geschert wird. Nennen Sie jeweils die Auswirkungen auf die Fließkurve.
- f) Für das Vollblut soll eine Fließgrenze angenommen werden. Skizzieren Sie für einen ebenen Plattendialysator die Schubspannungsverteilung sowie die Geschwindigkeitsverteilung in dem Spalt zwischen den Platten
 - i) auf der Blutseite,
 - ii) auf der Dialysatseite.
- g) Blut habe eine Fließgrenze. Skizzieren Sie für eine laminare, stationäre Rohrströmung den Verlauf der Schubspannung $\tau(r)$ über dem Radius sowie den Verlauf der Scherrate $\dot{\gamma}(r)$ und der Geschwindigkeit $v(r)$ als Funktion des Radius.
 - i) für Blut mit niedrigem Hämatokrit.
 - ii) für Blut mit normalem Hämatokrit.
- h) Für praktische Rechnungen können bei der Strömung von Vollblut in Kapillaren Durchmesserbereiche angegeben werden, innerhalb der bestimmten Annahmen hinsichtlich des Fließverhaltens von Blut gemacht werden können. Geben Sie die Bereiche an und erläutern Sie, welche Annahmen in Bezug auf das Fließverhalten gemacht werden können.
 - i) Nennen Sie zwei Messsysteme, die geeignet sind zur Bestimmung der Fließkurve von Vollblut.
 - j) Nennen Sie ein konstruktiv sehr einfaches System (ohne mechanisch bewegte Komponenten) für die Ermittlung der Fließkurve von Vollblut. Nennen Sie ein technisch sehr aufwendiges System für die Ermittlung der Fließkurve von Vollblut. Welche Vor- und Nachteile haben beide Systeme?
- k) Skizzieren Sie qualitativ die Abhängigkeit der Fließgrenze von Vollblut vom Hämatokritwert. Warum hat Vollblut darüber hinaus ein nichtnewtonsches Fließverhalten?

3.4.3 Gerinnungssystem

- Beschreiben Sie den Ablauf des Verschlusses einer Gefäßverletzung. Welche Phase des Verschlusses ist bei der Bluterkrankheit (Hämophilie) gestört?
- Skizzieren Sie anhand einer Graphik die Wirkung von Schubspannungen und Wandkontakt auf Erythrozyten und Thrombozyten sowie mögliche Wechselwirkungen der Blutkörperchen aufeinander.
- Nennen Sie zwei mögliche Auslösungsmechanismen für die Gerinnungskaskade des plasmatischen Gerinnungssystems. Skizzieren Sie die letzten Stufen der Gerinnungskaskade, in denen sich aus Fibrinogen das faserförmige Fibrin bildet.

3.4.4 Fahraeus-Lindqvist-Effekt

- Was versteht man unter dem Fahraeus-Lindqvist-Effekt? Welche physiologische Bedeutung hat das?
- Nennen Sie eine plausible Begründung für Fahraeus-Lindqvist-Effekt, der insbesondere bei Kapillaren mit kleinem Durchmesser zum Tragen kommt.
- Skizzieren Sie den Verlauf der dynamischen Zähigkeit des Blutes in Abhängigkeit vom Durchmesser der Messkapillaren.

3.5 Rheologische Modelle von Blut

- Skizzieren Sie die Fließkurve $\sqrt{\tau} = f(\sqrt{\dot{\gamma}})$ nach dem Modell vom Merville und Pelletier. Geben Sie die Grenzen charakteristischer Bereiche an.
- Skizzieren Sie den Verlauf der dynamischen Zähigkeit η [cP] als Funktion der Schergeschwindigkeit $\dot{\gamma}$ [1/sec], wie er von Copley für Vollblut experimentell ermittelt wurde. Geben Sie Zahlenwerte an.
- Bei der Ermittlung der Fließkurve von Vollblut mit Hilfe eines Kapillarviskosimeters ist die Rabinowitsch-Mooney-Beziehung zu verwenden.
Für welche Fluide kann diese Beziehung verwendet werden? Welche Größen sind messtechnisch zu bestimmen? Aus welchem Diagramm ist die Fließkurve punktweise zu ermitteln?
- Rabinowitsch-Mooney-Beziehung stellt einen Zusammenhang zwischen der Schergeschwindigkeit $\dot{\gamma}_w$ und der Schubspannung τ_w an der Wand bei einer laminaren Rohrströmung dar. Aus ihr lässt sich mittels Messungen punktweise die Fließkurve $\tau_w = f(\dot{\gamma}_w)$ für ein beliebiges Fluid ermitteln.

$$\dot{\gamma}_w = F(\tau_w) = \frac{d\phi}{d\tau_w} \cdot \tau_w + 3 \cdot \phi$$

mit

$$\phi = \frac{\dot{Q}}{\pi R^3} ; \quad \tau_w = \frac{\Delta p}{\Delta x} \cdot \frac{R}{2}$$

- i) Welche Größen sind dafür messtechnisch zu bestimmen?
- ii) Welches Diagramm ist zunächst zu konstruieren, um daraus die Unbekannten der Rabinowitsch-Mooney-Beziehung zu ermitteln? Skizzieren Sie dieses Diagramm.
- iii) Zeigen Sie, dass ein newtonsches Fluid einen Sonderfall darstellt, der die Rabinowitsch-Mooney-Beziehung ebenfalls erfüllt.
 - Benutzen Sie dazu die für die laminare Rohrströmung eines newtonschen Fluids abgeleitete Hagen-Poiseuille-Gleichung:

$$\dot{Q} = -\frac{\Delta p}{\Delta x} \cdot \frac{\pi}{8\eta} \cdot R^4$$

3.6 Pathophysiologische Einflüsse auf Blutviskosität

- a) Wie wirken sich Globuline auf die Aggregationsneigung von Erythrozyten aus?
- b) Wie wirkt sich der Hämatokrit auf die Viskosität von Vollblut aus, wie auf die Fließgrenze des Blutes.
- c) Was können Sie aus der von A. Einstein aufgestellten Beziehung zur Viskosität schwach konzentrierter Suspensionen ableiten in Bezug auf die Abhängigkeit der Viskosität von Vollblut vom Hämatokritwert?
- d) Wie wirkt sich eine Konzentrationssteigerung folgender Plasmaproteine auf die Aggregationsneigung roter Blutkörperchen aus:
 - i) Albumin
 - ii) Fibrinogen
 - iii) Globuline

Warum ist bei einer infektiösen Erkrankung in der Regel die Blutsenkungsgeschwindigkeit erhöht?

- e) Wie verändert sich das Fließverhalten von Vollblut bei der Erkrankung Elliptozytose? Wie verändert sich die Viskosität von Vollblut bei der Erkrankung Sichelzellanämie?

3.7 Blutviskositätsmessung

- a) Zur Bestimmung der Viskosität eines Fluids sind verschiedene Verfahren (Messgeräte) bekannt.

- i) Nennen Sie vier verschiedene Apparaturen.
 - ii) Nennen Sie eine Apparatur, die ausschließlich für die Bestimmung der Viskosität eines newtonschen Fluids geeignet ist.
- b) Was versteht man im Zusammenhang mit der Viskositätsmessung von Vollblut unter dem σ -Effekt, der beobachtet wurde, wenn die Viskositätsmessungen mit fibrinbeschichteten Kapillaren durchgeführt wurden.
- c) Kugelfall-Viskosimeter:
- i) Leiten Sie für ein Kugelfallviskosimeter die Beziehung her, aus der die dynamische Zähigkeit des zu messenden Fluids ermittelt werden kann.
 - ii) Erläutern Sie anhand der Beziehung, warum ein Kugelfallviskosimeter für genaue Messungen der Viskosität von Vollblut ungeeignet ist.
- d) Couette-Rheometer:
- i) Wie ist ein Couette-Rheometer aufgebaut?
 - ii) Wodurch entstehen in einem Couette-Rheometer Taylor-Wirbel? Welche Konsequenz haben diese für die Messgenauigkeit?
 - iii) Durch welche konstruktive Änderung lässt sich die Entstehung von Taylor-Wirbeln günstig beeinflussen?
- e) Kegel/ Platte-Rheometer:

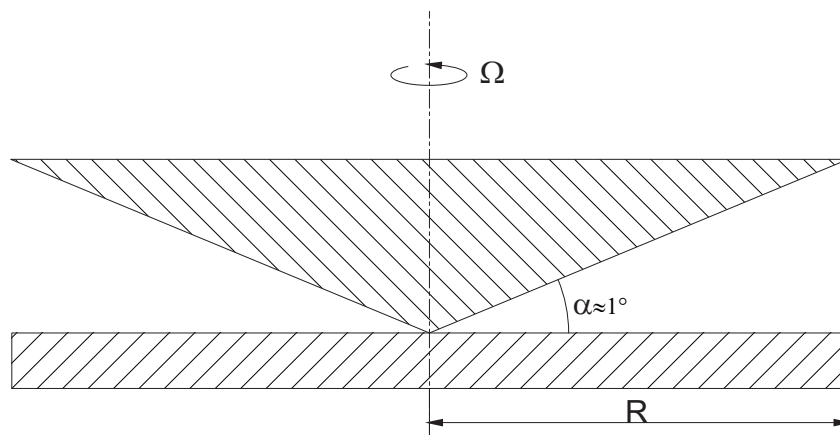


Abbildung 3.1: *Kegel-Platte-Rheometer*

- i) Leiten Sie für ein Kegel/ Platte-Rheometer die Beziehungen her, mit denen die Fließkurve $\tau = f(\dot{\gamma})$ für Vollblut ermittelt werden kann. Geben Sie an, welche apparativen Größen bekannt sein müssen und welche zu messen sind.
- ii) Welche Besonderheiten sind bei der Messung der Fließkurve mit Hilfe eines Kegel/ Platte-Rheometers zu beachten?
- iii) Wie ergibt sich aus der Fließkurve die Viskosität des Fluids?

4 Blutgefäße

4.1 Allgemeine Fragen

4.1.1 Rohrströmung bei Existenz einer Fließgrenze τ_y

- Leiten Sie aus der Betrachtung des Kräftegleichgewichts am Elementarzylinder die Funktion $\tau = f(r)$ her.
- Bestimmen Sie die Geschwindigkeitsverteilung unter der Annahme, dass die Fließeigenschaften des Blutes durch das „Casson-Modell“ beschrieben werden:

$$\sqrt{\tau} = \sqrt{\tau_y} + c \cdot \sqrt{(du/dy)}$$

Dabei sollen die Konstanten τ_y und c als bekannt angenommen werden.

- Skizzieren Sie die Verläufe von
 - Schubspannung
 - Geschwindigkeit,
 - Schergeschwindigkeit,

bei Existenz einer Fließgrenze τ_y als Funktion von r .

4.1.2 Strömung zwischen ebenen Platten mit Fließgrenze τ_0

Für die Auslegung eines Plattenoxygenators soll das Geschwindigkeitsprofil $u(y)$ der Strömung zwischen zwei ebenen, eng benachbarten Platten berechnet werden.

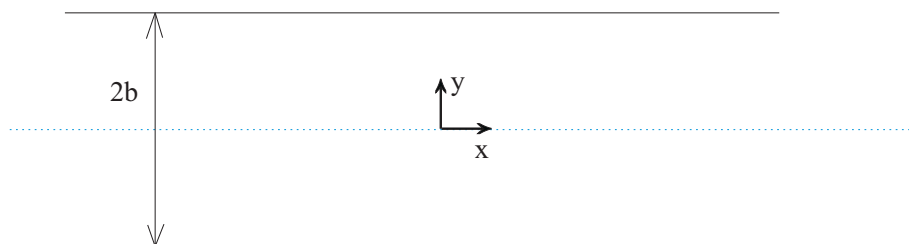


Abbildung 4.1: Strömung bei ebenen Platten

- a) Leiten Sie dazu aus der Betrachtung des Kräftegleichgewichts an einem Fluidelement die Funktion $\tau = f(dp/d(x, y))$ her.
- b) Bestimmen Sie die Geschwindigkeitsverteilung unter der Annahme, dass die Fließeigenschaften des Blutes durch das „Casson-Modell“ beschrieben werden:

$$\sqrt{\tau} = \sqrt{\tau_0} + c \cdot \sqrt{du/dy}$$

Dabei sollen die Konstanten τ_0 und c als bekannt angenommen werden.

4.2 Wellenausbreitung in elastischen Gefäßen

- a) Wie lautet die Moens-Korteweg-Formel und was besagt sie?
- b) Skizzieren Sie in einem $f(x), t$ -Diagramm den Verlauf einer rechtslaufenden Welle für die Zeitpunkte t_0 und t_1 mit der Wellengeschwindigkeit c und erläutern Sie die Definition der Wellengeschwindigkeit und der einzelnen Abschnitte im Diagramm.
- c) Skizzieren Sie ein Wellensystem mit mindestens fünf Wellenzügen in einem x, t -Diagramm mit den Randbedingungen $u = 0$ an beiden Enden eines Gefäßabschnittes. Kennzeichnen Sie die Charakteristiken für rechts- und linkslaufende Wellenzüge und die Bedeutung der Wellengeschwindigkeit in diesem Diagramm.
- d) Wie ist der Volumenelastizitätsmodul definiert und welche Dimension hat er?
- e) Schreiben Sie die Wellengleichung für die eindimensionale Gefäßströmung auf. Unter welchen Voraussetzungen gilt die genannte Wellengleichung?
- f) Wie lautet die Lösung der Wellengleichung nach d'Alembert?
- g) Welche Besonderheiten der Blutströmung können an Gefäßverzweigungen beobachtet werden? Skizzieren Sie den Stromlinienverlauf in einem Verzweigungsbereich. Skizzieren Sie die Geschwindigkeitsverteilung über dem Querschnitt: unmittelbar vor der Verzweigung, in dem zuführenden Gefäß, unmittelbar hinter der Verzweigung, in den beiden abführenden Schenkeln.
- h) Wie ermittelt man den Druckverlustbeiwert einer Engstelle im geraden Gefäß aus den Querschnitten für die eindimensionale stationäre Strömung mit konstanter Dichte?
- i) Eine linkslaufende Druckwelle hat zum Zeitpunkt $t = t_0$ die Form:

$$p(x, t_0) = p_0 \sin\left(\frac{\pi}{L} \bar{x}\right) \quad \text{für} \quad 0 \leq \bar{x} \leq L.$$

Sie breitet sich mit der Geschwindigkeit c in einem ruhenden Medium aus.

gegeben: $c = 10 \text{ m/s}$, $L = 2.5 \text{ m}$, $x_1 = 7.5 \text{ m}$

- i) Bestimmen Sie unter der Verwendung der Lösung der linearisierten Wellengleichung die Zeit t_1 , nach der an der Stelle x_1 ein Drittel des maximalen Drucks erreicht ist.

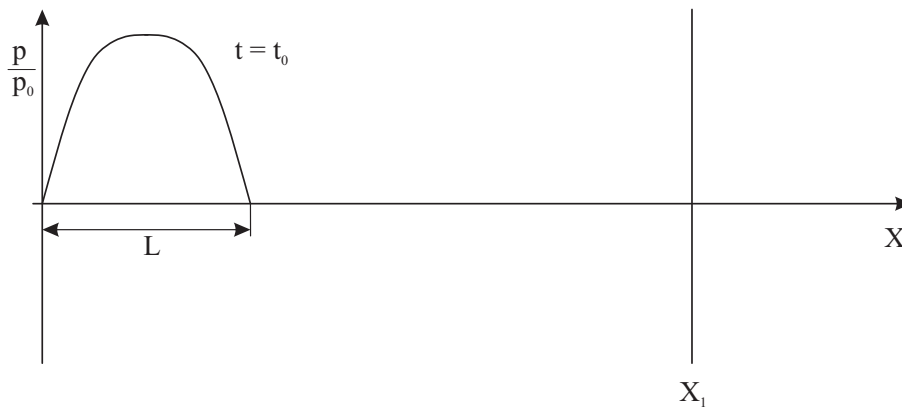


Abbildung 4.2: Druckwelle

- ii) Skizzieren Sie die Druckwelle zum Zeitpunkt t_1 am Ort x_1 im entsprechenden Diagramm in den Lösungsblättern.

4.3 Strömung in elastischen Gefäßen

a) **Elastischer Schlauch:**

Eine eindimensionale, reibungsfreie, inkompressible und instationäre Strömung durch einen elastischen Schlauch (Innenradius R_i) sei mit einer konstanten Geschwindigkeit U überlagert und kann mit folgenden Gleichungen beschrieben werden:

- Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(A \cdot u_g) \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial R_i^2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u_g R_i^2) = 0$$

- Impulsgleichung:

$$\frac{\partial u_g}{\partial t} + U_g \frac{\partial u_g}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_i}{\partial x} = 0$$

Hierbei gilt:

- $u_g = U + u$: Gesamtgeschwindigkeit
- $(U \neq f(t, x))$: Stationäre Geschwindigkeit
- u : Störgeschwindigkeit

- i) Leiten Sie hiermit unter Berücksichtigung folgender Voraussetzungen die Differentialgleichung für die Druckausbreitung in einem elastischen Gefäß her:

- der Querschnitt hängt nur von der transmuralen Druckdifferenz ab.
- die Abhängigkeit des Radius vom Innendruck sei linear
- die Geschwindigkeit sei klein
- die Änderung des Radius sei viel kleiner als die Länge des Gefäßes (Wellenamplitude \ll Wellenlänge)

- Linearisieren Sie die Impulsgleichung für kleine Geschwindigkeiten u .
- Führen Sie beide Gleichungen durch eine geeignete Koordinatentransformation in eine Form über, in der die Geschwindigkeit U nicht mehr explizit enthalten ist.

b) Elastisches Gefäß:

Gegeben sind die Erhaltungsgleichungen für die Strömung durch ein elastisches Gefäß:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uA) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

- Nennen Sie drei Voraussetzungen die bei der Aufstellung dieser Gleichungen getroffen wurden.
- Unter welcher Bedingung ist hier eine Linearisierung der Impulsgleichung erlaubt und wie vereinfacht sich diese daraufhin?
- Leiten Sie unter Zuhilfenahme geeigneter Vereinfachungen die Differentialgleichung für die Druckausbreitung in einem elastischen Gefäß her.

c) Auslegung einer Kapillarniere:

Eine Kapillarniere, die am Körper getragen werden soll, ist auszulegen. Als maximal treibende Druckdifferenz steht die arteriovenöse Druckdifferenz in Höhe von $\Delta p = 2 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2$ zur Verfügung. Der Innendurchmesser der Kapillare betrage $d_i = 10^{-3} \text{ m}$.

- Leiten Sie eine Beziehung $\tau = f(\Delta p, l, d_i)$ her. Betrachten Sie dazu das Kräftegleichgewicht an einem Volumenelement bei der laminaren Rohrströmung.
- Bei welcher Kapillarlänge wird gerade im Blut die kritische Schubspannung $\tau_{krit} = 10 \text{ N/m}^2$ überschritten, die zur subletalen Schädigung roter Blutkörperchen führen kann?

d) **Blutgefäßverzweigung:**

Von einem Blutgefäß mit dem konstanten Innendurchmesser $D = 5\text{ mm}$ zweige an der Stelle „A“ ein Kollateralfäß mit einem konstanten Innendurchmesser $d = 0,1\text{ mm}$ ab und münde an der Stelle „B“ wieder in das Ursprungsgefäß. Der Abstand der Stellen „A“ und „B“ betrage im großlumigen Gefäß $L = 20\text{ cm}$. Das Kollateralfäß habe eine Länge von $l = 40\text{ cm}$.

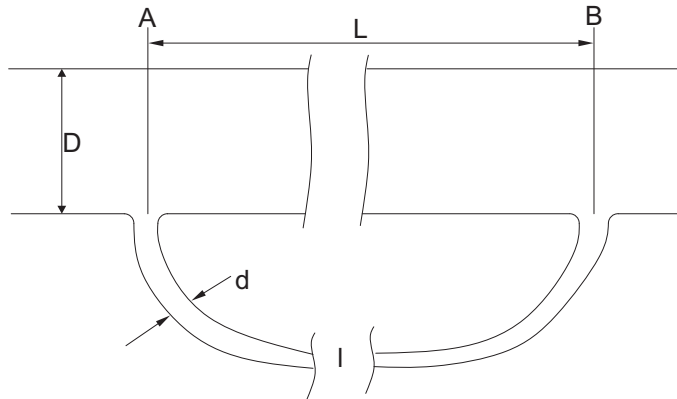


Abbildung 4.3: Blutgefäßverzweigung

- i) Ermitteln Sie, bei welcher mittleren Geschwindigkeit \bar{u} im großlumigen Gefäß die Strömung im Kollateralfäß gerade einsetzt.
- ii) Wie ändern sich die Verhältnisse, wenn sich im großlumigen Gefäß zwischen „A“ und „B“ ein Gerinnsel angelagert hat, das einen großen Teil des Gefäßquerschnittes versperrt, \bar{u} aber konstant bleibt?
- iii) Wie verändern sich die Strömungsverhältnisse im Kollateralfäß, wenn sich der Hämatokritwert des Blutes verringert?

Anmerkungen zum Aufgabenteil 1:

- Im großlumigen Gefäß kann Blut als newtonsches Fluid mit einer dynamischen Zähigkeit $\eta = 4 \cdot 10^{-3}\text{ N s/m}^2$ behandelt werden.
- Der Druckabfall bei der laminaren Rohrströmung berechnet sich nach der Beziehung:
- $\Delta p = \lambda \frac{L}{D} \frac{\rho}{2} \bar{u}^2$ mit $\lambda = \frac{64}{Re}$.
- Für die Behandlung der Strömung im Kollateralfäß soll für Blut eine Fließgrenze $\tau_y = 3,2 \cdot 10^{-3}\text{ N/m}^2$ angenommen werden.

5 Atemsystem

5.1 Allgemeine Fragen zum Atemsystem

- Erläutern und skizzieren Sie das Modell der äußeren Atmung.
- Erläutern und skizzieren Sie, wie das Druck-Volumen-Diagramm der Atmung ermittelt wird.
- Skizzieren Sie jeweils ein Druck-Volumen-Diagramm für Ruheatmung, erhöhte Atemfrequenz und gesteigertes Atemzugvolumen. Kennzeichnen Sie in den Diagrammen die geleistete Atemarbeit und geben Sie einen formelmäßigen Zusammenhang für diese an.
- Was versteht man unter Compliance und dynamischer Compliance?
- Das Herzminutenvolumen betrage 5 l/min , geben Sie an, welche Gesamtoberfläche pro Minute blutseitig in der Lunge für die O_2 -Aufnahme zur Verfügung steht.

5.2 Evolutionstheorie

Das Blutgefäßsystem (u.A. wie auch der Bronchialast) ist bezüglich des Energieverbrauchs optimiert, d.h. hinsichtlich der Energiekosten für den Bluttransport und die Blutneubildung.

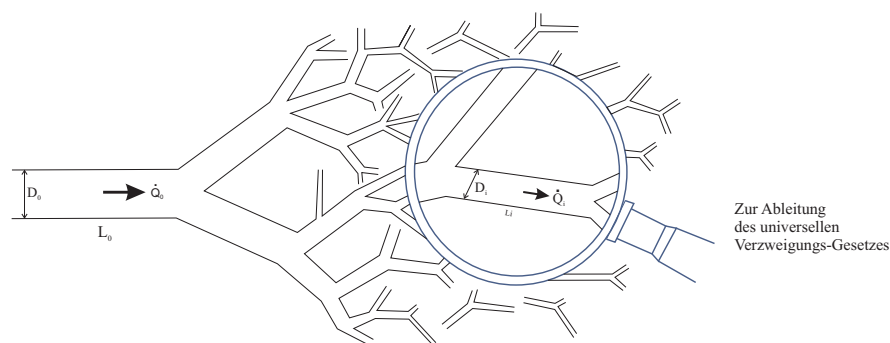


Abbildung 5.1: Lungenarterien-Verzweigung

- Beschreiben Sie mathematisch die Pumparbeit pro Zeiteinheit (Pumpleistung P) für das Verzweigungssystem zur Förderung des Blutes. Teilen Sie auf in Rohr „0“ und die folgenden Rohre $i = 1..n$.

Hinweis:

$$\Delta p = \frac{128\mu l \dot{Q}}{\pi D^4}$$

- b) Beschreiben Sie mathematisch die Leistungskosten zur Bluterneuerung für das Verzweigungssystem. Diese sind proportional zum Gefäßvolumen mit Rohr $P = k \cdot V_{Rohr}$. Teilen Sie auf in Rohr „0“ und die folgenden Rohre $i = 1..n$.
- c) Betrachten Sie die Evolutionslösung als Minimierungsproblem einer Kostenfunktion und leiten Sie das Durchmesser Verhältnis D_i/D_0 als Funktion von \dot{Q}_i/Q_0 unter diesen Bedingungen ab. Was sagt das Ergebnis bezüglich des optimalen Durchmessers eines jeden Rohrweiges aus?
- d) Welche Lösung ergibt sich für D_i/D_0 , wenn die Verzweigungen immer aus 2 symmetrischen Tochterästen gleichen Durchmessers und gleicher Länge gebildet sind. Tragen Sie die Beziehung in das untenstehende Diagramm graphisch auf (Hinweis: D_0 soll 10 mm betragen).

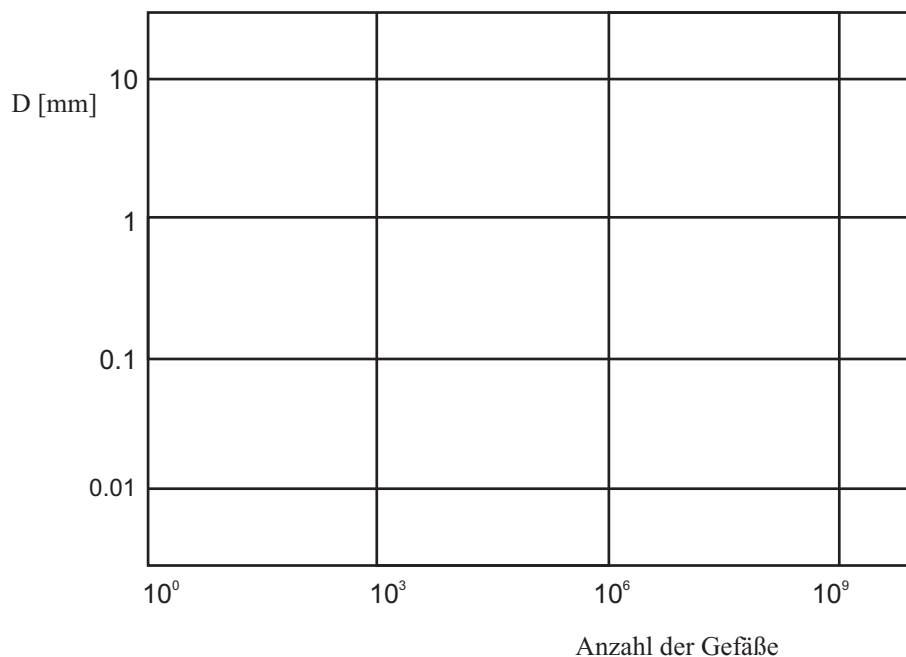


Abbildung 5.2: Durchmesser Verhältnis D_i/D_0 als Funktion von Rohrweige

5.3 Alveolarer Gasaustausch

Die Gasaustauschfläche einer einzelnen Alveole entspreche der einer Halbkugel. Auf der Außenseite wird sie von Blut umgeben, im Inneren befindet sich ein Gasgemisch. Die unterschiedlichen Sauerstoffkonzentrationen in beiden Bereichen seien konstant.

Gegeben: R , δ , A_{ges} , $C_{O_2,alv}$, $C_{O_2,blut}$, D_{O_2}

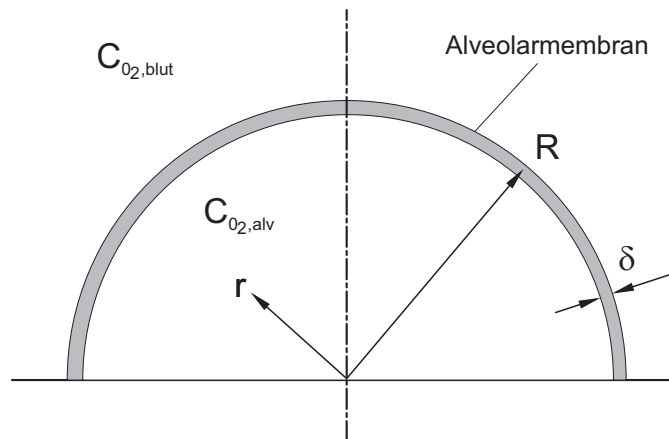


Abbildung 5.3: Alveolarer Gasaustausch

- Leiten Sie für einen stationären Fall mit konstantem Diffusionskoeffizienten D_{O_2} die Konzentrationsverteilung $C_{O_2}(r)$ des Sauerstoffs in der Alveolarmembran her.
- Bestimmen Sie den molaren Sauerstoffgesamtfluss W_{O_2} , der pro Zeiteinheit über die Gesamtaustauschfläche A_{ges} in den Blutkreislauf gelangt.

Hinweise:

- Kugeloberfläche: $A_{Kugel} = 4\pi R^2$, ($\delta \ll R$)
- Differentialgleichung der Konzentrationsverteilung der Komponente A in B:

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 D_{AB} \frac{\partial c_A}{\partial r} \right)$$

5.4 Oxygenator-Typen

5.4.1 Membranoxygenator

- a) Eine kreisförmige Kapillare eines Membranoxygenators ist geneigt und wird aufwärts von Blut (newtonsches Fluid) durchströmt. Über die Länge L darf ein maximaler Druckunterschied von Δp_{zul} auftreten.

gegeben: $\alpha, L, R, \delta, \eta_0, \rho, g, \Delta p_{zul}, c_{O_2,a}, c_{O_2,i}, D_{O_2,M}$

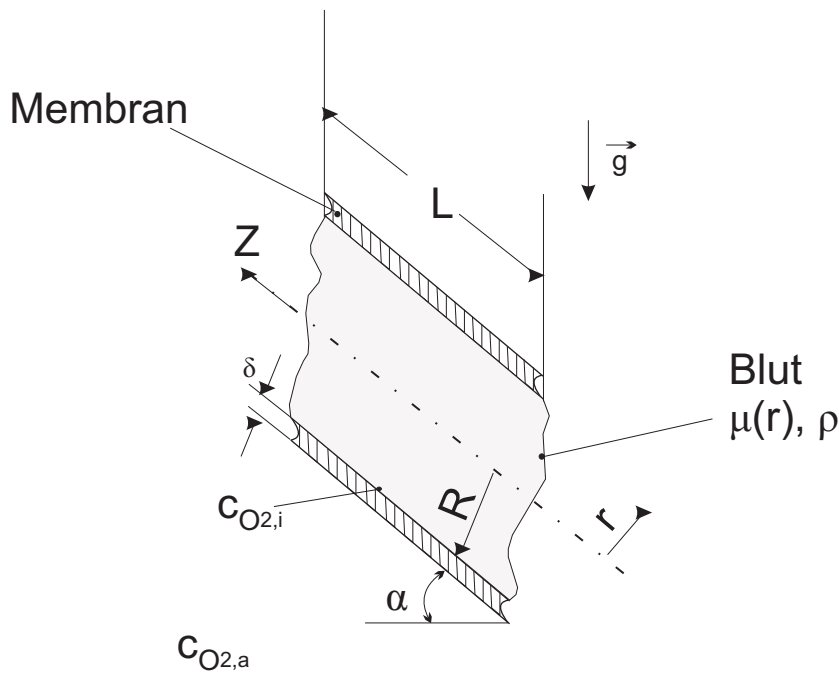


Abbildung 5.4: kreisförmige Kapillare eines Membranoxygenators

- i) Durch medikamentöse Zusätze stellt sich folgender Viskositätsverlauf ein:

$$\eta(r) = \eta_0 \cdot R / (r + R).$$

Bestimmen Sie für einen maximal zulässigen Volumenstrom die Geschwindigkeitsverteilung $u(r, z)$ in der voll ausgebildeten Blutströmung.

- ii) Berechnen Sie den maximal zulässigen Blutvolumenstrom.
 iii) Gegeben sei die Spezieserhaltungsgleichung:

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} + v_r \frac{\partial c_A}{\partial r} + v_z \frac{\partial c_A}{\partial z} = D_{AB} \left(\frac{\partial^2 c_A}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial c_A}{\partial r} + \frac{\partial^2 c_A}{\partial z^2} \right)$$

Geben Sie die Konzentrationsverteilung $c_{O_2}(r)$ des Sauerstoffs in der Membran an und begründen Sie kurz Ihre gemachten, plausiblen Vereinfachungen.

- iv) Wie groß ist der molare Gesamtteilchenstrom W_{O_2} des Sauerstoffs, der über die Länge L von der Membran ins Blut diffundiert?
- b) Eine kreisförmige Kapillare eines Membranoxygenators wird waagrecht von Blut durchströmt. Über die Länge L wird eine Druckdifferenz von Δp gemessen.

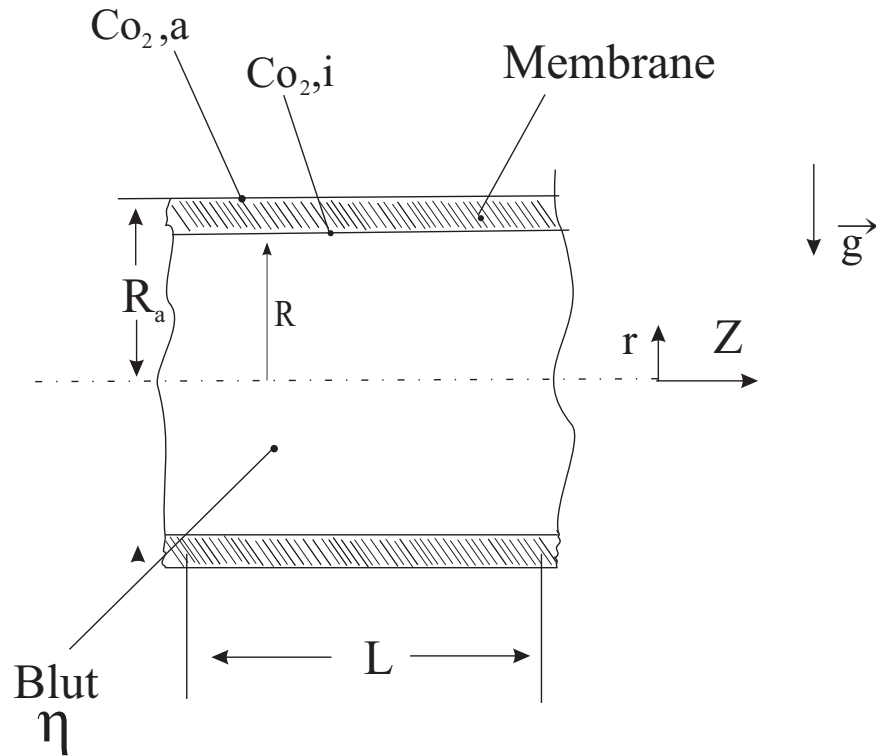


Abbildung 5.5: kreisförmige Kapillare eines Membranoxygenators

gegeben: L ; R ; R_a ; η ; τ_0 ; Δp ; $c_{O_2,a}$; $c_{O_2,i}$; $D_{O_2,M}$

Durch den Einfluss medikamentöser Zusätze wird das Blut als Bingham'sches Fluid angesehen.

Es gilt:

$$\tau = \pm \tau_0 - \eta \frac{du}{dr} \quad \text{für} \quad |\tau| \geq \tau_0$$

$$\frac{du}{dr} = 0 \quad \text{für} \quad |\tau| < \tau_0$$

- i) Berechnen Sie die Geschwindigkeitsverteilung $u(r, z)$ in der voll ausgebildeten Blutströmung.
- ii) Wie lautet die Bestimmungsgleichung für den Volumenstrom \dot{Q} der Blutströmung?
- iii) Bestimmen Sie die Konzentrationsverteilung $c_{O_2}(r)$ des Sauerstoffs in der Membran. Die Konzentrationen $c_{O_2,a}$ und $c_{O_2,i}$ seien konstant. Nutzen Sie hierfür die gegebene Spezieserhaltungsgleichung und begründen Sie

kurz ihre gemachten, plausiblen Vereinfachungen:

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} + v_r \frac{\partial c_A}{\partial r} + v_z \frac{\partial c_A}{\partial z} = D_{AB} \left(\frac{\partial^2 c_A}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial c_A}{\partial r} + \frac{\partial^2 c_A}{\partial z^2} \right)$$

- iv) Wie groß ist der molare Gesamtteilchenstrom W_{O_2} des Sauerstoffs, der über die Länge L von der Membran ins Blut diffundiert?
- c) Eine kreisförmige Kapillare eines Membranoxygenators wird entgegen der Richtung des Erdbeschleunigungsvektors von Blut durchströmt. Über die Länge L darf ein maximaler Druckverlust von Δp_{zul} auftreten.

gegeben: $L, R, R_a, \eta, \tau_0, \Delta p, c_{O_2,a}, c_{O_2,i}, D_{O_2,M}$

- i) Bestimmen Sie für einen maximalen zulässigen Volumenstrom die Geschwindigkeitsverteilungen $u(r, z)$ in der voll ausgebildeten Blutströmung. Das Blut ist als newtonsches Fluid anzusehen.
- ii) Berechnen Sie das pro Zeiteinheit an einer Stelle $z = const.$ vorbeifließende Blutvolumen.
- iii) Geben Sie die Konzentrationsverteilung $c_{O_2}(r)$ des Sauerstoffs in der Membran an. Nutzen Sie hierfür die gegebene Spezieserhaltungsgleichung und begründen Sie kurz ihre gemachten, plausiblen Vereinfachungen:

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} + v_r \frac{\partial c_A}{\partial r} + v_z \frac{\partial c_A}{\partial z} = D_{AB} \left(\frac{\partial^2 c_A}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial c_A}{\partial r} + \frac{\partial^2 c_A}{\partial z^2} \right).$$

- iv) Begründen Sie, ob es hinsichtlich der strömungsmechanischen Blutschädigung günstiger ist die Anzahl n der Kapillaren oder den Radius R zu erhöhen, um die Gasaustauschfläche mit dem Blut zu verdoppeln. Der Gesamtblutvolumenstrom soll hierbei unverändert bleiben.

5.4.2 Blasenoxxygenator

- a) In einem Blasenoxxygenator wird von den im Blut aufsteigenden Blasen Sauerstoff abgegeben. Nennen Sie vier Voraussetzungen, unter denen der Gasaustausch einer Blase mit dem eines Blutfilms im Filmoxygenator verglichen werden kann.
- b) In einem Blasenoxxygenator steigen Sauerstoffblasen mit dem Durchmesser D und mit einer konstanten Sauerstoffkonzentration c_{O_2} zur Anreicherung von venösem Blut mit der stationären Aufstiegs geschwindigkeit v_t auf.

Annahme: laminare Strömung, kugelförmige Blase, Sauerstoffkonzentration an der Kontaktfläche $c_{A0} = const.$, Eindringtiefe O_2 im Blut \ll Blasendurchmesser D

geg: Durchmesser D , v_t , $c_{A0} = c_{O_2}$ in der Gasblase konst., Diffusionskoeffizient $D_{AB} = D_{O_2\text{-Blut}}$

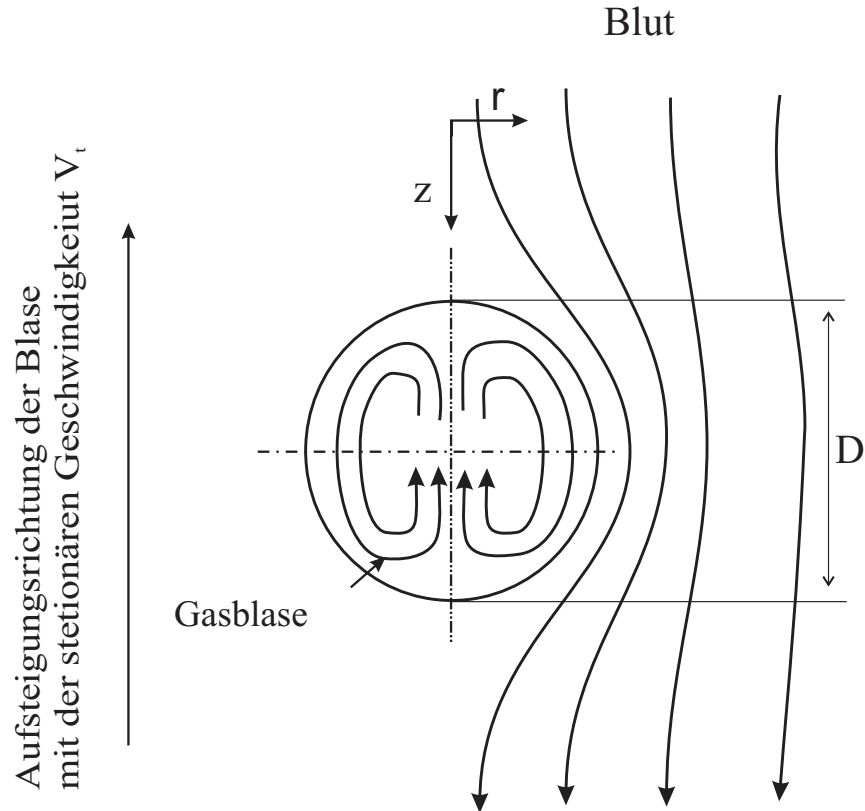


Abbildung 5.6: Sauerstoffblasen mit dem Durchmesser D in einem Blasenoxygenator

- i) Leiten Sie die Differentialgleichung für den Konzentrationsverlauf $c_A(x, z)$ ab und geben Sie die Randbedingungen an. Betrachten Sie das System vereinfacht als einen ebenen Filmoxygenator, bei dem bei $x = 0$ am Rand der Blase der Blutfilm beginnt und eine Filmdicke von σ hat.
- ii) Gegeben ist die Näherungslösung für den Konzentrationsverlauf

$$\frac{C_A}{C_{A0}} = 1 - \operatorname{erf}\left[\frac{x}{\sqrt{4D_{AB}z/v_t}}\right]$$

Leiten Sie den örtlichen Massenfluss N_A an der Oberfläche des Films ab.
gegeben:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\eta^2} d\eta \quad \text{mit} \quad \frac{d}{dx}(\operatorname{erf}(x)) = \frac{d}{dx}e^{-x^2}$$

- iii) Bestimmen Sie den Gesamtteilchenstrom, der von der Blase ans Blut abgege-

ben wird. Nehmen Sie dazu an, dass die Kugeloberfläche vereinfacht als seitliche Mantelfläche eines Würfels mit der Kantenlänge D angenähert werden kann.

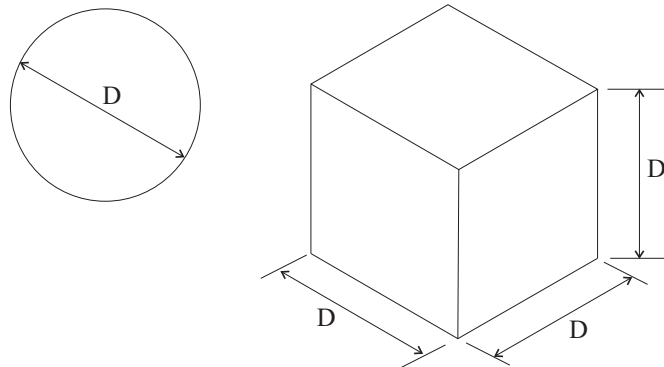


Abbildung 5.7: Die Kugeloberfläche können als seitliche Mantelfläche eines Würfels mit der Kantenlänge D angenähert werden

- iv) Zeigen Sie rechnerisch den Zusammenhang der sekundlich ins Blut eingebrachten Gesamtmenge an Sauerstoff in Abhängigkeit vom Blasendurchmesser. Der Gasvolumenstrom sei konstant $\dot{Q} = V_t N D^3 / H$ (N =Anzahl der Blasen, H =Höhe des Behälters). Weiterhin wird für kleine Gasblasen angenommen, dass deren stationäre Aufstiegeschwindigkeit proportional zum Blasendurchmesser ist: $v_t \sim kD$. Skizzieren Sie den funktionalen Zusammenhang.

5.4.3 Filmoxygenator

- a) Beschreiben Sie die Blutströmung in den zwei skizzierten Filmoxygenatoren, von denen der Eine platten- und der Andere zylinderförmige Elemente hat. Die Wände sind gasundurchlässig.

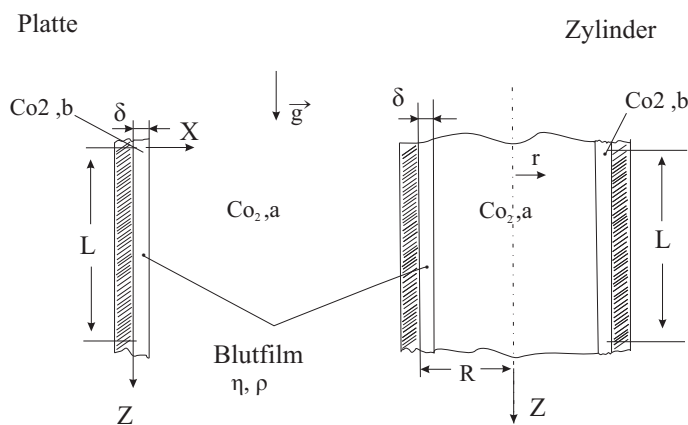


Abbildung 5.8: Filmoxygenatoren

Zu Beginn der Wegstrecke L betrage die Sauerstoffkonzentration des Blutes $c_{O_2,b}$. gegeben: R ; δ ; η ; ρ ; g ; $c_{O_2,b}$; $D_{O_2,B}$

- i) Bestimmen Sie die Geschwindigkeitsverteilungen $u(x, z)$ und $u(r, z)$ im Blutfilm

für die voll ausgebildete Strömung.

Das Blut ist als newtonsches Fluid anzusehen.

- ii) Um welchen Faktor unterscheidet sich die maximale strömungsmechanische Belastung des Blutes im Zylinder von der an der Platte?
- iii) Leiten Sie die Differentialgleichung für die Konzentrationsverteilung $c_{O_2}(r, z)$ des Sauerstoffs im Blutfilm für den Fall des zylinderförmigen Oxygenators her. Geben Sie die Anfangs- und Randbedingungen unter der Annahme plausibler Vereinfachungen an.

6 Bionik und Messsysteme

6.1 Allgemeine Fragen zur Strömungssimulation

- a) Nennen Sie mindestens vier Ziele der technischen Strömungssimulation.
- b) Nennen Sie mindestens sechs Vorgaben zur technischen Modellierung.
- c) Erklären Sie physikalische Ähnlichkeit.
- d) Erklären Sie die Begriffe Dimension, Einheit und relatives Maß.
- e) Was ist eine Kenngröße?
- f) Nennen Sie die Definitionen für folgende Kennzahlen:
 - i) Euler-Zahl, Eu ;
 - ii) Reynold-Zahl, Re ;
 - iii) Strouhal-Zahl, Sr .
 - iv) Was besagt das Buckingham'sche Pi-Theorem?

6.2 Messverfahren

- a) Welches sind die wesentlichen Grundzüge der Particle-Image Velocimetry?
- b) Erläutern Sie das Funktionsprinzip der Particle-Image Velocimetry. Nennen Sie dabei insbesondere die fünf wesentlichen Grundelemente.
- c) Wo liegen die wesentlichen Unterschiede zwischen Particle-Image Velocimetry und Laser-Doppler Anemometrie?
- d) Im Rahmen einer Untersuchung soll das globale Geschwindigkeitsfeld im Nachlauf einer künstlichen Herzklappe in Abhängigkeit von der Klappenstellung untersucht werden. Welches der beiden obigen Messverfahren wählen Sie? Begründen Sie Ihre Wahl.

6.3 Biologische Strömungsanpassung

- Aus welchen Anteilen setzt sich der Gesamtwiderstand eines umströmten Körpers zusammen? Erläutern Sie die Ursachen dieser einzelnen Widerstandsanteile.
- Skizzieren Sie für eine umströmte Kugel in einem Diagramm grob den Verlauf des dimensionslosen Widerstandsbeiwertes c_w über der Reynolds-Zahl Re als Funktion $c_w = f(Re)$ für den Übergang vom unterkritischen zum überkritischen Bereich. Erläutern Sie den Grund für die plötzliche Änderung bei $Re = 4.1 \cdot 10^5$.
- Skizzieren Sie eine widerstandsoptimierte Körperform für Kleinstlebewesen (z.B. Geiseltierchen). Hinweis: schleichende Strömung
- Welche Mechanismen aus der Natur sind Ihnen bekannt, die zu einer Verringerung des Reibungswiderstandes bei umströmten Körpern führen können. Erläutern Sie auch grob die Funktionsweise der Mechanismen.
- Skizzieren Sie grob die ungewöhnliche Form des Kopfes eines Eis-Pinguins und den Effekt, der zu einer Verringerung des Widerstandes führt.
- Auf welchen Prinzipien basieren verschiedene Sensor-Systeme aus der Biologie, die mit Strömungen verbunden sind. Nennen Sie zwei dieser Sensor-Systeme und beschreiben Sie deren Funktionsweise.
- Beschreiben Sie grob die Form des Innenohrs und die physikalische Funktionsweise des Ohres bei der Unterscheidung verschiedener Tonfrequenzen.
- Ein Beispiel für die biologische Optimierung stellt das Verzweigende Rohrsystem der Atemwege oder der Blutwege von den großen Gefäßen bis zu den Kapillaren dar. Beschreiben Sie den Weg, wie das universelle Durchmessergesetz $D_i = D_0 \sqrt[3]{\frac{1}{z}}$ hergeleitet werden kann.

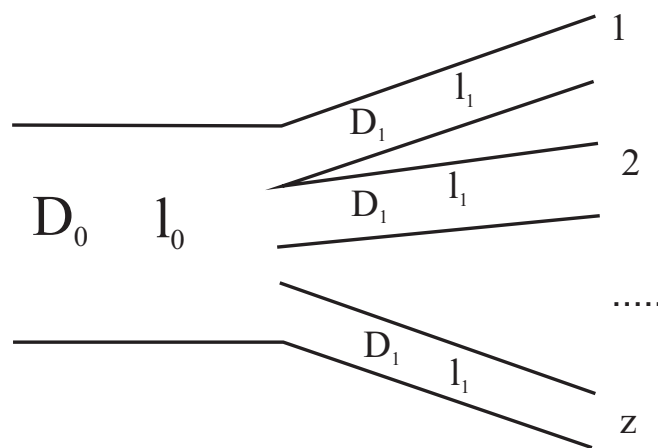


Abbildung 6.1: Verzweigende Rohrsystem der Atemwege

6.4 Vogelflug

- a) Für die Untersuchung der Strömung über einen Vogelflügel im Gleitflug sollen Windkanaluntersuchungen durchgeführt werden. Der Vogel besitzt eine Fluggeschwindigkeit von $u_\infty = 10 \text{ m/s}$ und eine Flügeltiefe von $l = 0.1 \text{ m}$. Welche Reynoldszahl liegt im Original und im Windkanal vor, wenn vorausgesetzt wird, dass ein Modell im Maßstab 1 : 1 verwendet wird, und dass Flügel bzw. Modell in beiden Fällen von Luft mit der Temperatur $T = 25^\circ \text{ C}$, der Dichte $\rho = 1.184 \text{ kg/m}^3$ und der dynamischen Viskosität $\rho = 1.8155 \cdot 10^{-5} \text{ kg/(m} \cdot \text{s)}$ umströmt wird?
- b) Für Detailuntersuchungen sollen mit dem gleichen Modell Messungen in einem Wasserkanal durchgeführt werden. Welche Anströmgeschwindigkeit ist einzustellen, damit weiterhin Reynoldszahl-Ähnlichkeit vorliegt?

Hinweis:

- Dynamische Viskosität von Wasser bei $T = 25^\circ \text{ C}$: $\eta = 0.891 \cdot 10^{-3} \text{ kg/(m} \cdot \text{s)}$
- Dichte von Wasser bei $T = 25^\circ \text{ C}$: $\rho = 997 \text{ kg/m}^3$

7 Musterlösung-Herz

7.1 ML-Allgemeine Fragen zum Herzmechanik

a) Siehe Abbildung 7.1

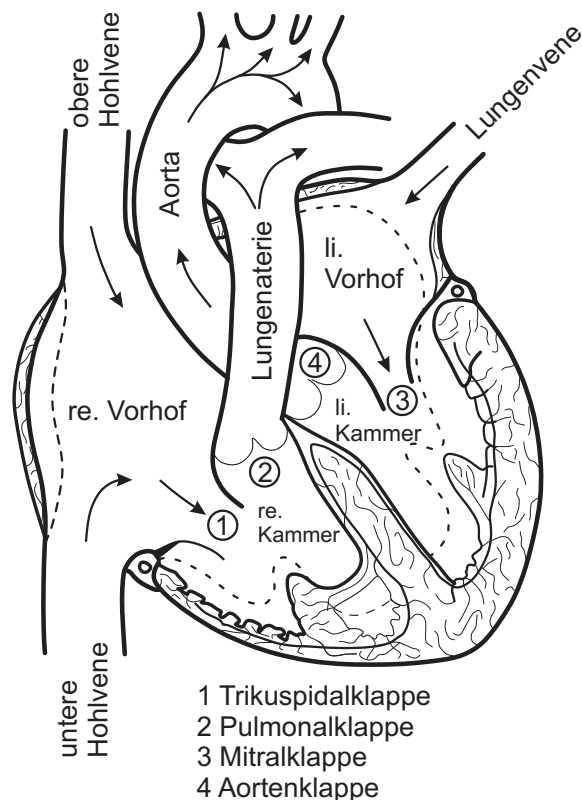


Abbildung 7.1: Skizze des menschlichen Herzens

- b) das Herz ist zuständig dafür, das Blut durch den Körper zu pumpen und somit die Versorgung aller Organen zu sichern. Technisch betrachtet, beschreibt man das Herz als ein diskontinuierlich arbeitender Motor mit Synchron und doppeltwirkender Verdrängungspumpe. Der Pumpenvorgang setzt sich zusammen aus drei aufeinander folgenden Phasen:
- Diastole (Entspannungsphase) → Füllung der Vorhof
 - Anspannungsphase
 - Systole (Kontraktion) → Austreibungsphase

Insgesamt besteht das Herz aus vier großen Höhlen und vier Klappen:

- Zwei Vorhöfe (LA, RA)
- Zwei Kammer (LV, RV)
- Zwei Segelklappe (TK, MK)
- Zwei Taschenklappe (PK, AK)

c) Siehe Abbildung 7.2

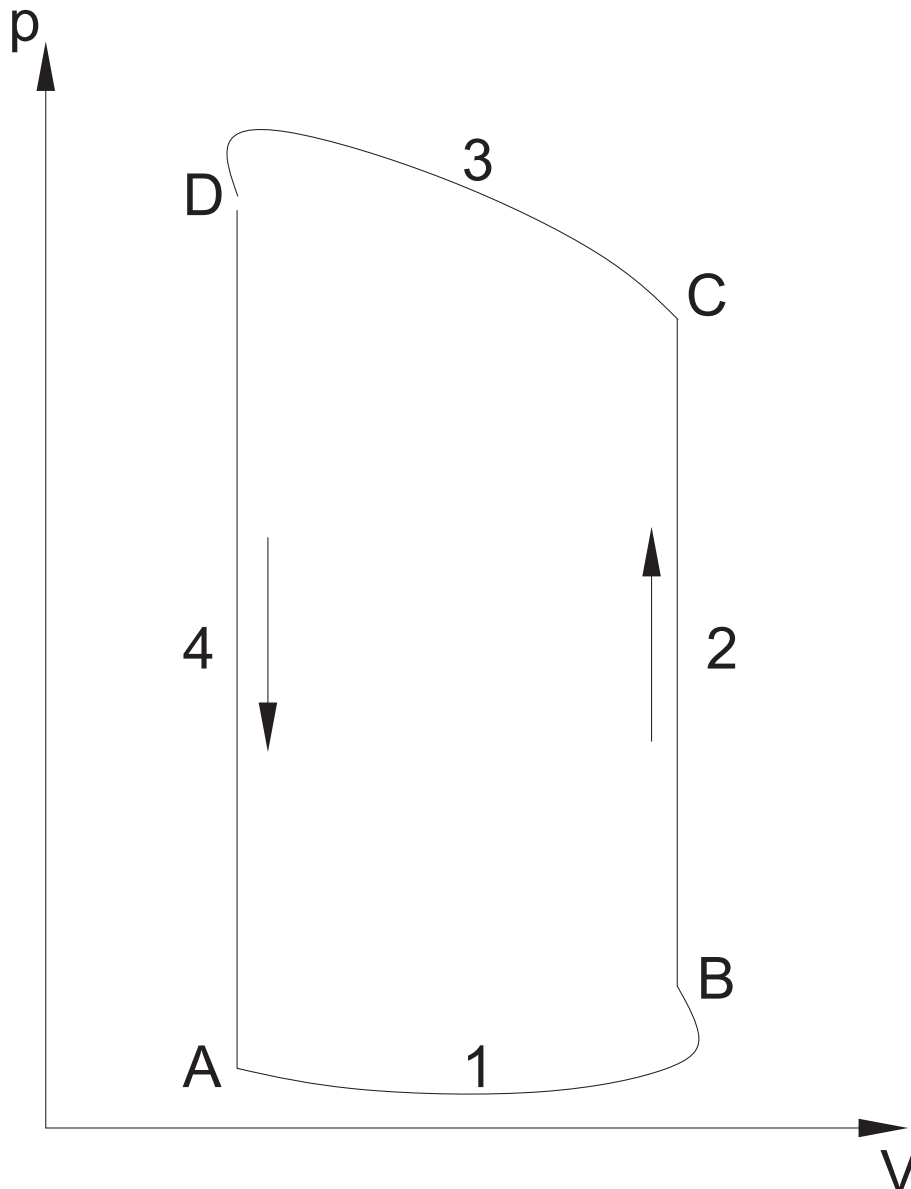


Abbildung 7.2: Druck-Volumen-Diagramm der linken Herzkammer

- d)
- Kammerdruck, bei dem Aortenklappe öffnet: $p_{AKO} \approx 80$ mmHG
 - Kammerdruck, bei dem Aortenklappe schließt: $p_{AKS} \approx 120$ mmHG

e) Aktivierungsfunktion: $F_a(t) = A \cdot S'(L_c) \cdot f_a(t)$ mit

- A : Aktivierungsfaktor, abhängig von chemischen und nervalen Einflüssen.
- $S'(L_c)$: Längenfaktor, Zusammenhang zwischen Vordehnung und Kontraktionskraft, spiegelt den Frank-Starling-Mechanismus wieder.
- $f_a(t)$: periodische Aktivierungskraft, $0 \leq f_a(t) \leq 1$.

Siehe Abbildung 7.3

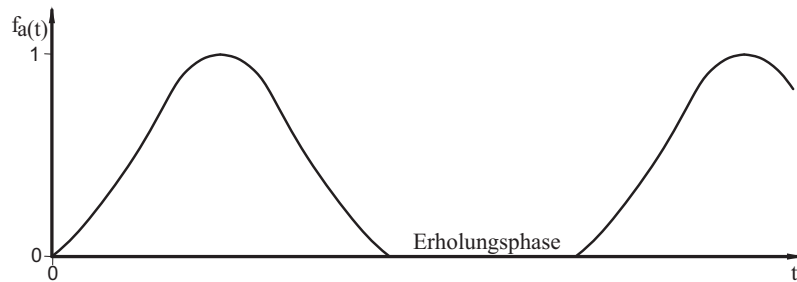


Abbildung 7.3: Aktivierungsfunktion des Herzmuskels

- f) Herz: 100%
Lunge: 100%
Herzkranzgefäße: 5%
Gehirn: 15%
Nieren: 20%
Eingeweide: 35%
Muskeln: 15%
Haut und Skeletten: 10%

7.2 ML-Autoregulation des Herzens

7.2.1 ML-pV-Diagramm des Herzens 1

- a) Beschriftung der Kurven: siehe Diagramm (Abb. 7.4)
- b) Kurve der Maxima der Unterstützungszuckungen: siehe Diagramm (Abb. 7.4)
- c) Arbeit des linken Ventrikels: siehe Diagramm (Abb. 7.4)
- d) Neuer Gleichgewichtszustand und Zwischenzustand: siehe Diagramm (Abb. 7.4)
- e) Sympathikusstimulation: Die Kurven der isovolumetrischen Maxima und der Maxima der Unterstützungszuckungen werden steiler: siehe Diagramm (Abb. 7.4)

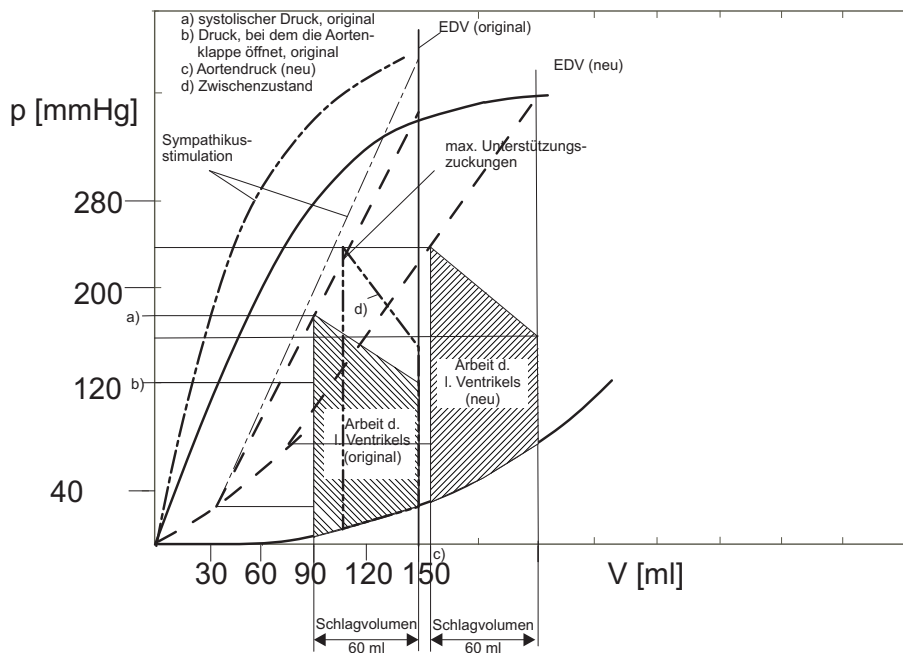


Abbildung 7.4: ML- pV-Diagramm des Herzens

7.2.2 ML-pV-Diagramm des Herzens 2

- a) Verringerung des peripheren Widerstands.
- b) Beide Kurven werden steiler: siehe Diagramm (Abb. 7.5)
- c) Bei höherem Herzminutenvolumen: siehe Diagramm (Abb. 7.5)
- d) : siehe Diagramm (Abb. 7.5)
- e) : $P = 7 \text{ mmHg}$: siehe Diagramm (Abb. 7.5)
- f) : siehe Diagramm (Abb. 7.5)
- g) Auswirkungen auf den arteriellen Blutdruck:
 - i) Blutvolumen im Kreislauf steigt \rightarrow arterieller Blutdruck steigt
 - ii) Venenkapazität steigt \rightarrow arterieller Blutdruck sinkt
 - iii) Ventrikeldehnbarkeit steigt \rightarrow arterieller Blutdruck steigt (Frank-Starling)
 - iv) Coronardurchblutung steigt \rightarrow arterieller Blutdruck steigt (Steigung der Schlagkraft, größeres Herzminutenvolumen)
 - v) Sinusfrequenz steigt \rightarrow arterieller Blutdruck steigt (schnellere Kontraktion)
 - vi) peripherer Widerstand steigt \rightarrow arterieller Blutdruck steigt

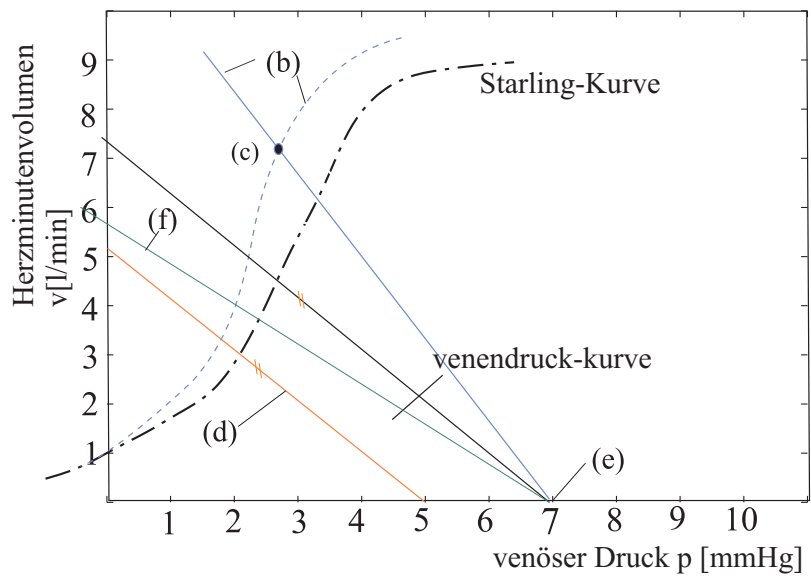


Abbildung 7.5: ML- pV -Diagramm des Herzens bei Frank-Starling-Mechanismus

7.2.3 ML-Kurvenveränderungen

- a) i) Siehe Abbildung 7.6
 ii) Siehe Abbildung 7.6

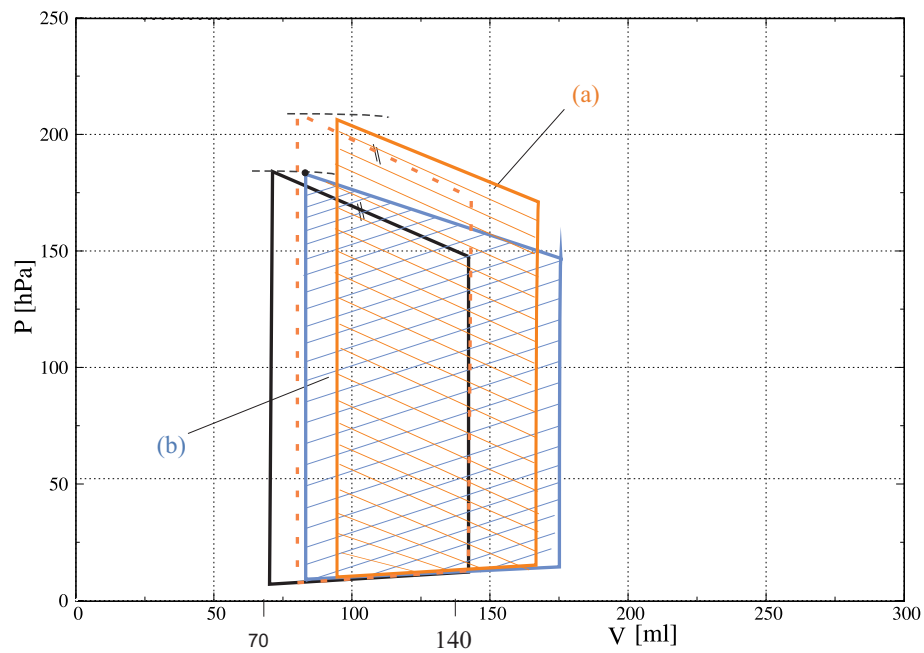


Abbildung 7.6: Kurvenveränderungen für den Fall einer Aortenklappen-Stenose/ - Insuffizienz

7.3 ML-Herzklappen

a)

- Schubspannungsgrenzwerte einhalten
- Belastungszeiten kurz halten
- Wandwechselwirkungen möglichst gering halten
- Strömungsablösungen vermeiden
- Diskontinuitätsflächen vermeiden

b)

- Quetschungen am okkludierten Schlauch
- Wandkontakt
- hohe Schubspannungen am Rolleneingriff

c) Die Lebensdauer von eigenen und auch Spendererythrozyten unterliegt hoher Streuung und kann stark verkürzt sein.

Untersucht wurde dies mit ^{51}Cr -markierten Präparaten als Spenderblut.

Hämolyse kann auftreten bei Materialkontakt, Rückstrom in Nahtundichtigkeiten, durch Quetschung in Bereichen hoher Schubspannung im unphysiologischen Strömungsbild.

d) i) Aortenklappeninsuffizienz: Klappe schließt nicht vollständig.
Aortenklappenstenose: Klappe öffnet nicht vollständig.

ii) Aortenklappeninsuffizienz:

- Rückstrom im LV \rightarrow Verlustarbeit des Herzens
- Ausgleich durch Erhöhung des Schlagvolumens des LV und schnellere Austreibung
- Volumenbelastung des LV \rightarrow Vergrößerung des LV-Volumens
- Ungünstige Spannungsverhältnisse zur Erreichung eines bestimmten Ventrikeldruckes im Herzmuskel \Rightarrow Vergrößerung des Herzmuskels \Rightarrow Kompensierter Klappenfehler
- Versorgung des größeren Herzmuskels nur in gewisser Grenze möglich, da Herzkranzgefäße nicht vermehrbar sind.
 \Rightarrow Mangelversorgung
 \Rightarrow Dekompensierter Herzklappenfehler
- Schnellerer Druckabfall in Aorta durch Rückstrom
 \Rightarrow Schlechtere Perfusion der Koronargefäße
 \Rightarrow Mangelversorgung

Aortenklappenstenose:

- Höherer Druckverlust muss durch LV überwunden werden \rightarrow Druckbelastung des LV
- Vergrößerung des Herzmuskels, Koronargefäße nicht vermehrbar

- Mangelversorgung des Myocards

- iii) Stair Edwards-Klappe: Kugelklappe
 Bjork-Shirley Klappe: Kippscheibenklappe
 Öffnungswinkel normal: 60°
 plan-konvex: 70°
 konkav-konvex: 90°
 Siehe Abbildung 7.7 und 7.8

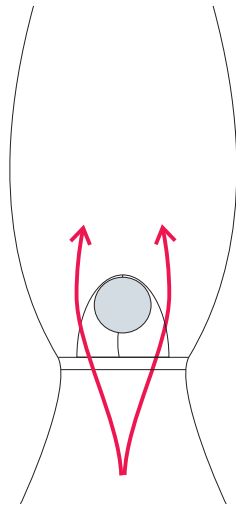


Abbildung 7.7: *Kugelklappe*

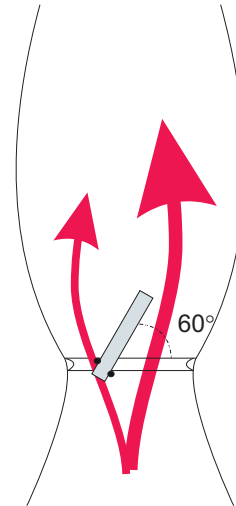


Abbildung 7.8: *Kippscheibenklappe*

- iv)
- Thromboembolie
 - Prothesendysfunktion
 - Hämorrhagie
 - Spätendokarditis (Entzündung)

e) Biologischer Klappenersatz:

Vorteile:

keine Hämolyse, keine Geräusche, keine Dauerantikoagulation

Nachteile:

Verschleiß, Verkalkung

f) Vorteil großer Öffnungswinkel:

- geringerer Druckverlust
- weniger Ablösung
- kleineres Totwassergebiet

Nachteil großer Öffnungswinkel:

- erhöhter Rückstrom bei Klappenverschluss

Beide Effekte lassen sich durch eine gewölbte Klappe positiv beeinflussen.

g) Taschenklappen:

- Pulmonalklappe: rechtes Ventrikel - Pulmonalarterie
- Aortenklappe: linkes Ventrikel - Aorta

Segelklappe:

- Mitralklappe: linker Vorhof - linkes Ventrikel
- Trikuspidalklappe: rechter Vorhof - rechtes Ventrikel

h) In der Austreibungsphase kann man die Strömungsverhältnisse als quasistationär betrachten. Vereinfachungen:

- Wassermodell möglich (nur 2D-Betrachtung)
- nur geometrische Ähnlichkeit wichtig
- gleichbleibende Reynoldszahl

i) Siehe Abbildung 7.9

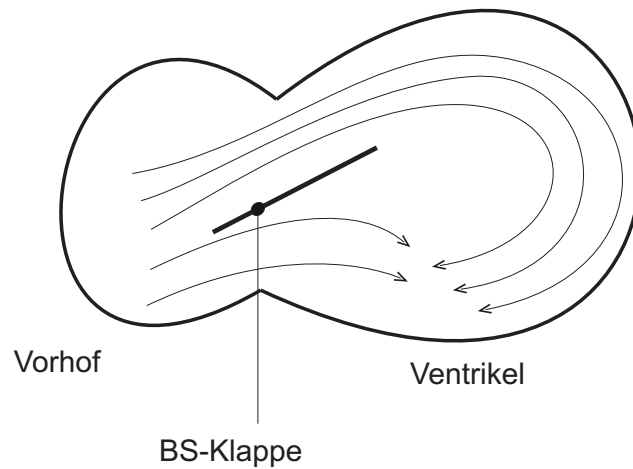


Abbildung 7.9: Strömungsbild in Fall einer Björk-Shiley-Prothese)

j) Vorteil:

- größerer Öffnungsquerschnitt
- geringer Druckabfall
- größerer Volumenstrom

Nachteil:

- hoher Rückstrom
- geringes Rückstellmoment

Maßnahme:

- gekrümmte Klappen

k)

- geometrische Ähnlichkeit
- Re-Zahl
- dimensionslose Frequenz der pulsierenden Strömung
- Dichteverhältnis
- Volumen und -Druckverläufe
- elastische Eigenschaften der Werkstoffe → Wellenausbreitung

In der Austreibungsphase kann man die Strömungsverhältnisse als quasistationär betrachten.

Vereinfachungen:

- Wassermittel möglich (nur 2D-Betrachtung)
- nur geometrische Ähnlichkeit wichtig
- gleichbleibende Reynoldszahl

l) dreidimensionale Modelle:

- Druckverteilung

- Geschwindigkeitsfeld
- Totwassergebiete
- Kräfte auf Ventilsitz
- Öffnungsseite
- Verlustleistung

Wasserwanne:

- Verwirbelungen
- Geschwindigkeitsverteilung
- Staupunkte / Totwassergebiete

m)

- Schubspannungsgrenzwert nicht überschreiten
- Belastungszeit so gering wie möglich
- Wandwechselwirkung so gering wie möglich
- Strömungsablösung vermeiden
- Diskontinuitätsflächen vermeiden

n) i) Siehe Abbildung 7.10

ii) Siehe Abbildung 7.10

iii) Siehe Abbildung 7.10

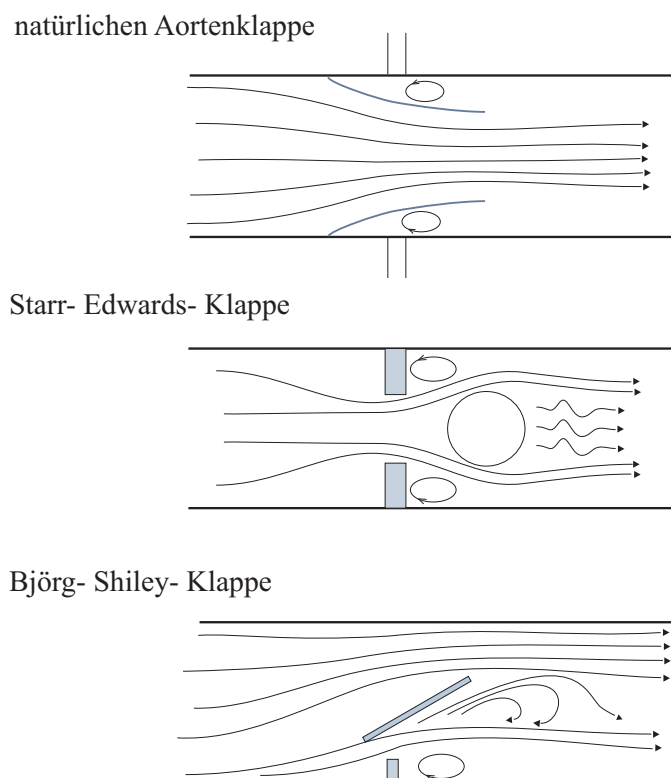


Abbildung 7.10: *Stromlinienverlaufen im fall von verschiedebnen Herzklappen*

7.4 ML- Maxwell'sches Herzmuskelmodell

a) Herzmuskelmodell: Siehe Abbildung 7.11

Einzel-Einflüsse auf Druckänderungsgeschwindigkeit in der Herzkammer:

- K_S, C_S : serienelastische Konstanten
- A : Aktivierungsfaktor
- S_{Lc} : Längenfaktor, Einfluss der Vordehnung auf Kontraktionskraft, Frank-Starling-Mechanismus
- $f_a(t)$: periodische Aktivierungskraft (0 bis 1)
- a, b, g : Dämpfungsbeiwerte

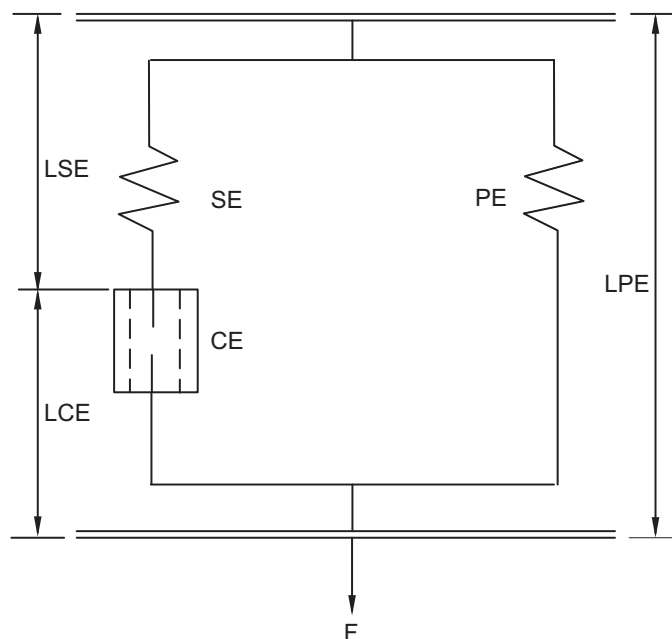


Abbildung 7.11: Schematische Darstellung des Herzmuskelmodells

Elemente des Herzmuskelmodells:

- SE: serienelastisches Element, rasche Längenänderung
- PE: parallelelastisches Element, Mechanik der Kammerdehnung
- LPE: Länge des PE
- LSE: Länge des SE
- CE: kontraktiles Element, Kraft-Geschwindigkeit

b) Anwendungsgebiete zur Herzmechanik:

Grundlagenforschung in Physiologie und Pathophysiologie; Grundlagenforschung mittels mathematischer Simulation von Herz- und Kreislaufdynamik; Entwicklungsbegleitende mathematische Simulation der Wirkung mechanischer, besonders pulsierend arbeitender, Therapieverfahren (z.B. intraaortale Ballon-Pulsation (IABP), Gegenpulsationsverfahren, Blupumpen); Steuerung von Antrieben zur entwicklungsbeglei-

tenden technischen Simulation der Wirkung mechanischer, besonders pulsierend arbeitender, Therapieverfahren (z.B. intraaortale Ballon-Pulsation (IABP), ..., Pumpen); Diagnostik: Entwicklung, Durchführung und Bewertung von Kontraktilitätsmessungen (dp/dt)/Wandbewegungsmessungen, z.B. mittels Ultraschall; Entwicklung mit Testung und Anwendung von Pharmaka; Mechanische Therapie-Verfahren; Technische Forschung + Qualitätssicherung: Steuerung und Regelung technischer Antriebe zum Studium pulsierend durchströmter Geräte und Implantate (z.B. Herzklappenprothesen).

7.5 ML-Kreislaufhämodynamik

- a)
- Strömung in elastischer, aktiv-kontrahierbarer Wandung
 - Gefäßsystem stark verzweigt → Strömung kann sich nicht voll ausbilden
 - Blut ist ein nichtnewtonsches Fluid
 - Änderung der mechanischen Eigenschaften des Gefäßsystems
- b) Siehe Abbildung 7.12

Erhöhung der Herzschlagfrequenz geht hauptsächlich auf Kosten der Diastolendauer. Damit eine schnelle Füllung sichergestellt ist, unterstützen zwei Mechanismen: Vorhofkontraktion, Ventilebenenmechanismus.

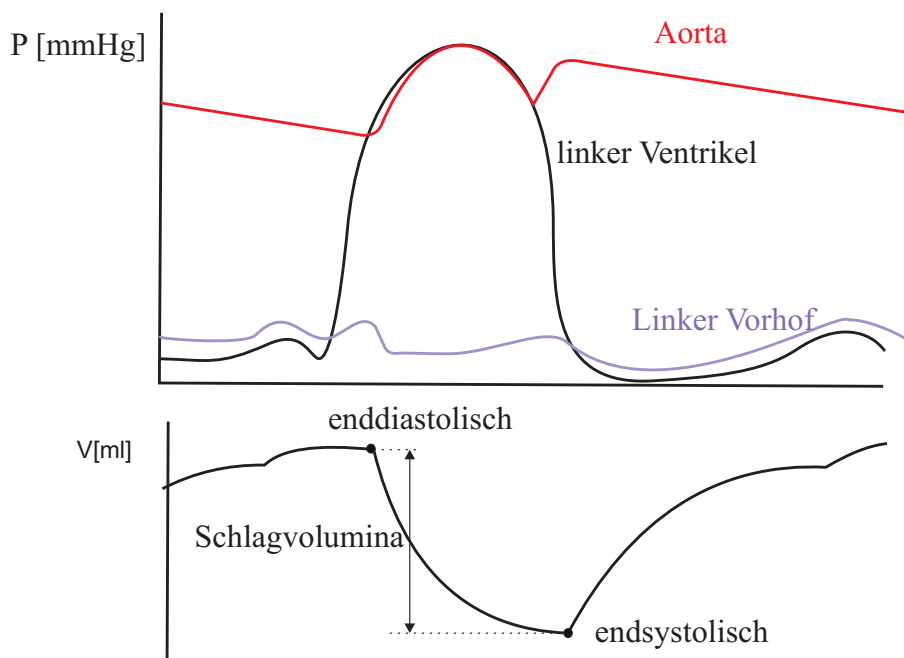


Abbildung 7.12: Verlauf der Systolendauer und der Diastolendauer in Abhängigkeit von der Schlagfrequenz des Herzens

- c) Durch Frank-Starling Mechanismus
d) Frank-Starling Mechanismus:

- Aufgabe: Anpassung des Herzens an unterschiedliche Füllungsgrade (venöser und pulmonaler Zustrom) und unterschiedliche Arteriendrucke autonom durch die Änderung der Vordehnung der Kammerwand (Ruhedehnung). Eine wichtige Aufgabe des Frank-Starling-Mechanismus ist es, die Schlagvolumina der beiden Herzkammern hinreichend verzögerungsarm einander anzugleichen. Damit werden durch den Frank-Starling-Mechanismus in der Lunge sowohl ein Stau (Lungenödem) als auch Leerpumpen vermieden.
- Funktion:
 - Beim schlagenden Herzen steigt der Ventrikeldruck während der Anspannungsphase so lange isovolumetrisch an (alle Klappen sind geschlossen), bis der arterielle Druck erreicht ist und sich die arteriellen Klappen öffnen.
 - Damit beginnt die Austreibung des Schlagvolumens. Die dabei geleistete Arbeit wird im p-V-Diagramm näherungsweise durch ein Parallelogramm beschrieben.
 - Erhöht sich die Füllung, so verschiebt sich der Beginn der Anspannungsphase auf der Ruhedehnungskurve nach rechts. Dadurch erhöhen sich Schlagvolumen und Kammerarbeit (für jeden Ventrikel einzeln!).
 - Erhöht sich der arterielle Druck, so öffnet sich die arterielle Klappe erst bei entsprechend höherem Kammerdruck. In der Übergangsphase wird dadurch das Schlagvolumen verringert.
 - Das endsystolische Kammervolumen bleibt etwas größer. Die folgende diastolische Füllung schiebt daher den Beginn der Anspannungsphase im p-V-Diagramm nach rechts.
 - Das Schlagvolumen normalisiert sich trotz erhöhten arteriellen Druckes, die Schlagarbeit steigt an.
 - Eine Erhöhung der Kontraktilität des Herzmuskels (positiv inotroper Effekt, z.B. des Sympatikus) verschiebt u.a. die isovolumetrischen Maxima. Dadurch kann das Herz gegen einen höheren Druck arbeiten u/o auf Kosten des endsystolischen Volumens ein größeres Schlagvolumen auswerfen.
 - Während eine unterschiedliche Vordehnung des Herzmuskels nur die Kraft des Herzmuskels beeinflusst, ändert sich die Kontraktionsgeschwindigkeit des Herzmuskels durch die inotrope Wirkung des Noradrenalins (Hormon des Nebennierenmarks) oder durch eine erhöhte Herzfrequenz (Frequenz-Inotropie).

e) Siehe Abbildung 7.13

- A Öffnen der Mitralklappe
- 1 Kammerfüllung, Diastole
- B Schließen der Mitralklappe
- 2 Isovolumetrische Kontraktion
- C Öffnen der Aortenklappe
- 3 Kammerentleerung, Systole (auxotone Kontr.)
- D Schließen der Aortenklappe

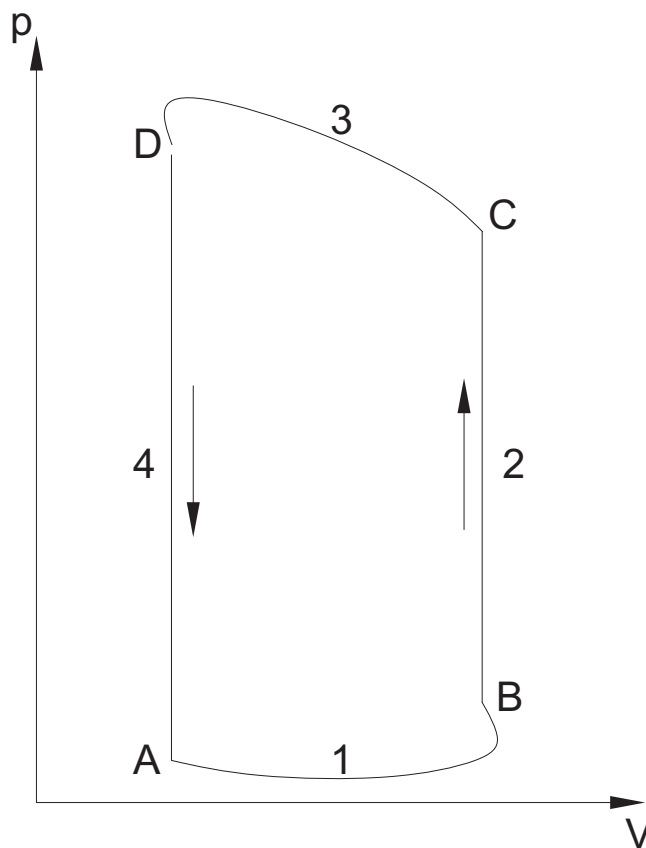


Abbildung 7.13: *Druck-Volumen-Diagramm der linken Herzkammer*

- 4 Isovolumetrische Entspannung

f) Frank-Starling-Mechanismus beschreibt:

die heterometrische Autoregulation des Herzens.

die Selbstregulation des Herzens auf geänderte Zustände in Zuführungsgefäßen

Ruhedehnungskurve:

Messen des Druckes im linken Ventrikel bei verschiedenen Füllungen und entspanntem Herzmuskel.

isometrische Maxima:

Von verschiedenen Punkten der Ruhedehnungskurve wird bei verschlossener Aorta ($V = konst.$) der Herzmuskel kontrahiert und der Druck im linken Ventrikel gemessen.

isotonische Maxima:

Von verschiedenen Punkten der Ruhedehnungskurve wird der Herzmuskel bei konstantem Druck im linken Ventrikel kontrahiert und das Ventrikelvolumen gemessen.

g) i) siehe Abbildung 7.14

ii) Rechter Ventrikel: Dünnwandige Muskulatur, die den linken Ventrikel teilweise umschließt

Linker Ventrikel: starke Muskulatur \Rightarrow bei geringem Vorhofdruck schon große

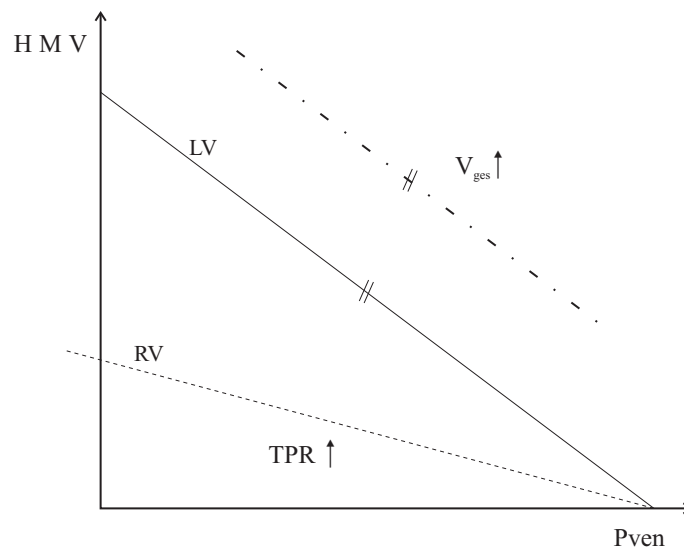


Abbildung 7.14: Herzminutenvolumen als Funktion des Blutdrucks im rechten und linken Ventrikel

Faserdehnung des rechten Ventrikels
 ⇒ großes Füllvolumen bzw. steilerer Kurvenverlauf.

h) Windkesselfunktion:

- Während der Systole wird die elastische Aorta geweitet (nimmt Blutvolumen auf)
- Während der Diastole stellt sie sich zurück und gibt die Energie wieder ans Fluid ab (pumpt weiter)

→ Gleichmäßige Strömung, geringere Beschleunigungsarbeit

Arteriosklerotisch: Steifere Aortenwand

→ höhere Pulsationen, die an Kreislauf weitergegeben werden

→ höhere Beschleunigungsarbeit vom Herzen zu leisten

i) Ventilebenenmechanismus:

Während Systole: Ventilebene wird als Reaktion auf Ventrikelkontraktion nach unten gezogen → Füllung der Vorhöfe

Nach Erschlaffen der Ventrikel: Ventilebene geht nach oben → Ventrikel werden über das Blut in den Vorhöfen „gestülpt“

Vorhofkontraktion:

Enddiast. Kontraktion der Vorhöfe zur Erhöhung des Druckunterschiedes Vorhof/Ventrikel.

bei hohen Frequenzen kommen den Mechanismen besondere Bedeutung zu.

j) Barorezeptor:

- Druckmessung über Messung der Umfangsänderung der Halsschlagader → Einfluss auf Schlagkraft (Regelkreis)
- Nur kurzfristige Störungen werden reguliert.

k) Siehe Abbildung 7.15

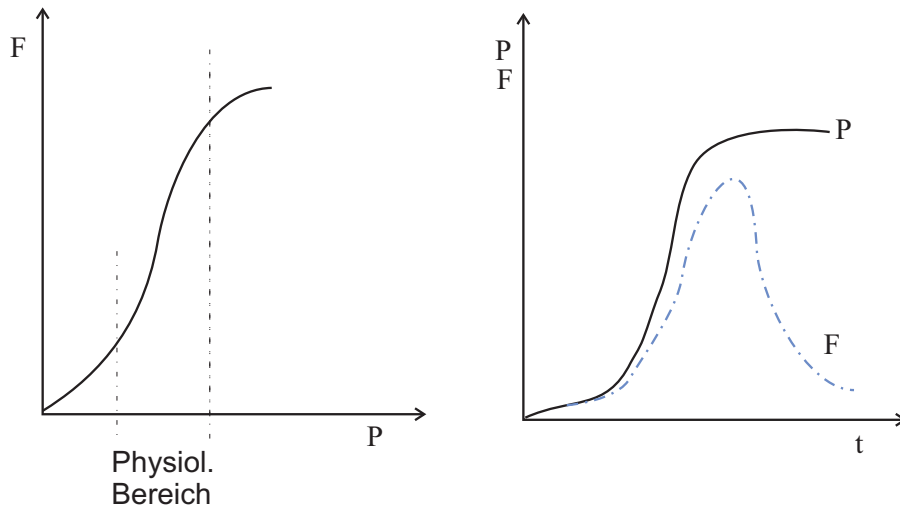


Abbildung 7.15: Reizfrequenz-Verlauf in Abhängigkeit von Blutdruck und Zeit

- 1) Rechte Ventrikelmuskulatur:
Spiralförmig, membranartig ums Herz → eher Längskontraktion
- Linke Ventrikelmuskulatur:
Eher ringförmig, viel kräftiger → eher Ringkontraktion

8 Musterlösung-Blut

8.1 ML-Allgemeine Fragen zum Blut

- a)
- invasive Blutdruckmessung (Z.B. Schlauchkatheter)
 - nicht-invasive Messung (Z.B. Riva-Rocci und Korotkoff Methode)

Bei der Methode nach Riva-Rocci und Korotkoff wird eine Manschette am Oberarm angelegt und aufgeblasen bis die Arterie vollständig verschlossen ist (Manschetten-
druck oberhalb des Systolischen Druckes). Mit Hilfe eines Stethoskops wird die Arterie in Armbeuge abgehört. Man lässt den Druck in der Manschette langsam ab. beim langsamen Ablassen wird ab einem bestimmten Punkt ein Geräusch wahrgenommen. Dieses entsteht durch das schwingen des Blutes ab dem systolischen Druck (Punkt A). Der Punkt wo das Geräusch verschwindet, entspricht dem diastolischen Druck (Punkt B). Siehe Abbildung 8.1

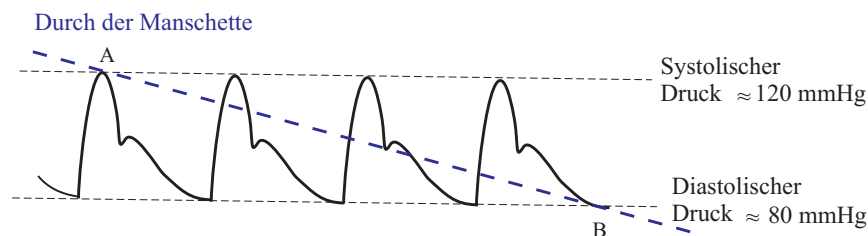


Abbildung 8.1: Arterielle Blutdruck

- b)
- Transportfunktion: Transport von Zellen, Wärme, Nahrungsstoffen, Atmungs-
gasen, Hormonen, etc.
 - Schutzfunktion: Reparatur von Gewebeerletzungen
 - Abwehrfunktion: Abwehr von Erregern und Fremdstoffen.(Leukozyten)

Einzellige Organismen nehmen ihre Nahrung direkt aus der Umgebung auf und geben ihre Abbauprodukte wieder dorthin ab.

- c)
- Arterien/Arteriolen: 14%
 - Kapillaren: 6%
 - Venen: 64%
 - Lungengefäße: 9%
 - Herz: 7%

8.2 ML-Zellulärer Bestandteil des Blutes

- a) Erythrozyten: Sauerstofftransport im Blut
 Thrombozyten: Gerinnung, Verletzungsantwort
 Leukozyten: Immunantwort, Krankheitsbekämpfung
- b) Lipiden und Proteine. 50 - 200 Å Schichtdicke.
- c) Siehe Abbildung 8.2
 Eigenschaften:
- praktisch keine Oberflächenvergrößerung möglich
 - sehr biegsam (flexibel)

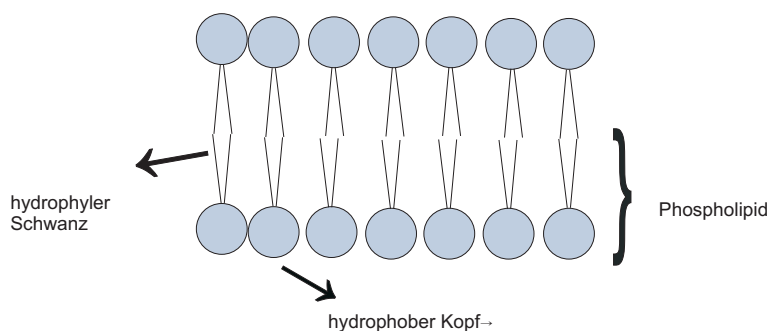


Abbildung 8.2: *Lipiddoppelschicht-Biomembran*

- d) Siehe Abbildung 8.3
 Die Gestalt eines Erythrozyten entspricht der Kurve mit der geringsten Deformationsenergie bei gegebenem Oberflächen-/Volumenverhältnis.

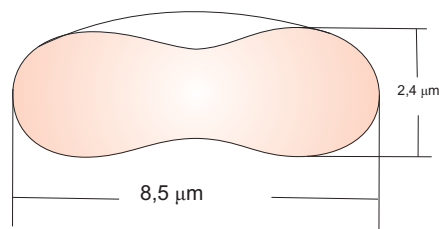


Abbildung 8.3: *Abmessungen von Erythrozyten in biokonkaven Form*

- e) Abbildung 8.4
1. Anheften eines Erythrozyten auf einer Oberfläche mittels Laser
 2. Markierung mittels Laser
 3. Anlegen eines Strömungsfeldes
- ⇒ Abrollen des Erythrozyten (Panzerketteneffekt)
- f) Siehe Abbildung 8.5
 Bei längerer Expositionszeit erfolgen Schädigungen bereits bei niedrigen Schubspannungen. Thrombozyten sind bei kurzen Belastungszeiten weniger gefährdet, bei längerer Belastung genügt bereits Wandkontakt oder Strömungsstagnation zur Aktivierung.

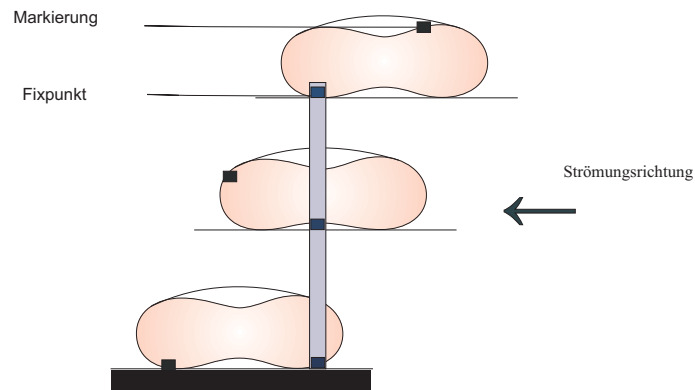


Abbildung 8.4: Bulls Versuch: Erythrozyten besitzen kein innere Gerüst

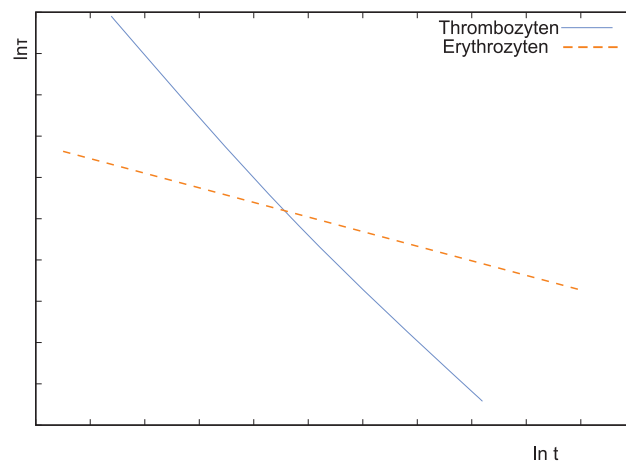


Abbildung 8.5: Verläufe der kritischen Schubspannungen in Abhängigkeit von Belastungszeit

- g) Thrombozyten werden durch Schubspannungen aktiviert (ob niedrige oder hohe Schubspannung ist relativ)
- h) Granulozyten, Lymphozyten, Monozyten
 Phagozytose: Verdauen von Bakterien und anderen Fremdkörpern
 Migrationsfähigkeit:
 Taxis: durch äußere Reize ausgelöste Bewegungsreaktion von Organismen
 Tropismus: gezielte Bewegung in Richtung chemischer oder physikalischer Reizer

8.3 ML-Hämoglobin

- a)
 - 25% Prozent des Inhalts von Erythrozyten bestehen aus Hämoglobin.
 - $MW_{Hb} = 6400 \text{ g}$
 - $4 \times O_2$
- b) Siehe Abbildung 8.6

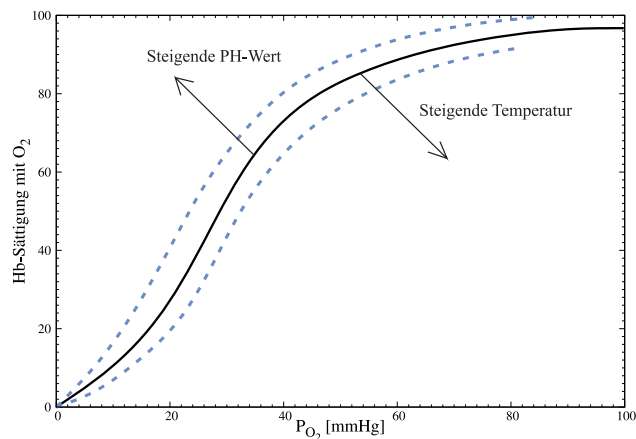


Abbildung 8.6: O₂ Dissoziationskurve von Hämoglobin

Lunge: T niedrig, pH hoch
 schon bei geringem p_{O_2} hohe O₂ Sättigung \Rightarrow unterstützt O₂-Aufnahme.
 Gewebe: T hoch, pH niedrig
 bei gleichem p_{O_2} geringere Sättigung \Rightarrow O₂ Abgabe im Gewebe.

8.4 ML-Rheologische Eigenschaften von Blut

8.4.1 ML-Hämolyse

a) Siehe Abbildung 8.7

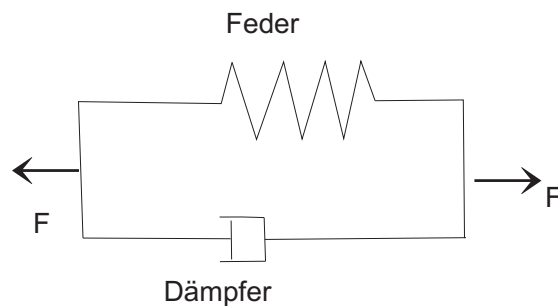


Abbildung 8.7: Feder-Dämpfer System zur Vorstellung von schubspannungsbedingter Hämolyse

- i) Kräfte für Feder und Dämpfer zu hoch \rightarrow Zerstörung.
 - ii) Der Dämpfer hat Zeit sich zu „entspannen“ \Rightarrow Nur Feder nimmt die Kraft auf und schon eine geringere Kraft als bei (a) reicht aus um zur Zerstörung zu führen.
- b) Hypotones Fluid: Erythrozyten blähen sich auf und werden gedehnt (Wassereinstrom und Membranausdehnung) \rightarrow Hämoglobin tritt aus \rightarrow Membranumschlag \Rightarrow transparente Erythrozyten-Ghosts

- Ghosts in isotonischen Fluiden bikonkav
- Ghosts in hypotoner, hochkonzentrierte Hb-Lösung → nehmen Hb auf.

Erklärung: bei Dehnung der Membran über 10% treten Risse in der Membran auf, die sich wieder schließen können.

c)

- oszillierende Draht
- oszillierende Blase
- Couette-Rheometer
- Kegel-Platte-Rheometer
- Mikropaltströmung
- turbulenter Freistrah → besonders für hohe, kurzzeitige Schubspannungsbelastung geeignet (außerdem kein Wandkontakt)

d) Überdruck kann die Erythrozyten nicht schädigen, da zwischen Innen- und Außenseite ein Druckausgleich erfolgt. D.h. $p_i = p_a$ und somit, dass die Membran nicht gedehnt wird. Für Unterdruck wurde vermerkt, dass der sich schnell lösende Sauerstoff die Zelle zum platzen bringt. Dies bestätigt sich in Versuchen jedoch nicht. Erst bei extremen Unterdruck verdampft die Flüssigkeit und damit führt zur Hämolyse.

e)

- chemische
- osmotische
- mechanische
- oberflächenphysikalische
- strömungsmechanische

f)

- Wechselwirkung an künstl. Oberfläche
- Quetschen der Erythrozyten beim schließen
- Nahtundichtheit
- Rückstrom
- turbolente Wirbel hinter Klappe

g) kurzfristig wirkende hohe Schubspannung:

Deformieren der Erythrozyten im Scherfeld → Zellinhaltsstoffe werden herausgequetscht. Nach Entlastung ist die Oberfläche für den restlichen Zellinhalt zu groß ⇒ Faltenbildung.

langfristig wirkende niedrige Schubspannung:

Öffnung kleiner Poren in der Membran. Hb kann nicht austreten, jedoch Ionen und ATP.

⇒ Na^+ -Eintritt → H_2O -Eintritt → Anschwellen der Erythrozyten

⇒ K^+ -Austritt → Verhärten der Membran

⇒ ATP-Austritt → Stimulation der Plättchenaggregation

- h) Hämolyse ist die Schädigung der Erythrozyten durch natürliche Alterung bzw natürliche Schubspannungen.

Alter Erythrozyt \rightarrow Na^+ -Pumpe funktioniert schlecht \rightarrow vermehrtes Einströmen von Na^+ und $H_2O \rightarrow$ Erythrozyt wird praller und kann die Milzporen nicht mehr passieren und Na^+ -Pumpe versagt vollständig \Rightarrow Platzen des Erythrozyten. Hämoglobin wird mit einem Haptoglobin zu einem Komplex verbunden und in der Milz bzw der Leber entsorgt. Bilirubin und Eisen werden dem Körper wieder zugeführt.

- i) Druckvariation als Ursache für Hämolyse nicht nachweisbar. vor allem sind Schubspannungen und Wandkontakt für Hämolyse verantwortlich. Einzige Grenze stellt eine so starke Drucksenkung dar, dass mit Kavitation gerechnet werden muss \Rightarrow Zerstörung der Blutkörperchen

8.4.2 ML-Fließverhalten von Blut

- a) Siehe Abbildung 8.8. Diagramm $\tau = f(\dot{\gamma})$:

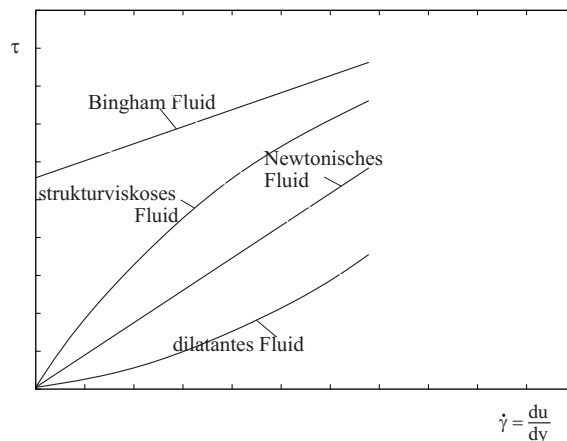


Abbildung 8.8: Fließkurven für newtonsches und nichtnewtonsches Fluid

- b) Siehe Abbildung 8.9

$$\Delta p_G = p_a - p_i = -4\eta \frac{du_r(y)}{dy} \cdot \sin(2\varphi)$$

- c) Nicht-Newtonisches Fließverhalten von Vollblut:

- Blut ist keine reine Flüssigkeit, sondern eine Lösung aus flexiblen Partikeln hoher Konzentration in einer wässrigen Trägerflüssigkeit.
- Trägerflüssigkeit: Blutplasma = wässrige Lösung aus Makromolekülen (Proteinen).

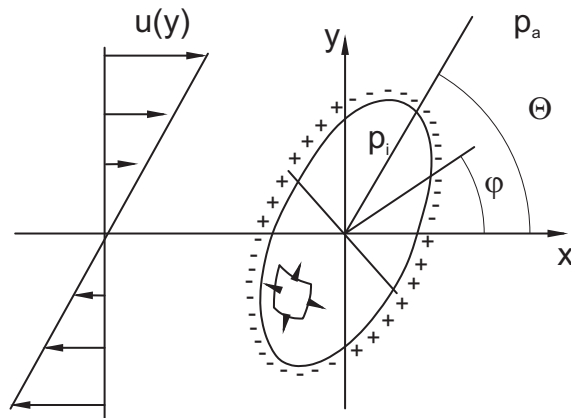


Abbildung 8.9: Druckverteilung nach G.I. Taylor um einen sphärischen Tropfen in einer Scherströmung

- Suspension von Erythrozyten in Blutplasma (die übrigen Blutbestandteile können in erster Näherung aus rheologischer Sicht vernachlässigt werden).
- hohe Partikelkonzentration ($C > 40\%$), Partikel sind nicht kugelförmig (\rightarrow Orientierung-Phänomene)
- Partikelform hängt von der Scherspannung ab. die Membran kann sich um den inneren, viskosen Zellkern bewegen (\rightarrow Das Verhalten eines einzelnen Erythrozyten in einer Scherströmung ähnelt dem eines Tropfens in einer anderen Flüssigkeit mit niedrigerer Viskosität (s. Taylor).

d) Fließgrenze von Blut:

Fließgrenze bedeutet: $\tau \leq \tau_y$; $\dot{\gamma} = 0$, $\eta = \infty$. Grund hierfür ist die Aggregationsneigung der Erythrocyten bei $\dot{\gamma} = 0$. es wird eine Mindestkraft benötigt, um diese Aggregate aufzubrechen. Erst oberhalb dieser Kraft beginnt Blut zu fließen.

- Im Ruhezustand bilden sich sog. Geldrollen- oder Netzwerkformationen aus Erythrozyten (der Grad dieser Aggregationsneigung hängt von der Proteinkonzentration (z.B. γ -Globulin) im Blutplasma ab).
- Unter Scherbelastung werden diese Aggregate aufgebrochen (hohe Viskosität), die Erythrozyten verhalten sich noch wie starre Objekte.
- Bei steigender Scherbelastung beginnen sich die Erythrozyten zu verformen, die Membran rotiert um den Zellkern und die Viskosität sinkt.

e) Ruhe: Erythrozyten lagern sich zu Aggregaten an; Geldrolleneffekt, Netzbildung; Festkörperverhalten

langsame Schergeschwindigkeit: Erythrozyten verhalten sich wie starre Scheiben und führen Taumelbewegungen aus; hohe Viskosität; Fließkurve steigt steil an.

Mittlere Schergeschwindigkeit: Membran rotiert um Zellinhalt; niedrige Viskosität; Fließkurve wird flacher.

Hohe Schergeschwindigkeit: Erythrozyten werden ellipsenförmig; keine weitere Änderung der Viskosität; Fließkurve steigt nicht mehr an.

f) Siehe Abbildung 8.10

g) Siehe Abbildung 8.11

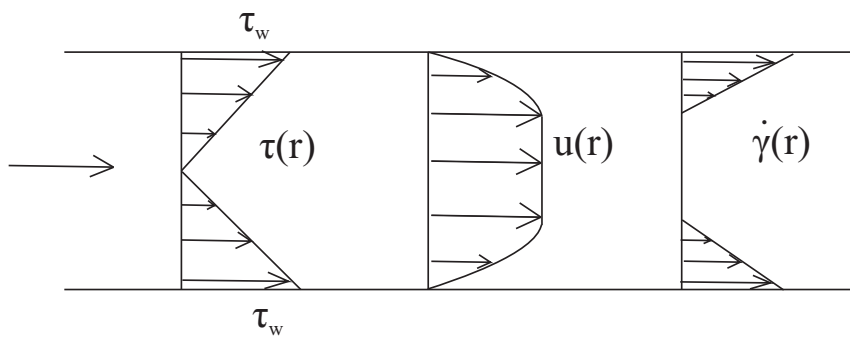


Abbildung 8.10: Schubspannungsverteilung und Geschwindigkeitsverteilung in einem ebenen Plattendialysator

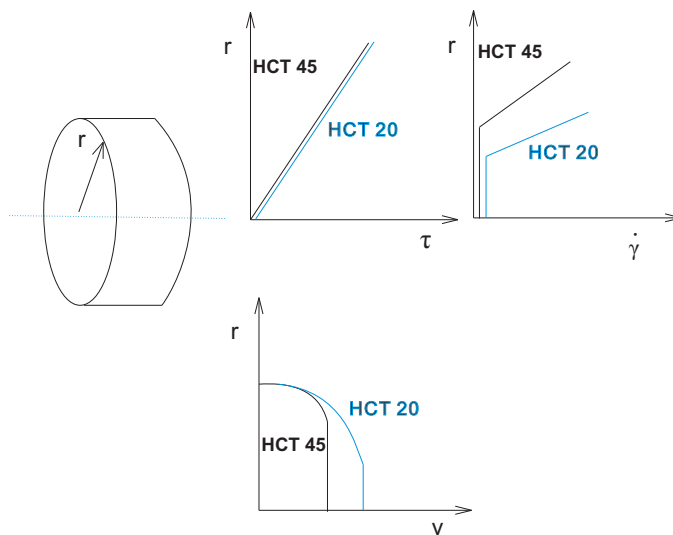


Abbildung 8.11: Schubspannungs-, Scherrate-, Geschwindigkeitsverlauf bei niedrigem und hohem Hämatokritwert

- h)
- $d \geq 0,5$ mm: Blut als Fluid mit gelösten Festkörpern
 - $30\mu\text{m} \leq d < 0,5$ mm: In den Randschichten Plasmaviskosität, in Gefäßmitte Vollblut mit hohem Hämatokrit
 - $d \leq 30\mu\text{m}$: Festkörpereigenschaften
- i) Couette-Viskosimeter, Kegel-Platte-Viskosimeter
- j) Einfach: Kapillarviskosimeter; Viskosität kann dabei allerdings nicht direkt angegeben werden.
Aufwändig: Couette- oder Kegel-Platte-Viskosimeter; τ und $\dot{\gamma}$ lassen sich direkt aus ω und M bestimmen, allerdings treten bei großen ω Sekundärströmungen auf.
- k) Siehe Abbildung 8.12

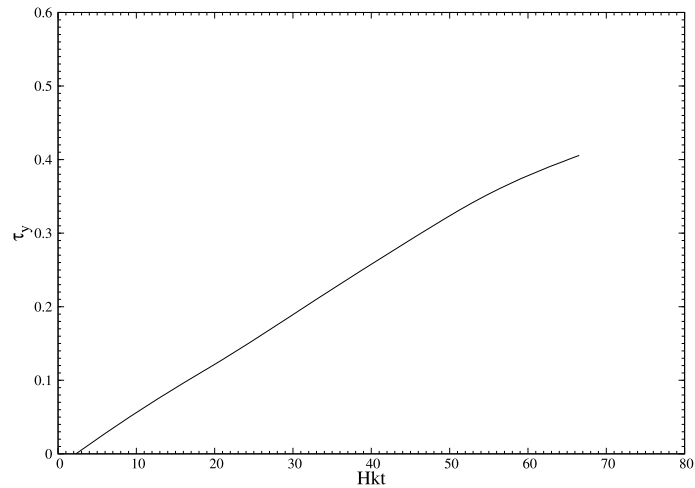


Abbildung 8.12: Fließgrenze in Abhängigkeit von Hämatokrit

8.4.3 ML-Gerinnungssystem

- a) Gefäßverletzung → Kollagenfasern werden freigelegt → Anlagerung von Thrombozyten. Während des Anlagerungsprozesses verändern die Thrombozyten ihre Form. Es erfolgt die Ausstülpung von Pseudopodien, was mit einer mehrfachen Oberflächenvergrößerung einhergeht. Außerdem werden sie klebrig für einander. Dadurch wird primärer Gefäßverschluss erreicht. Das Agglomerat wird sehr fest, aber nicht flexibel (Gefahr von abplatzen). → Fibrinogen wird in Fibrin umgewandelt. In Form von elastischen Fasern überzieht es das Agglomerat. ⇒ Gefäßverschluss fest und flexibel.

Hämophilie → Fehlen eines bestimmten Globulins (Faktor VIII)

- b) Siehe Abbildung 8.13:

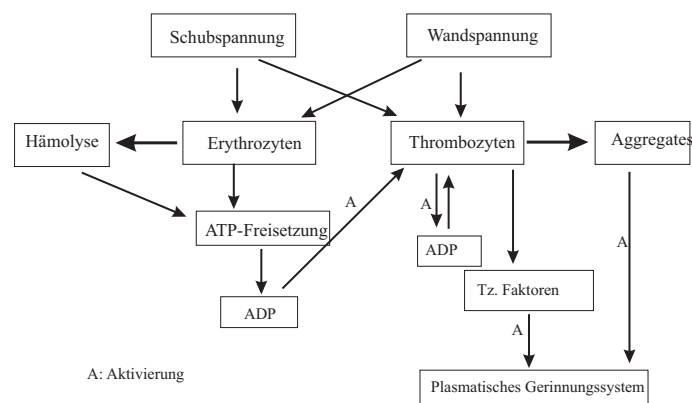


Abbildung 8.13: Wirkung von Schubspannungen und Wandkontakt auf Erythrozyten und Thrombozyten

- c) Gewebsverletzung, Kontaktaktivierung
Siehe Abbildung 8.14:

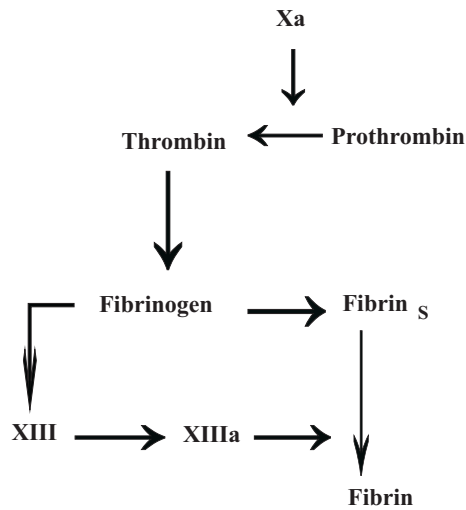


Abbildung 8.14: Endstrecke von Gerinnungskaskade

8.4.4 ML-Fahraeus-Lindqvist-Effekt

- a) Abnahme der Viskosität bei Kapillarendurchmesser kleiner als 1,5 mm.
Durch diesen Effekt wird die starke Einfluss von Radius auf Widerstand (in der 4.Potenz) durch Abnahme der scheinbaren Viskosität teilweise kompensiert.
- b) Mögliche Erklärung: Entmischung in Wandnähe.
geringe Packungsdichte in Wandnähe durch Transversalkräfte "Wallmigration" bei Einlaufströmung in Kapillare werden wandnahe Bereiche abgebremst. Entmischung der Randzone.
⇒ Erythrozyten befinden sich im Kernbereich auf Strombahnen in höherer Geschwindigkeit.
⇒ Hämatokrit sinkt ⇒ Viskosität sinkt
Siehe Abbildung 8.15

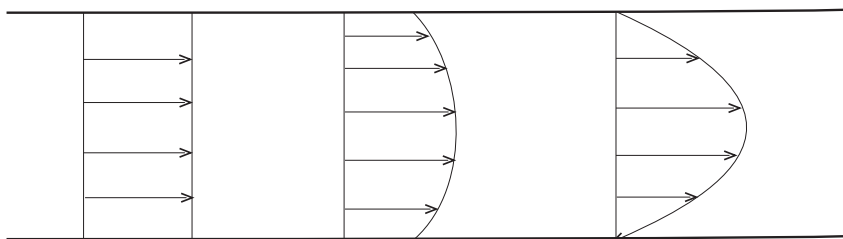


Abbildung 8.15: Fahraeus-Lindqvist-Effekt

- c) Siehe Abbildung 8.16

8.5 ML-Rheologische Modelle von Blut

- a) Siehe Abbildung 8.17

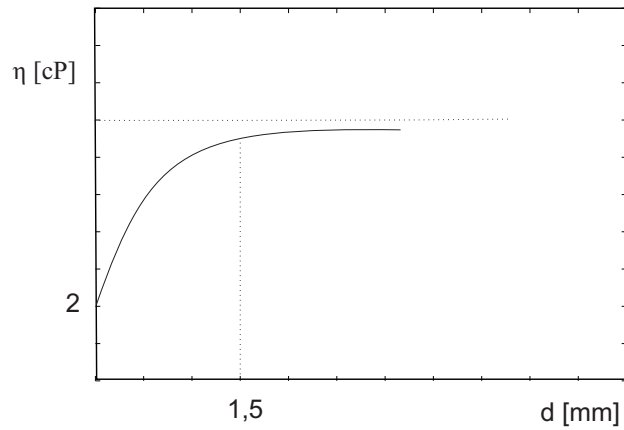


Abbildung 8.16: Verlauf der dynamischen Zähigkeit des Blutes in Abhängigkeit vom Durchmesser der Messkapillare

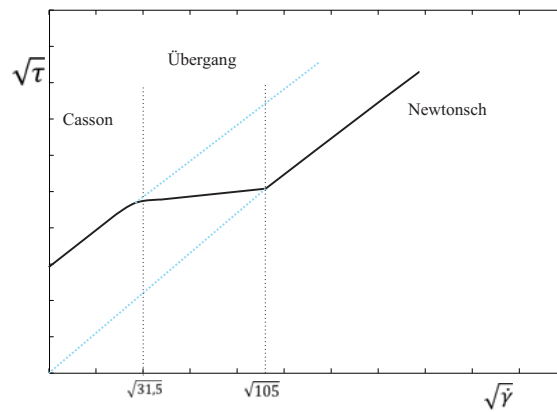


Abbildung 8.17: Fließkurve nach Modell vom Merville und Pelletier

b) Siehe Abbildung 8.18

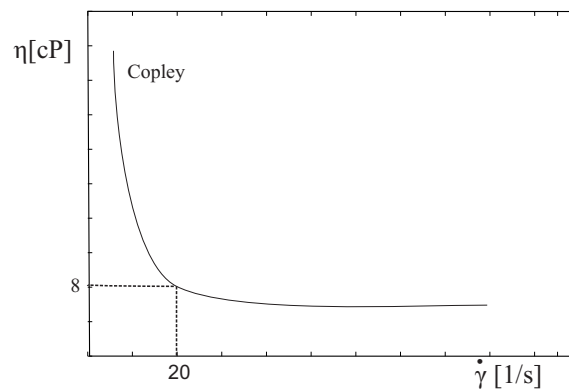


Abbildung 8.18: η als Funktion von $\dot{\gamma}$ nach Copley

c) Die Rabinowitsch-Mooney-Beziehung gilt für alle Fluide ohne elastische Eigenschaften. Zu bestimmen sind Durchfluss \dot{Q} und Druckgradient $\frac{\partial p}{\partial x}$ in einer Kapillare. Aus der Auftragung von Φ über τ_w kann die Fließkurve ermittelt werden.

d) Rabinowitsch-Mooney-Beziehung:

- i) Messtechnisch zu bestimmen sind die Druckdifferenz $\frac{\Delta p}{\Delta x}$ und der Volumenstrom \dot{Q} . Gerätetechnisch vorgegeben sind R und Δx .
- ii) Zu konstruieren ist das Diagramm $\Phi = f(\tau_w)$.
Siehe Abbildung 8.19

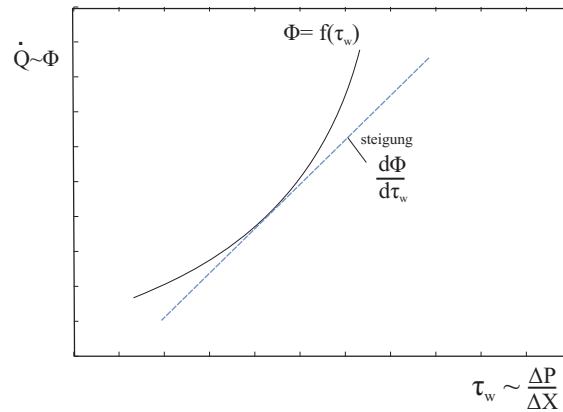


Abbildung 8.19: ϕ als Funktion von τ_w

iii) Mit

$$\dot{Q} = -\frac{\Delta p}{\Delta x} \frac{\pi}{8\eta} R^4$$

folgt

$$\Phi = \frac{\dot{Q}}{\pi R^3} = -\frac{\Delta p}{\Delta x} \frac{R}{8\eta} = -\underbrace{\frac{\Delta p}{\Delta x} \frac{R}{2}}_{\tau_w} \frac{1}{4\eta} = -\frac{\tau_w}{4\eta}$$

Außerdem:

$$\frac{d\Phi}{d\tau_w} = -\frac{1}{4\eta}$$

Einsetzen in die Rabinowitsch-Mooney-Beziehung liefert:

$$\begin{aligned} -\dot{\gamma}_w &= \frac{d\Phi}{d\tau_w} \cdot \tau_w + 3 \cdot \Phi \\ -\dot{\gamma}_w &= -\frac{1}{4\eta} \cdot \tau_w - 3 \frac{\tau_w}{4\eta} \\ -\dot{\gamma}_w &= -\frac{1}{\eta} \cdot \tau_w \quad \Rightarrow \tau_w = \eta \dot{\gamma}_w \end{aligned}$$

Diese Beziehung gilt für das Fließverhalten Newtonscher Fluide. Daraus folgt, dass das Einsetzen der nur für Newtonsche Fluide gültigen Hagen-Poiseuille-Gleichung in die Rabinowitsch-Mooney-Beziehung eine Gleichung liefert, die einen Spezialfall dieser Beziehung liefert.

8.6 ML-Pathophysiologische Einflüsse auf Blutviskosität

- a) Globulin: Proteine (ca. 2.5%) des Blutplasmas.
Globulin erhöht die Aggregationsneigung der Erythrozyten
- b) Erhöhung des Hämatokrits bewirkt Anstieg von η und τ_y
- c) Von Einstein gefundener Zusammenhang zwischen der Partikelkonzentration in einem Trägerfluid und dessen Viskosität: $\eta \sim c$. Für $c \geq 40\%$ liegt nichtnewtonsches Verhalten vor; der Hämatokritwert liegt deutlich über diesem Wert.
- d)
 - i) Albumin \rightarrow Verringerung der Aggregationsneigung
 - ii) Fibrinogen \rightarrow Steigerung der Aggregationsneigung
 - iii) Globuline \rightarrow Steigerung der Aggregationsneigung
 infektiöse Erkrankung \rightarrow erhöhte γ -Globulin Konzentration \Rightarrow Steigerung der Aggregationsneigung von Erythrozyten \Rightarrow Erhöhung der Blutsenkungsgeschwindigkeit
- e) Elliptozytose: Im Falle der Elliptozytose (erblich; 0,02 - 0,05% der Bevölkerung) besitzen die Erythrozyten eine ellipsoide Form, d.h., sie besitzen ein größeres Zellvolumen bei konstanter Oberfläche, woraus eine geringere Flexibilität resultiert. Dieses führt dazu, dass sich das Blut wie ein Newtonsches Fluid mit einer hohen Viskosität verhält.

Sichelzellanämie: Viskosität steigt

8.7 ML-Blutviskositätsmessung

- a)
 - i) Kapillar-viskosimeter, Couette-Viskosimeter, Kegel/Platte-Viskosimeter, Kugelfall-Viskosimeter
 - ii) Kugelfallviskosimeter
- b) σ -Effekt: Abhängig von Oberflächenbeschichtungen werden unterschiedliche Viskositäten gemessen. Zum Beispiel bei Fibrinbeschichtung geringere Viskosität.
- c) Kugelfall-Viskosimeter:
 - i) Siehe Abbildung 8.20

$$\sum F = 0$$

$$F_W + F_A - G = 0$$

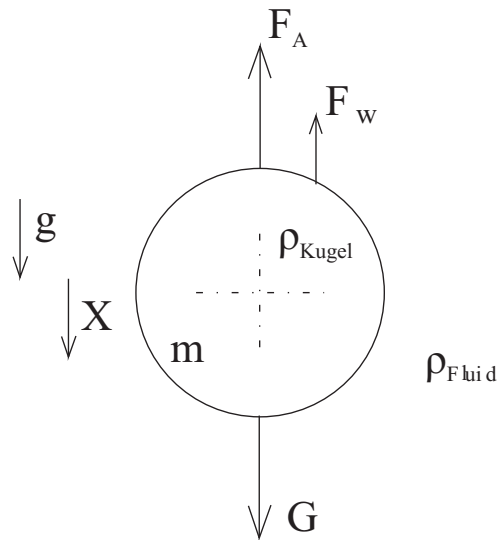


Abbildung 8.20: Kräftegleichgewicht bei einem Kugelfall

$$F_A = \rho_F \cdot V_K$$

$$F_W = c_W \cdot \frac{\rho_F}{2} \cdot w^2 \cdot \pi \cdot \frac{d^2}{4}$$

$$c_W = \frac{24}{Re}; \quad \eta = \frac{\rho u d}{Re}$$

ii) $c_W = \frac{24}{Re}$ wurde für newtonsche Fluide gemessen und Vollblut ist ein nichtnewtonsches Fluid.

d) Couette-Rheometer:

i) Skizze: Siehe Abbildung 8.21

ii) Taylorwirbel entstehen aufgrund der Relativgeschwindigkeit zwischen dem äußeren und inneren Zylinder.

Taylorwirbel verschlechtern die Messgenauigkeit, da bei den Annahmen von einer ebenen Schichtenströmung ausgegangen wird.

iii) Wenn der innere Zylinder fest steht und der Äußere sich dreht, dann entsteht eine stabile Schichtung (bzgl. Corioliskraft) und Taylorwirbel treten erst bei noch höheren Winkelgeschwindigkeiten auf.

e) Kegel/Platte-Rheometer:

i) Siehe Abbildung 8.22

Winkelgeschwindigkeit Ω :

$$\dot{\gamma} = \frac{v_\varphi}{h} = \frac{\Omega r^*}{H} \quad \text{und mit} \quad \frac{H}{r^*} = \tan \alpha \quad \Rightarrow \quad \dot{\gamma} = \frac{\Omega}{\tan \alpha}$$

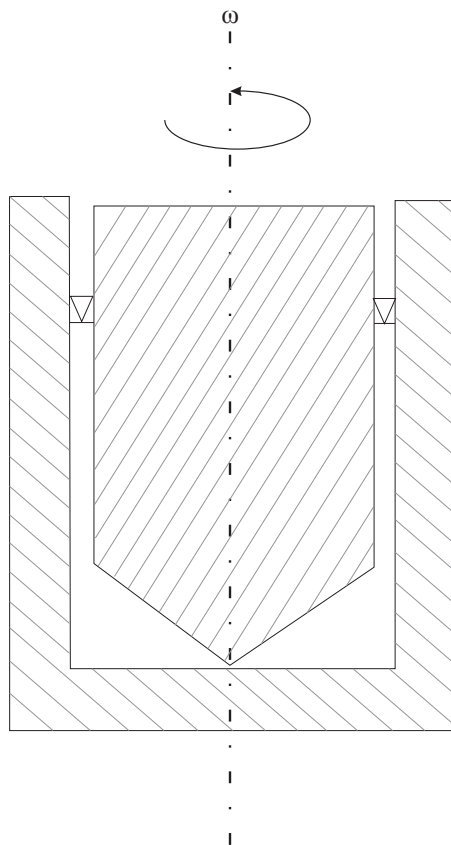


Abbildung 8.21: Couette-Rheometer

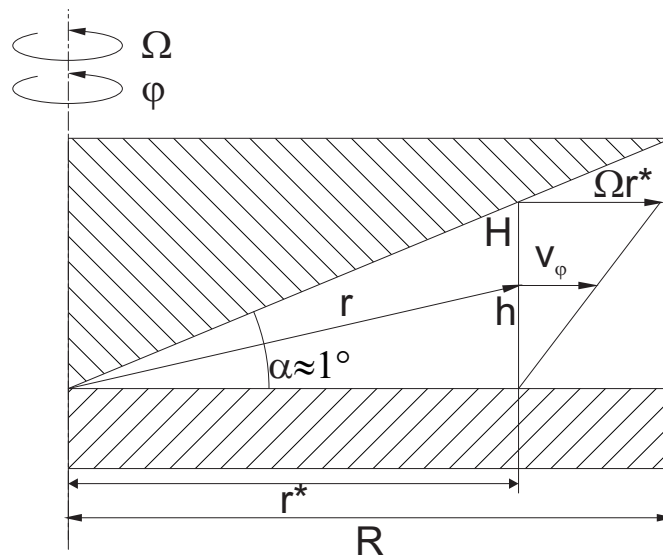


Abbildung 8.22: Parametern bei Kegel/ Platte-Rheometer

Drehmoment:

$$M = \int_0^R \tau(2\pi r^*)r^* dr^* = \frac{2}{3}r^{*3}\pi\tau \Big|_0^R = \frac{2}{3}R^{*3}\pi\tau \Rightarrow \tau = \frac{3}{2} \frac{M}{\pi R^3}$$

Messwerte: Ω , M

Geräteparameter: α , R

- ii) Sekundärströmungen bei höheren Winkelgeschwindigkeiten
Präzises Instrument nötig \rightarrow hohe Fertigungskosten
- iii) Newtonsches Fluid: $\tau = \eta\dot{\gamma} \rightarrow$ Viskosität entspricht der (konstanten) Steigung der Fließkurve
Nicht-Newton'sches Fluid: $\tau = f(\dot{\gamma})$, scheinbare Viskosität entspricht dem Gradienten der Fließkurve, punktweise Bestimmung der Viskosität.
Siehe Abbildung 8.23

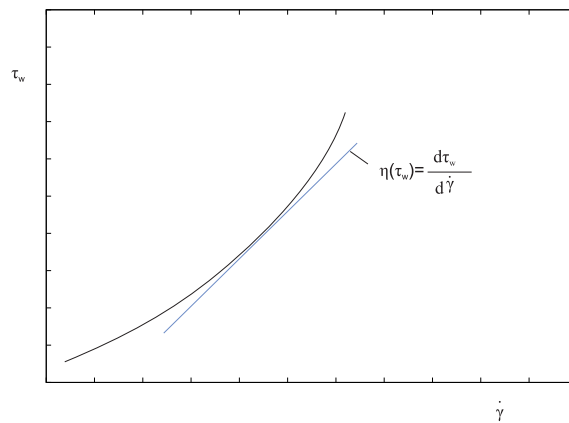


Abbildung 8.23: Bestimmung von Viskosität durch Fließkurve

9 Musterlösung-Blutgefäße

9.1 ML-Allgemeine Fragen

9.1.1 ML-Rohrströmung bei Existenz einer Fließgrenze τ_y

a) Kräftegleichgewicht: Siehe Abbildung 9.1

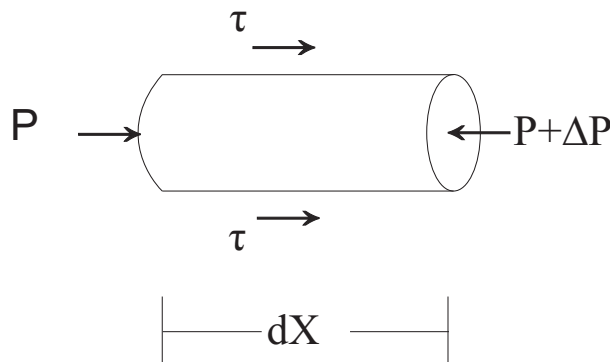


Abbildung 9.1: Rohrströmungs-kräftegleichgewicht

$$\begin{aligned}
 p \cdot \pi r^2 - (p + dp) \cdot \pi r^2 + \tau \cdot 2\pi r dx &= 0 \\
 p \cdot r - p \cdot r - dp \cdot r + 2\tau \cdot dx &= 0 \\
 \frac{dp}{dx} \cdot \frac{r}{2} &= \tau
 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
 \tau^{\frac{1}{2}} &= \tau_y^{\frac{1}{2}} + c \left(\frac{du}{dr} \right)^{\frac{1}{2}} \\
 \frac{du}{dr} &= \frac{(\tau^{\frac{1}{2}} - \tau_y^{\frac{1}{2}})^2}{c^2}
 \end{aligned}$$

mit $\tau = \frac{dp}{dx} \cdot \frac{r}{2}$:

$$du = \frac{1}{c^2} \left(\frac{dp}{dx} \cdot \frac{r}{2} - 2 \left(\frac{dp}{dx} \cdot \frac{r}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \tau_y^{\frac{1}{2}} + \tau_y \right) dr$$

$$u = \frac{1}{c^2} \left(\frac{dp}{dx} \cdot \frac{r^2}{4} - 2 \left(\frac{dp \tau_y}{2 dx} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{2}{3} r^{\frac{3}{2}} + \tau_y r + K \right)$$

R.B.:

$$u(r = R) = 0$$

$$\frac{1}{c^2} \left(\frac{dp}{dx} \cdot \frac{R^2}{4} - \frac{4}{3} \left(\frac{dp \tau_y}{2 dx} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot R^{\frac{3}{2}} + \tau_y R + K \right) = 0$$

$$K = \frac{4}{3} \left(\frac{dp \cdot \tau_y}{2 dx} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot R^{\frac{3}{2}} - \frac{dp}{dx} \cdot \frac{R^2}{4} - \tau_y R$$

K einsetzen:

$$\Rightarrow u(r) = \frac{1}{c^2} \left(\frac{dp}{4 dx} (r^2 - R^2) - \frac{4}{3} \left(\frac{dp \tau_y}{2 dx} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot (r^{\frac{3}{2}} - R^{\frac{3}{2}}) + \tau_y (r - R) \right)$$

c) Siehe Abbildung 9.2

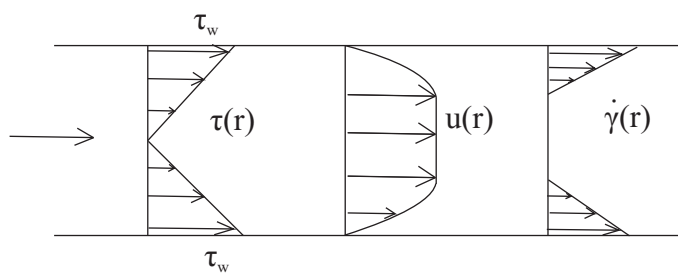


Abbildung 9.2: τ ; $\dot{\gamma}$; u -Verlauf bei Existenz einer Fließgrenze als Funktion von Radius

9.1.2 ML-Strömung zwischen ebenen Platten mit Fließgrenze τ_0

a) Kräftegleichgewicht in X-Richtung: Siehe Abbildung 9.3

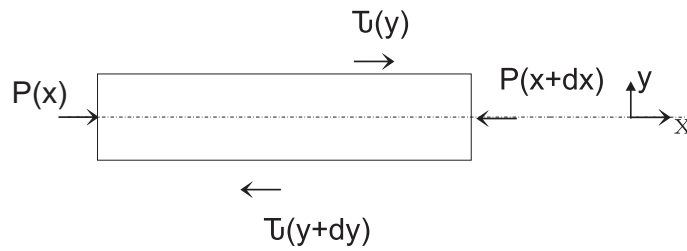


Abbildung 9.3: Kräftegleichgewicht an einem infinitesimalen Element

$$\begin{aligned} \pi r^2 (p(x) - p(x + dx)) + 2\pi r \tau(r) dx &= 0 \\ -\frac{r}{2} \frac{dp}{dx} + \tau(r) &= 0 \\ \tau(r) &= \frac{dp}{dx} \frac{r}{2} \end{aligned}$$

mit Taylor:

$$\begin{aligned} p(x + dx) &= p(x) + \frac{dp}{dx} dx + \dots \\ \frac{p(x + dx) - p(x)}{dx} &= \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dp}{dx} \end{aligned}$$

b)

$$\tau(r)^{1/2} = \tau_y^{1/2} + c \left(\frac{du}{dr} \right)^{1/2}$$

$$\frac{du}{dr} = \frac{(\tau_y^{1/2} - \tau(r)^{1/2})^2}{c^2} = \frac{1}{c^2} \left(\tau_y - 2\sqrt{\tau_y \tau(r)} + \tau(r) \right)$$

$$du = \frac{1}{c^2} \left(\tau_y - 2\sqrt{\tau_y} \sqrt{\frac{dp}{dx} \frac{r}{2}} + \frac{dp}{dx} \frac{r}{2} \right) dr$$

$$u = \frac{1}{c^2} \left(\tau_y r - 2\sqrt{\frac{\tau_y dp}{2dx}} \cdot \frac{2}{3} r^{3/2} + \frac{dp}{dx} \frac{r^2}{4} \right) + K$$

R.B.: $u(r = R) = 0$

$$K = -\frac{1}{c^2} \left(\tau_y R - \frac{4}{3} \sqrt{\frac{dp}{dx} \frac{\tau_y}{2}} R^{3/2} + \frac{dp}{dx} \frac{R^2}{4} \right)$$

$$u = \frac{1}{c^2} \left(\tau_y (r - R) - \frac{4}{3} \sqrt{\frac{dp}{dx} \frac{\tau_y}{2}} (r^{3/2} - R^{3/2}) + \frac{1}{4} \frac{dp}{dx} (r^2 - R^2) \right)$$

\Rightarrow

$$u = \frac{1}{c^2} \left(\tau_y (r - R) - \frac{4}{3} \sqrt{\frac{dp}{dx} \frac{\tau_y}{2}} (r^{3/2} - R^{3/2}) + \frac{1}{4} \frac{dp}{dx} (r^2 - R^2) \right)$$

9.2 ML-Wellenausbreitung in dehnbaren Gefäßen

a) Moens-Korteweg-Formel

$$c = \sqrt{\frac{E \cdot h}{2 \cdot \rho \cdot R_i}}$$

Die Moens-Korteweg-Formel beschreibt die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit in elastischen Gefäßen als Funktion der Gefäßform (Wanddicke h , Innendurchmesser R_i), der Elastizität des Gefäßes (Elastizitätsmodul E) und der Stoffeigenschaften des Fluids (Dichte ρ).

b) Verlauf der Welle: Siehe Abbildung 9.4
Definition der Wellengeschwindigkeit:

$$c^2 = \frac{R_i}{\rho \alpha}$$

Wellenausbreitungsgeschwindigkeit als Funktion des Innenradius eines Gefäßes R_i , der Dichte des Fluids ρ und der Radiusdehnbarkeit α .

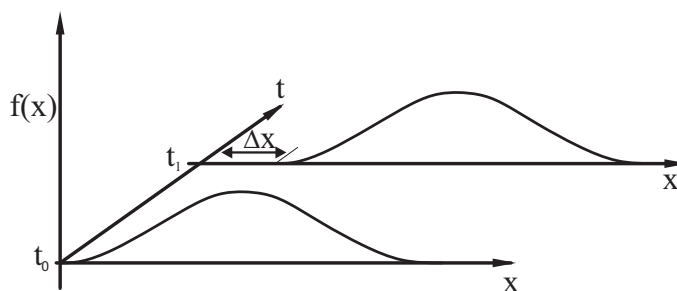


Abbildung 9.4: Verlauf einer rechtslaufenden Welle für die Zeitpunkte t_0 und t_1 mit der Wellengeschwindigkeit c

c) Siehe Abbildung 9.5

Für ein Wellensystem mit fünf Wellenzügen ergibt sich:

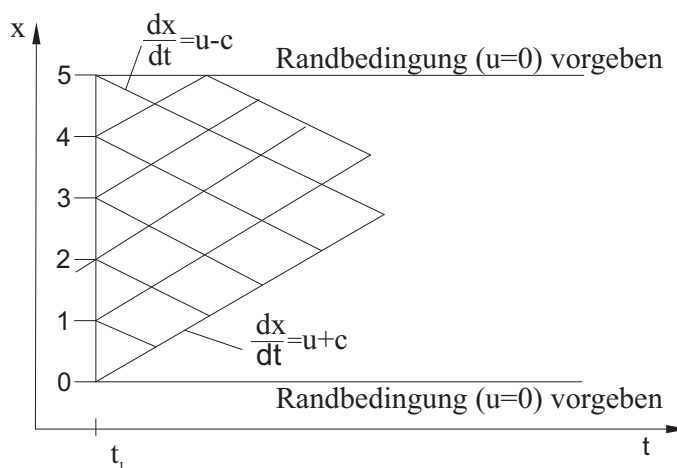


Abbildung 9.5: Ein Wellensystem mit fünf Wellenzügen und vorgegebenen Randbedingungen

d) Volumenelastizitätsmodul:

$$E' = \frac{dE_V}{dV} \quad [Pa/m^3]$$

e)

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} = 0$$

$$c^2 = \frac{R_i}{\rho \alpha} \quad \text{Wellenausbreitungsgeschwindigkeit}$$

f) D'Alembert'scher Ansatz zur Lösung der Wellengleichung:

$$P_i = f(x - ct) \quad \text{rechtslaufende Welle}$$

$$p_i = g(x + ct) \quad \text{linkslaufende Welle}$$

⇒

$$P_i = P_{i0} \cdot f(x - ct) + P'_{i0} \cdot g(x + c) \quad u = u_0 \cdot f(x - ct) + u'_0 \cdot g(x + ct)$$

g) Siehe Abbildung 9.6

Besonderheiten der Blutströmung bei der Gefäßverzweigung:

- Totwassergebiete
- Strömungsablösung
- Einlaufeffekte
- Sekundärströmung

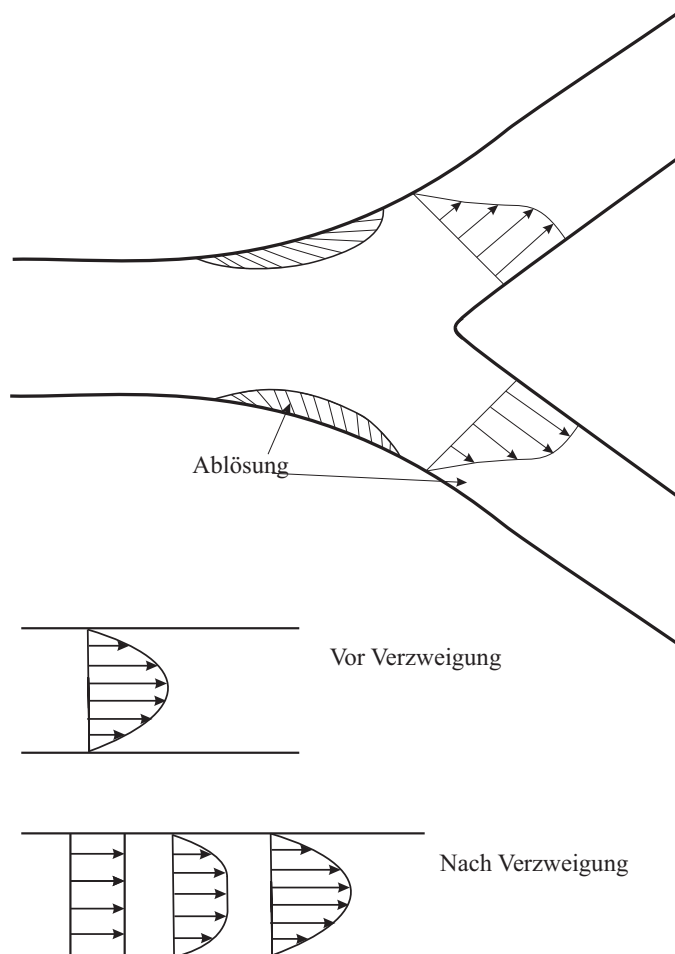


Abbildung 9.6: Strömung in Gefäßverzweigung

h) keine ML

i)

i) Ansatz zur Lösung der linearisierten Wellengleichung (rechtslaufende Welle):

$$p = p_0 f(x - ct)$$

f: beliebige, zweimal stetig differenzierbare Funktion.

Hier: $f = \sin(\frac{\pi}{L}\bar{x})$ mit $\bar{x} = x - ct$ und $0 \leq \bar{x} \leq L$.

Somit:

$$p(x_1, t_1) = p_0 \sin\left(\frac{\pi}{L}(x_1 - ct_1)\right)$$

$$p(x_1, t_1) = \frac{1}{3}p_0$$

Und damit:

$$x_1 - ct_1 = \frac{L}{\pi} \arcsin\left(\frac{1}{3}\right)$$

Und schließlich:

$$t_1 = \left[x_1 - \frac{L}{\pi} \arcsin\left(\frac{1}{3}\right) \right] = 0.723s$$

ii) Siehe Abbildung 9.7

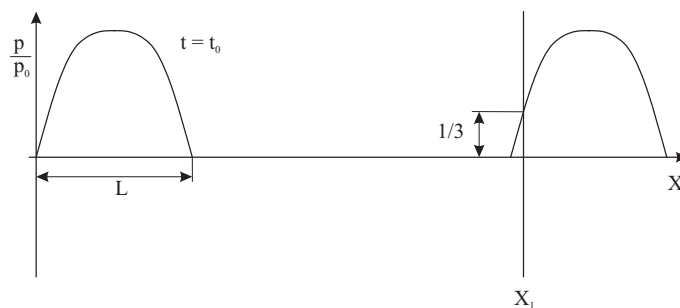


Abbildung 9.7: Druckwelle zum Zeitpunkt t_1 am Ort x_1

9.3 ML-Strömung in elastischen Gefäßen

a) **ML-Elastischer Schlauch:**

i) Beschreibung von Querschnitt und Radius:

$$A = R^2 \pi$$

$$R = R_0 + \frac{\alpha}{2}(p_i - p_a) \Rightarrow \partial R = \frac{\alpha}{2} \partial p_i \quad (1)$$

Konti:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + A \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial A}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial(R^2 \pi)}{\partial t} + R^2 \pi \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial(R^2 \pi)}{\partial x} = 0$$

Kettenregel + Kürzen

$$\Rightarrow \frac{\partial R}{\partial t} + \frac{R}{2} \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial R}{\partial x} = 0$$

Amplitude \ll Wellenlänge $\Rightarrow \frac{\partial R}{\partial x}$ vernachlässigbar.
Mit (1)

$$\Rightarrow \alpha \frac{\partial p_i}{\partial t} + R \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \left| \frac{\partial()}{\partial t} \right.$$

$$\frac{\alpha}{R} \frac{\partial^2 p_i}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = 0 \quad (2)$$

Impuls:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(\frac{u^2}{2})}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_i}{\partial x} = 0$$

$$u \text{ klein} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_i}{\partial x} = 0 \quad \left| \frac{\partial()}{\partial x} \right.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p_i}{\partial x^2} = 0 \quad (3)$$

$$(2) - (3) \Rightarrow \frac{\alpha}{R} \frac{\partial^2 p_i}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p_i}{\partial x^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 p_i}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 p_i}{\partial x^2} = 0 \quad \text{mit } c = \sqrt{\frac{R}{\rho\alpha}}$$

- ii) Linearisierung:
Ausgangsgleichung:

$$\underbrace{\frac{\partial u_g}{\partial t}}_{\text{Term 1}} + u_g \cdot \underbrace{\frac{\partial u_g}{\partial x}}_{\text{Term 2}} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_i}{\partial x} = 0$$

Einsetzen von $u_g = u + U$ in Term 1:

$$\frac{\partial u_g}{\partial t} = \frac{\partial(u + U)}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

Einsetzen von $u_g = u + U$ in Term 2:

$$u_g \cdot \frac{\partial u_g}{\partial x} = (u + U) \cdot \frac{\partial(u + U)}{\partial x} = U \cdot \underbrace{\frac{\partial U}{\partial x}}_{=0} + U \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + u \cdot \underbrace{\frac{\partial U}{\partial x}}_{=0} + u \cdot \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{\ll U \cdot \frac{\partial u}{\partial x}}$$

Einsetzen ergibt:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + U \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p_i}{\partial x}$$

- iii) Eliminierung der Geschwindigkeit über Lorenz-Transformation $x' = x - Ut$ und $t' = t$:

Für die Ableitungen gilt damit:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'} \cdot \underbrace{\frac{\partial t'}{\partial t}}_{=1} + \frac{\partial}{\partial x'} \cdot \underbrace{\frac{\partial x'}{\partial t}}_{=-U} = \frac{\partial}{\partial t'} - U \cdot \frac{\partial}{\partial x'}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t'} \cdot \underbrace{\frac{\partial t'}{\partial x}}_{=0} + \frac{\partial}{\partial x'} \cdot \underbrace{\frac{\partial x'}{\partial x}}_{=1} = \frac{\partial}{\partial x'}$$

Einsetzen in Impulsleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial t'} - U \cdot \frac{\partial u}{\partial x'} + U \cdot \frac{\partial u}{\partial x'} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x'} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial t'} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x'}$$

Ableitungen der Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial A}{\partial R_i} \cdot \frac{\partial R_i}{\partial t} = 2 \cdot \pi \cdot R_i \cdot \frac{\partial R_i}{\partial t}$$

und

$$\frac{\partial(A \cdot u_g)}{\partial x} = u_g \cdot \frac{\partial A}{\partial x} + A \cdot \underbrace{\frac{\partial u_g}{\partial x}}_{= \frac{\partial u}{\partial x}}$$

Einsetzen liefert:

$$2 \cdot \pi \cdot R_i \cdot \frac{\partial R_i}{\partial t} + u_g \cdot \underbrace{\frac{\partial A}{\partial R_i}}_{2\pi R_i} \frac{\partial R_i}{\partial x} + \pi R_i^2 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial R_i}{\partial t} + u_g \cdot \frac{\partial R_i}{\partial x} + \frac{R_i}{2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Einsetzen der Transformation:

$$\frac{\partial R_i}{\partial t'} - U \cdot \frac{\partial R_i}{\partial x'} + \frac{R_i}{2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + U \cdot \frac{\partial R_i}{\partial x'} + u \cdot \underbrace{\frac{\partial R_i}{\partial x'}}_{\ll \frac{\partial R_i}{\partial t'}}$$

und schließlich:

$$\frac{\partial R_i}{\partial t'} + \frac{R_i}{2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x'} = 0$$

b) ML-Elastisches Gefäß:

- i) Voraussetzung:
eindimensional, laminar, reibungsfrei
- ii) $u \rightarrow 0$ für kleine Geschwindigkeiten u

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_i}{\partial x} = 0$$

iii)

$$R_i = R_o + \frac{\alpha}{2}(p_i - p_a) \quad \text{mit } R_o, p_a = \text{const.}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\alpha}{2} \frac{\partial p_i}{\partial t} \quad (1)$$

$$2\pi R \frac{\partial R}{\partial t} + A \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial A}{\partial x} = 0 \quad \text{mit } A = \pi R^2$$

$$\Leftrightarrow 2\pi R \frac{\partial R}{\partial t} + \pi R^2 \frac{\partial u}{\partial x} + u\pi 2R \frac{\partial R}{\partial x} = 0$$

Wellenlänge \gg Amplitude $\Rightarrow \frac{\partial R}{\partial x}$ Vernachlässigbar.

$$\Leftrightarrow \frac{2}{R} \frac{\partial R}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \left| \frac{\partial}{\partial t} \text{ und (1)} \right.$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{R} \frac{\partial^2 p_i}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = 0 \quad (2)$$

aus ii)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_i}{\partial x} = 0 \quad \left| \frac{\partial}{\partial x} \right.$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p_i}{\partial x^2} = 0 \quad (3)$$

$$\Rightarrow (2) - (3) : \quad \frac{\alpha}{R} \frac{\partial^2 p_i}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p_i}{\partial x^2} = 0$$

c) ML-Auslegung einer Kapillarniere

i) Kräftegleichgewicht: Siehe Abbildung 9.8

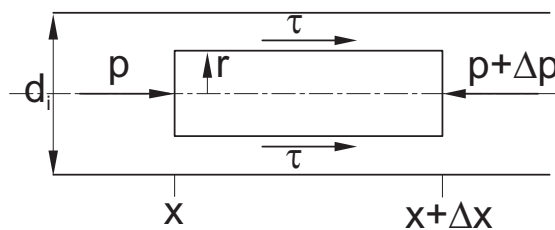


Abbildung 9.8: Kräftegleichgewicht an einem Volumenelement

$$-(p + \Delta p)\pi r^2 + p\pi r^2 + \tau 2\pi r \Delta x = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{\Delta p}{\Delta x} \frac{r}{2}$$

Damit folgt für $r = d_i/2$ und einem Druckabfall von Δp über die Länge l :

$$\tau = \frac{\Delta p}{l} \frac{d_i}{4} = f(\Delta p, d_i, l)$$

- ii) Kritische Subspannung:
Umstellen ergibt:

$$l = \frac{\Delta p}{\tau_{krit}} \frac{d_i}{4} = \frac{2 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2}{10 \text{ N/m}^2} \frac{10^{-3} \text{ m}}{4} = 0.5 \text{ m}$$

d) **ML-Blutgefäßverzweigung:**

- i) Die Strömung im Kollateralgefäß setzt ein, sobald die Schubspannung zur Überwindung der Fließgrenze überschritten wird, die maximale Schubspannung wird dabei an der Gefäßwand erreicht.

$$\tau_{max} = \tau_w = \frac{\Delta p}{l} \frac{d}{4} \stackrel{!}{=} \tau_y$$

Die (unbekannte) Druckdifferenz ist dabei diejenige, die auch im Ursprungsgefäß zwischen den Punkten A und B anliegt.

$$\Delta p = \lambda \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{\rho}{2} \cdot \bar{u}^2 \quad \text{und mit} \quad \lambda = \frac{64}{Re} = \frac{64\eta}{\rho \bar{u} D}$$

$$\Delta p = \frac{64}{Re} \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{\rho}{2} \cdot \bar{u}^2 = \frac{64\eta}{\rho \bar{u} D} \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{\rho}{2} \cdot \bar{u}^2 = 32 \frac{\eta L \bar{u}}{D^2}$$

Einsetzen liefert:

$$\tau_y = \frac{\Delta p}{l} \frac{d}{4} = 32 \frac{\eta L \bar{u}}{D^2 l} \frac{d}{4} = \frac{8\eta L \bar{u}}{D^2 l} \quad \Rightarrow \quad \bar{u} = \frac{\tau_y l D^2}{8\eta L d}$$

Einsetzen der Zahlenwerte:

$$\bar{u} = \frac{3.2 \cdot 10^{-3} \text{ N/m}^2 \cdot 0.4 \text{ m} \cdot 0.005^2 \text{ m}^2}{8 \cdot 4 \cdot 10^{-3} \text{ N s/m}^2 \cdot 0.2 \text{ m} \cdot 0.0001 \text{ m}} = 0.05 \text{ m/s} = 5 \text{ cm/s}$$

- ii) Durch das Gerinnsel nehmen die Verluste zu \rightarrow bei konstanter mittlerer Ge-

geschwindigkeit nimmt der Druckabfall Δp zu \rightarrow Geschwindigkeit und Volumenstrom im Kollateralgefäß nehmen zu.

- iii) Sinkender Hämatokritwert \rightarrow geringere dyn. Viskosität $\eta \rightarrow$ geringerer Druckabfall im Ursprungsgefäß. Gleichzeitig: abnehmende Fließgrenze \rightarrow Strömung im Kollateralgefäß setzt auch bei niedrigerem Druckgefälle schon ein.

10 Musterlösung-Atemsystem

10.1 ML-Allgemeine Fragen zum Atemsystem

a) Modell der äußeren Atmung: Siehe Abbildung 10.1

Über Lungenatmung erfolgt die Aufnahme von Sauerstoff ins Gewebe (Ersatz des verbrauchten Sauerstoffs, Abgabe der erzeugten Kohlensäure/Abatmung von CO_2), der Gasaustausch bildet dabei Ende und Anfang eines Kreisprozesses zwischen Lungenatmung (äußere Atmung) und Gewebeatmung (innere Atmung). Der Blutkreislauf ermöglicht den Transport.

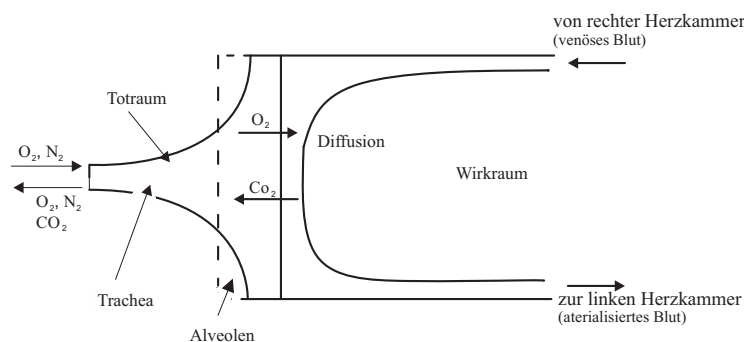


Abbildung 10.1: Modell der äußeren Atmung

b) Ermittlung des Druck-Volumen-Diagramms: Siehe Abbildung 10.2

c) Atemarbeit und Druck-Volumen-Diagramme:

Atemarbeit (umschlossene Fläche im Druck-Volumen-Diagramm):

$$W = \oint V dp$$

Diagramme: Siehe Abbildung 10.3

d) Compliance: Aus dem Druck-Volumendiagramm ermitteltes Verhältnis aus Volumen- und Druckdifferenz eines Atemzuges.

$$C_L = \frac{\Delta V}{\Delta p}$$

Dynamische Compliance liegt vor, wenn zwischen den Punkten des Wechsels von Inspiration auf Expiration bzw. Expiration auf Inspiration keine Gerade verläuft.

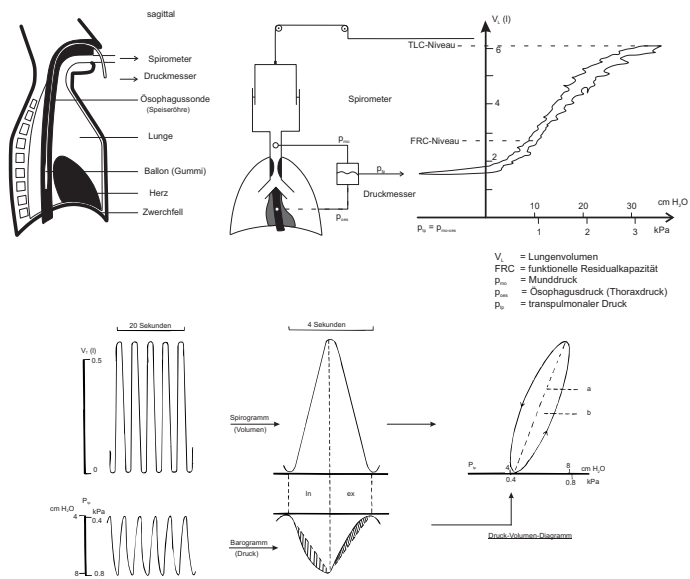


Abbildung 10.2: Ermittlung des Druck-Volumen-Diagramms der Atmung

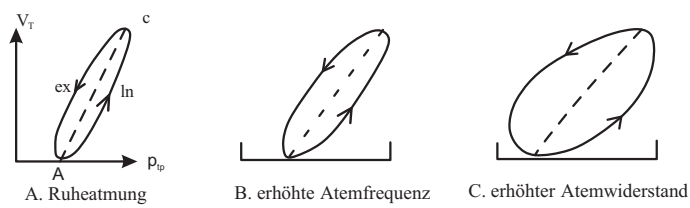


Abbildung 10.3: Druck-Volumen-Diagramms für Ruheatmung, erhöhte Atemfrequenz und gesteigertes Atemzugvolumen

e) Keine ML

10.2 ML-Evolutionstheorie

a)

$$W_0 = \Delta P \dot{Q}_0 = \frac{128 \mu l \dot{Q}_0^2}{\pi D_0^4}$$

$$W = \Delta P \dot{Q}_i = \Delta P \frac{\dot{Q}_0}{z_i} = \frac{128 \mu_i l_i (\dot{Q}_0)}{\pi D_i^4}$$

$$W = 128 \mu_i \left[\frac{l_0 \dot{Q}_0^2}{\pi D_i^4} + \sum_{i=1}^n \frac{l_0 (\dot{Q}_0)^2}{\pi D_i^4} \right]$$

b)

$$K = k \frac{\pi D_0^2}{4} l_0 + \sum_{i=0}^n k \frac{\pi D_i^2}{4} l_i$$

c)

$$F = W + K$$

$$\frac{\partial F}{\partial D_i} = \frac{\partial W}{\partial D_i} + \frac{\partial K}{\partial D_i} = 0$$

⇒

$$\sum_{i=1}^n \frac{128 \mu l_i \left(\frac{\dot{Q}_0}{z_0}\right)^2}{\pi D_i^5} (-4) + \sum_{i=1}^n k \frac{2\pi D_i}{4} l_i = 0$$

⇒

$$\frac{128 \mu l_i \left(\frac{\dot{Q}_0}{z_0}\right)^2}{\pi D_i^5} (-4) + k \frac{2\pi D_i}{4} l_i = 0$$

⇒

$$C_1 \frac{\left(\frac{\dot{Q}_0}{z_0}\right) l_i}{D_i^5} = C_2 D_i l_i$$

$$D_i^6 = C_3 \left(\frac{\dot{Q}_0}{z_0}\right)^2 \quad C_3 = \frac{C_1}{C_2}$$

$$D_i = C_3 \sqrt[3]{\frac{\dot{Q}_0}{z_0}}$$

⇒

$$D_i = D_0 \sqrt[3]{\frac{1}{z_i}}$$

d) Siehe Abbildung 10.4

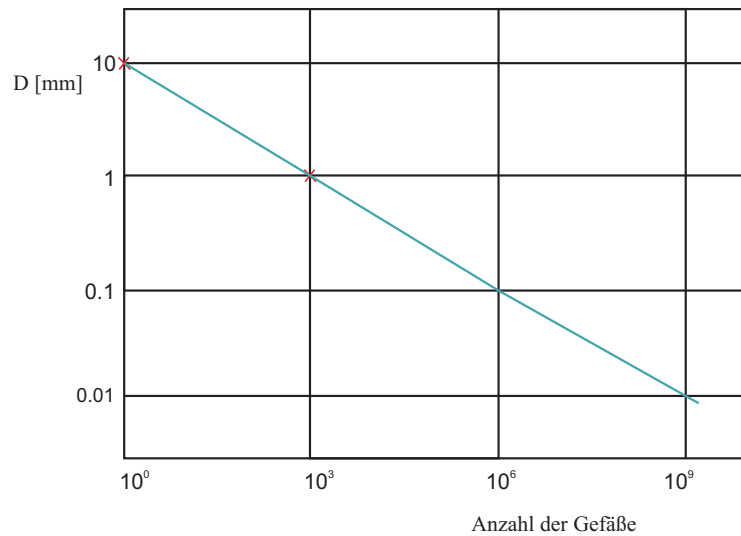


Abbildung 10.4: $D_0 = 10$, und beliebig $z_i = 1, 10^3, 10^6, \dots$ in Formel einsetzen.

10.3 ML-Alveolarer Gasaustausch

a) mit vorgegebener DGL und 'A' für O_2 sowie 'B' für die Membran folgt:

Stationärer Fall:

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} = 0 \quad \rightarrow \quad c_A = f(r) \quad \rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial r} \rightarrow \frac{d}{dr}$$

Hiermit und mit $D_{AB} = \text{const.}$ folgt dann:

$$0 = D_{AB} \cdot \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dc_{O_2}}{dr} \right)$$

Integration:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dc_{O_2}}{dr} \right) = 0 \quad \rightarrow \quad r^2 \frac{dc_{O_2}}{dr} = k_1$$

Zweite Integration:

$$\frac{dc_{O_2}}{dr} = \frac{k_1}{r^2} \quad \rightarrow \quad c_{O_2}(r) = -\frac{k_1}{r} + k_2$$

Bestimmung der Konstanten über Randbedingungen:

Für $r = R - \delta/2$: $C_{O_2} = C_{O_2,alv}$

Für $r = R + \delta/2$: $C_{O_2} = C_{O_2,blut}$

Einsetzen ergibt:

$$C_{O_2,alv} = -\frac{k_1}{R - \delta/2} + k_2 \quad \text{und} \quad C_{O_2,blut} = -\frac{k_1}{R + \delta/2} + k_2$$

Differenz:

$$C_{O_2,alv} - C_{O_2,blut} = \Delta C_{O_2} = k_1 \left(\frac{1}{R + \delta/2} - \frac{1}{R - \delta/2} \right)$$

bzw.

$$C_{O_2,alv} - C_{O_2,blut} = \Delta C_{O_2} = -\frac{\delta k_1}{R^2 - (\delta/2)^2}$$

Damit:

$$k_1 = -\frac{R^2 - (\delta/2)^2}{\delta} \Delta C_{O_2}$$

Für k_2 gilt:

$$k_2 = C_{O_2,alv} + \frac{k_1}{R - \delta/2} = C_{O_2,alv} - \frac{R^2 - (\delta/2)^2}{\delta(R - \delta/2)} \Delta C_{O_2} = C_{O_2,alv} - \frac{R + \delta/2}{\delta} \Delta C_{O_2}$$

Damit folgt schließlich:

$$C_{O_2}(r) = \frac{R^2 - (\delta/2)^2}{r\delta} \Delta C_{O_2} + C_{O_2,alv} - \frac{R + \delta/2}{\delta} \Delta C_{O_2}$$

und somit:

$$C_{O_2}(r) = C_{O_2,alv} + \left(\frac{R}{\delta} + \frac{1}{2} \right) \cdot \left(\frac{R - \delta/2}{r} - 1 \right) \Delta C_{O_2}$$

b) Bestimmung des molaren Sauerstoffgesamtflusses W_{O_2} :

Fluss über eine Modellalveole: $W_{O_2,alv} = N_{O_2,r} \Big|_{r=R} \cdot A_{alv}$

Gesamtfluss über alle Alveolen: $W_{O_2,alv} = N_{O_2,r} \Big|_{r=R} \cdot A_{ges}$

Für $N_{O_2,r}$ gilt:

- Kein Molenfluss in tangentialer Richtung, da $C_{O_2,alv} = C_{O_2,m} \neq (\varphi)$

- Konvektionseinflüsse können vernachlässigt werden, da wg. starrer Membran kein konvektiver Transport stattfindet:

Daraus folgt: Molenstrom: $N_{O_2,r} = -D_{O_2} \frac{dC_{O_2}}{dr}$

Für die Ableitung der Konzentration gilt:

$$\frac{\partial C_{O_2}(r)}{\partial r} = \left(\frac{R}{\delta} + \frac{1}{2} \right) \cdot \left(\frac{\delta/2 - R}{r^2} \right) \Delta C_{O_2}$$

bzw.

$$\left. \frac{\partial C_{O_2}(r)}{\partial r} \right|_{r=R} = \left(\frac{R}{\delta} + \frac{1}{2} \right) \cdot \left(\frac{\delta/2 - R}{R^2} \right) \Delta C_{O_2}$$

und somit:

$$W_{O_2,alv} = \left(\frac{R}{\delta} + \frac{1}{2} \right) \cdot \left(\frac{\delta/2 - R}{R^2} \right) \Delta C_{O_2} \cdot A_{ges}$$

10.4 ML-Oxygenator-Typen

10.4.1 ML-Membranoxygenator

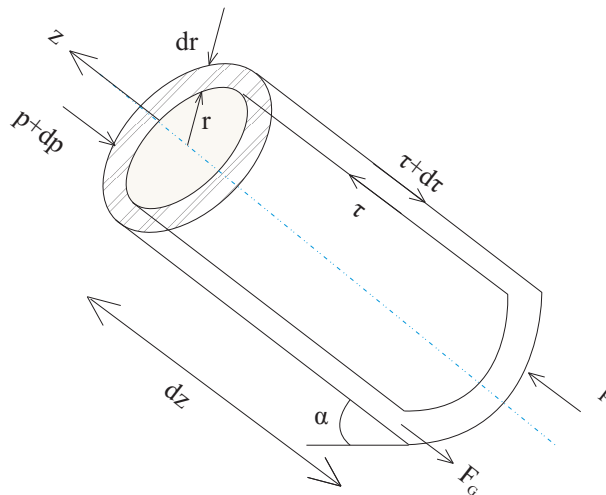


Abbildung 10.5: Kräftegleichgewicht

a) i) Kräftegleichgewicht an einem ringförmigen Element: Siehe Abbildung 10.5

$$p \cdot 2\pi r dr - (p + \frac{\partial p}{\partial z} dz) \cdot 2\pi r dr - \rho g 2\pi r dr \sin(\alpha) dz + \tau \cdot 2\pi r dz - (\tau + \frac{\partial \tau}{\partial r} dr) \cdot 2\pi (r + dr) dz = 0$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow -\frac{\partial p}{\partial z} 2\pi r dr dz - \rho g \sin(\alpha) 2\pi r dr dz - \frac{\partial \tau}{\partial r} 2\pi r dr dz - \tau 2\pi dr dz = 0 \\ &\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g \sin(\alpha) + \frac{\partial \tau}{\partial r} + \frac{\tau}{r} = 0 \\ &\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g \sin(\alpha) + \frac{1}{r} \frac{\partial(\tau r)}{\partial r} = 0 \end{aligned}$$

Daher ist $\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\Delta p_{zul}}{L}$, $\Delta p < 0$ in dieser VZ-Annahme, $p(z + dz) < p(z)$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial r}(\tau r) = -r \left(\frac{\Delta p_{zul}}{L} + \rho g \sin(\alpha) \right) \\ &\Rightarrow (\tau r) = -\frac{1}{2} r^2 \left(\frac{\Delta p_{zul}}{L} + \rho g \sin(\alpha) \right) + C_1 \\ &\Rightarrow (\tau) = -\frac{1}{2} r \left(\frac{\Delta p_{zul}}{L} + \rho g \sin(\alpha) \right) + \frac{C_1}{r} \end{aligned}$$

R.B. $\tau(r = 0) = 0 \quad \Rightarrow C_1 = 0$

$$\begin{aligned} \tau(r) &= -\eta(r) \frac{\partial u}{\partial r} \\ \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{1}{\eta(r)} \cdot \left(\frac{1}{2} r \left(\frac{\Delta p_{zul}}{L} + \rho g \sin(\alpha) \right) \right) \\ &= \frac{r + R}{\eta_0 R} \left(\frac{1}{2} r \left(\frac{\Delta p_{zul}}{L} + \rho g \sin(\alpha) \right) \right) \\ &= \frac{1}{\eta_0 R} \left(\frac{1}{2} r^2 \left(\frac{\Delta p_{zul}}{L} + \rho g \sin(\alpha) \right) + \frac{1}{2} r \cdot R \left(\frac{\Delta p_{zul}}{L} + \rho g \sin(\alpha) \right) \right) \\ u(r) &= \frac{1}{\eta_0 R} \cdot \left(\frac{\Delta p_{zul}}{L} + \rho g \sin(\alpha) \right) \cdot \left(\frac{1}{6} r^3 + \frac{1}{4} r^2 \cdot R \right) + C_2 \end{aligned}$$

mit $u(r = R) = 0$ folgt;

$$\begin{aligned} u(r) &= \frac{1}{\eta_0 R} \cdot \left(\frac{\Delta p_{zul}}{L} + \rho g \sin(\alpha) \right) \cdot \left(\frac{1}{6} (r^3 - R^3) + \frac{R}{4} (r^2 - R^2) \right) \\ u(r) &> 0 \quad \text{mit } \Delta p_{zul} < 0 \text{ und } |\Delta p_{zul}| > L \rho g \sin(\alpha) \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}\dot{Q} &= \int_0^R 2\pi r u(r) dr = \frac{2\pi}{\eta_0 R} \left(\frac{\Delta p_{zul}}{L} + \rho g \sin(\alpha) \right) \int_0^R \left(\frac{1}{6}(r^3 - R^3) + \frac{R}{4}(r^2 - R^2) \right) dr \\ &= -\frac{7\pi R^3}{12\eta_0} \left(\frac{\Delta p_{zul}}{L} + \rho g \sin(\alpha) \right)\end{aligned}$$

iii) In der Membran gilt im stationären Fall:

$$\begin{aligned}\frac{\partial c_A}{\partial t} &= 0; \quad v_r = v_z = 0; \quad \frac{\partial}{\partial z} = 0 \quad \text{da } c_A, c_i \neq f(z) \\ &\Rightarrow 0 = D_{AB} \left(\frac{\partial^2 c_A}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial c_A}{\partial r} \right) \\ &\Leftrightarrow 0 = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial c_A}{\partial r} + r \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial c_A}{\partial r} \right) \right) \\ &\Leftrightarrow 0 = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial c_A}{\partial r} \right) \\ &\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial c_A}{\partial r} \right) = 0 \\ &\Rightarrow r \cdot \frac{\partial c_A}{\partial r} = C_1 \\ &\Leftrightarrow \frac{\partial c_A}{\partial r} = \frac{C_1}{r} \\ &\Rightarrow c_a(r) = C_1 \ln(r) + C_2 \\ c_A(r=R) &= c_{02,i}; \quad c_A(r=R+\delta) = c_{02,a} \\ c_{02,i} &= C_1 \ln(R) + C_2 \\ c_{02,a} &= C_1 \ln(R+\delta) + C_2 \\ \Rightarrow c_{02,a} - c_{02,i} &= C_1 \ln\left(\frac{R+\delta}{R}\right) \\ C_1 &= \frac{c_{02,a} - c_{02,i}}{\ln\left(\frac{R+\delta}{R}\right)} \\ C_2 &= c_{02,a} - \frac{c_{02,a} - c_{02,i}}{\ln\left(\frac{R+\delta}{R}\right)} \cdot \ln(R+\delta) \\ c_a(r) &= C_1 \ln(r) + C_2 \quad \text{mit } r \in [R, R+\delta], C_1, C_2 \text{ s.o.}\end{aligned}$$

iv)

$$\begin{aligned}|W_{02}| &= 2\pi R L D_{02,M} \cdot \frac{\partial c_a}{\partial r} \Big|_{r=R} \\ &= 2\pi R L D_{02,M} \frac{C_1}{R} \\ &= 2\pi L D_{02,M} C_1 \\ &= 2\pi L D_{02,M} \frac{c_{02,a} - c_{02,i}}{\ln\left(\frac{R+\delta}{R}\right)}\end{aligned}$$

b) i)

$$\begin{aligned}
 -\tau(r) \cdot 2\pi r dz + p(z) \cdot \pi r^2 - p(z + dz)\pi r^2 &= 0 \\
 \Leftrightarrow -2\tau(r) dz - \frac{dp}{dz} dz r &= 0 \\
 \Leftrightarrow \tau + \frac{r}{2} \frac{dp}{dz} &= 0 \\
 \frac{dp}{dz} &= \frac{\Delta p}{l} \\
 \Leftrightarrow \tau &= -\frac{r}{2} \frac{\Delta p}{l}
 \end{aligned}$$

mit: $\tau = \tau_0 - \eta \frac{du}{dr}$ für $\tau \geq \tau_0$

$$\begin{aligned}
 \tau_0 - \eta \frac{du}{dr} &= -\frac{r}{2} \frac{\Delta p}{l} \\
 \Leftrightarrow \frac{du}{dr} &= \frac{1}{\eta} \left(\tau_0 + \frac{r}{2} \frac{\Delta p}{l} \right)
 \end{aligned}$$

RB: $u(r = R) = 0$

$$\begin{aligned}
 \Leftrightarrow \int_u^0 d\tilde{u} &= \frac{1}{\eta} \int_r^R \left(\tau_0 + \frac{\tilde{r}}{2} \frac{\Delta p}{l} \right) d\tilde{r} \\
 -u &= \frac{1}{\eta} \left[\tau_0 (R - r) + \frac{1}{4} (R^2 - r^2) \frac{\Delta p}{l} \right] \\
 \Leftrightarrow u_2 &= \frac{1}{\eta} \left[-\frac{\Delta p}{4l} (R^2 - r^2) - \tau_0 (R - r) \right] \quad (\text{gilt für } r^* \leq r \leq R; \quad \tau \geq \tau_0)
 \end{aligned}$$

für $r^* : \tau = \tau_0 \Rightarrow \tau_0 = -\frac{r^*}{2} \frac{\Delta p}{l}$

$$\Rightarrow r^* = -\frac{2\tau_0 l}{\Delta p} \quad \text{mit} \quad \Delta p < 0$$

für $0 \leq r \leq r^* : u_1 = u_2(r^*) = \text{const.}$

ii)

$$\begin{aligned}
 \dot{Q} &= \int_0^{r^*} u_1 2\pi r dr + \int_{r^*}^R u_2(r) 2\pi r dr \\
 &= \pi r^2 u_1 + 2\pi \int_{r^*}^R u_2(r) r dr
 \end{aligned}$$

iii) Annahmen:

- kein konvektiver Transport in der Membran
- Diffusion in radialer Richtung \gg Diffusion in axialer Richtung

- stationäres Problem

⇒ Molenstrombilanz: Siehe Abbildung 10.6

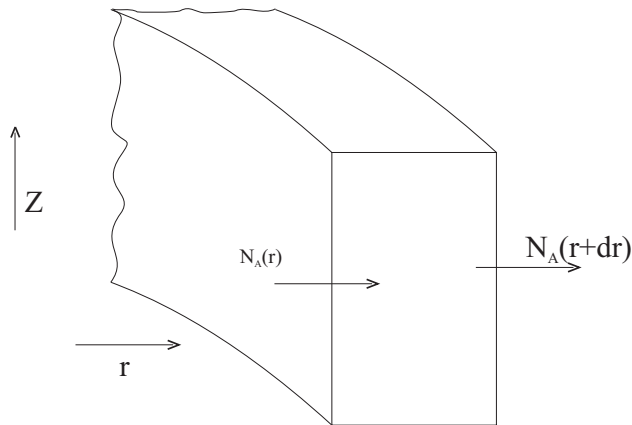


Abbildung 10.6: Molenbilanz

$$\begin{aligned}
 N_a(r) \cdot 2\pi r l - (N_a(r + dr)) \cdot 2\pi(r + dr)l &= 0 \\
 \Leftrightarrow N_a(r)r - (N_a(r) + \frac{\partial N_a}{\partial r} dr)(r + dr) &= 0 \\
 \Leftrightarrow -N_a dr - \frac{\partial N_a}{\partial r} r dr &= 0 \\
 \Leftrightarrow \frac{d(N_a r)}{dr} &= 0 \\
 \Leftrightarrow N_a &= \frac{K_1}{r}
 \end{aligned}$$

1. Ficksches Gesetz: $N_a = -D_a \frac{\partial c_{02}}{\partial r}$

$$\begin{aligned}
 \Leftrightarrow -D_a \frac{\partial c_{02}}{\partial r} &= \frac{K_1}{r} \\
 \Leftrightarrow \frac{\partial c_{02}}{\partial r} &= -\frac{K_1}{D_a r} \\
 \Leftrightarrow c_a &= -\frac{K_1}{D_a} \ln(r) + K_2
 \end{aligned}$$

Bestimmung der Konstanten:

$$\begin{aligned}
 c_{0_2}|_{r=R} &= c_{0_2,i} = c_{a,i} \\
 c_{0_2}|_{r=R_a} &= c_{0_2,a} = c_{a,a} \\
 c_{a,a} - c_{a,i} &= \frac{K_1}{D_a} \ln\left(\frac{R}{R_a}\right) \\
 K_1 &= D_a(c_{a,a} - c_{a,i}) \frac{1}{\ln\left(\frac{R}{R_a}\right)} \\
 K_2 &= c_{a,i} + \frac{K_1}{D_a} \ln(R) = c_{a,i} + (c_{a,a} - c_{a,i}) \frac{\ln(R)}{\ln\left(\frac{R}{R_a}\right)} \\
 c_a(r) &= (c_{a,a} - c_{a,i}) \frac{\ln\left(\frac{R}{r}\right)}{\ln\left(\frac{R}{R_a}\right)} + c_{a,i}
 \end{aligned}$$

iv)

$$\begin{aligned}
 W_{0_2} &= N_{0_2}|_r A(r) \\
 &= \frac{K_1}{R} \cdot (2\pi RL) \\
 &= K_1 \cdot 2\pi L \\
 &= D_{0_2,M} \cdot (c_{a,a} - c_{a,i}) \frac{1}{\ln\left(\frac{R}{R_a}\right)} \cdot 2\pi L
 \end{aligned}$$

c) i) Bilanz am Ringelement: voll ausgebildete Strömung \Rightarrow stationär:

$$\begin{aligned}
 \tau &\neq f(z); & p &\neq f(r) \\
 \vec{v} &\neq f(z) \rightarrow |\vec{v}| = u
 \end{aligned}$$

$$\sum F_z = 0$$

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow \tau dz 2\pi r - \left(\tau + \frac{\partial \tau}{\partial r} dr\right) dz 2\pi(r + dr) + p 2\pi r dr - \left(p + \frac{\partial p}{\partial z} dz\right) 2\pi r dr - \rho g 2\pi r dr dz = 0 \\
 &\Leftrightarrow \tau 2\pi r dz - \tau 2\pi r dz - \tau 2\pi dz dz - \frac{\partial \tau}{\partial r} 2\pi r dr dz - \frac{\partial \tau}{\partial r} dr dz 2\pi r + p 2\pi r dr + \frac{\partial p}{\partial z} 2\pi r dz dr \\
 &\quad - p 2\pi r dr - \rho g 2\pi r dr dz = 0 \quad | : 2\pi r dr \\
 &\Leftrightarrow -\frac{\tau}{r} - \frac{\partial \tau}{\partial r} - \frac{\partial \tau}{\partial r} \frac{dr}{r} + \frac{\partial p}{\partial z} - \rho g = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \frac{\partial p}{\partial z} - \rho g - \frac{\tau}{r} - \frac{\partial \tau}{\partial r} \left(1 + \frac{dr}{r}\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\partial p}{\partial z} - \rho g - \frac{\tau}{r} - \frac{\partial \tau}{\partial r} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\partial p}{\partial z} - \rho g - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r}(\tau \cdot r)\right) &= 0 \end{aligned}$$

1.Integration:

$$\begin{aligned} \int \frac{\partial p}{\partial z} r \, dr - \int \rho g r \, dr - \int \left(\frac{\partial}{\partial r}(\tau \cdot r)\right) dr &= C_1 \\ \Leftrightarrow \frac{\partial p}{\partial z} \frac{r^2}{2} - \rho g \frac{r^2}{2} - \frac{\partial}{\partial r} \tau \cdot r &= C_1 \end{aligned}$$

1.R.B.:

$$\begin{aligned} r = 0 \rightarrow \tau = 0 &\Rightarrow C_1 = 0 \\ \Rightarrow \tau &= \frac{r}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g\right) \end{aligned}$$

Newtonsches Fluid:

$$\tau = -\eta \frac{du}{dr}$$

2.Integration:

$$\begin{aligned} \int \frac{du}{dr} dr &= -\left(\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g\right) \frac{1}{\eta} \int \frac{r}{2} dr + C_2 \\ \Leftrightarrow u(r) &= \frac{1}{2\eta} \left(\rho g - \frac{\partial p}{\partial z}\right) \frac{r^2}{2} + C_2 \end{aligned}$$

2.R.B.:

$$\begin{aligned} r = R \rightarrow u = 0 &\Rightarrow C_2 = -\frac{1}{4\eta} \left(\rho g - \frac{\partial p}{\partial z}\right) R^2 \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= +\frac{\Delta p_{zul}}{L} \quad \text{mit} \quad \Delta p_{zul} > 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow u(r) = \frac{R^2}{4\eta} \left(\frac{\Delta p_{zul}}{L} - \rho g\right) \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right)$$

ii)

$$\begin{aligned}\dot{Q} &= \int_0^R u(r) 2\pi r \, dr = \frac{2\pi R^2}{4\eta} \left(\frac{\Delta p_{zul}}{L} - \rho g \right) \int_0^R \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right) \cdot r \, dr = \frac{\pi R^2}{2\eta} \left(\frac{\Delta p_{zul}}{L} - \rho g \right) \left[\frac{R^2}{2} - \frac{R^2}{4} \right] \\ \Leftrightarrow \dot{Q} &= \frac{\pi R^4}{8\eta} \left(\frac{\Delta p_{zul}}{L} - \rho g \right)\end{aligned}$$

$$\text{iii) } \underbrace{\frac{\partial c_A}{\partial t}}_{=0, \text{ da stat.}} + \underbrace{v_r \frac{\partial c_A}{\partial r} + v_z \frac{\partial c_A}{\partial z}}_{=0, \text{ da keine Konvektion}} = D_{AB} \left(\frac{\partial^2 c_A}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial c_A}{\partial r} \right)$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow 0 &= D_{AB} \left(\frac{\partial^2 c_A}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial c_A}{\partial r} \right) \\ \Leftrightarrow 0 &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial c_A}{\partial r} \right) \right) \\ \Leftrightarrow 0 &= \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial c_A}{\partial r} \right)\end{aligned}$$

1. Integration:

$$c_A(r) = C_3 \ln(r) + C_4 \quad \text{für } R \leq r \leq R + \delta$$

$$\text{1.R.B.} \quad r = R \quad \Rightarrow \quad c_A = c_{O_2,i}$$

$$\text{2.R.B.} \quad r = R + \delta \quad \Rightarrow \quad c_A = c_{O_2,a}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow C_3 &= \frac{c_{O_2,i} - c_{O_2,a}}{\ln\left(\frac{R}{R+\delta}\right)} \\ \Rightarrow C_4 &= c_{O_2,i} - C_3 \ln(R)\end{aligned}$$

iv) Blutschädigung gering $\Rightarrow \tau_{max}$ möglichst klein!

$$\tau_{max} = \tau(r = R) = \frac{R}{2} \left(\frac{\Delta p_{zul}}{L} - \rho g \right) \quad (\text{siehe Teil (i)})$$

Bedingungen:

- 1) Gesamtaustauschfläche M verdoppeln: $M^* = 2M$
- 2) Blutvolumenstrom gesamt soll gleich bleiben: $\dot{Q}_{ges}^* = \dot{Q}$

\rightarrow Kapillaranzahl verdoppeln:

$$\begin{aligned}
n^* &= 2n; \quad R^* = R \\
\dot{Q}_{ges}^* &= \dot{Q}_{ges} \\
\Leftrightarrow n^* \cdot \dot{Q}^* &= n\dot{Q} \\
\Rightarrow \dot{Q}^* &= \frac{1}{2}\dot{Q} \\
\Rightarrow \Delta p_{zul}^* &= \frac{1}{2}(\Delta p_{zul} + \rho g L) \quad (\text{siehe Teil(ii)}) \\
\Rightarrow \tau_{max}^* &= \frac{\tau_{max}}{2}
\end{aligned}$$

→ Radius verdoppeln:

$$\begin{aligned}
n^* &= n; \quad R^* = 2R \\
\dot{Q}_{ges}^* &= \dot{Q}_{ges}
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi R^{*4}}{8\eta} \left(\frac{\Delta p_{zul}^*}{L} - \rho g \right) \cdot n^* = \frac{\pi R^4}{8\eta} \left(\frac{\Delta p_{zul}}{L} - \rho g \right) \cdot n \quad (\text{siehe Teil ii})$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \Delta p_{zul}^* &= \frac{1}{16}(\Delta p_{zul} + 15\rho g L) \\
\tau_{max}^* &= \frac{R}{2} \left(\frac{\Delta p_{zul}}{16L} - \frac{1}{16}\rho g \right) \\
&\Leftrightarrow \tau_{max}^* = \frac{\tau_{max}}{16}
\end{aligned}$$

d.h. hinsichtlich der strömungsmechanischen Blutschädigung ist die Radius-
erhöhung günstiger!

10.4.2 ML-Blasenoxxygenator

- a)
- gute Durchmischung des Blaseninhaltes ($c \neq f(r)$)
 - keine nennenswerte Änderung der Konzentration in der Blase $\frac{\partial c}{\partial t} = 0$
 - $v_b = const$
 - v_b klein, so dass laminare Strömung an der Blase
 - sehr geringe Eindringtiefe des Sauerstoffs $\delta \ll R_B$
 - ebenes Problem statt Polarkoordinaten
- b) i) Stationär, ausgebildet, laminare Strömung

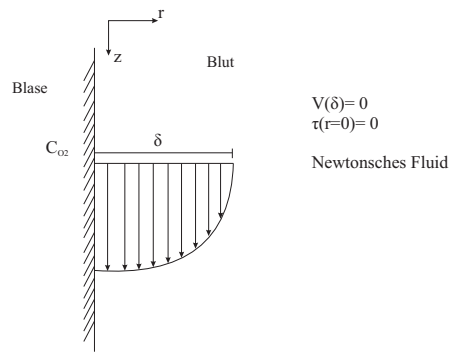


Abbildung 10.7: Blasenoxxygenator

Siehe Abbildung 10.7, 10.8

$$\sum F_z = 0$$

$$\tau = -\eta \frac{\partial u}{\partial r}$$

\Rightarrow

$$\rho g + \eta \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = 0$$

1. Integral:

$$\rho g r + C_1 = -\eta \frac{\partial u}{\partial r} = \tau(r)$$

R.B. $\tau(r=0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0$

2. Integral :

$$u(x) = -\frac{\rho g}{2\eta} x^2 + C_2$$

R.B. $u(r=\delta) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = \frac{\rho g \delta^2}{2\eta}$

$$u_z(r) = \underbrace{\frac{\rho g \delta^2}{2\eta}}_{=u_{max}} \left(1 - \left(\frac{x}{\delta}\right)^2\right)$$

$$-N_{az} dr - N_{az} dr - \frac{\partial N_{az}}{\partial z} dz dr + N_{ax} dz - N_{ar} dz - \frac{\partial N_{ar}}{\partial r} dr dz = 0$$

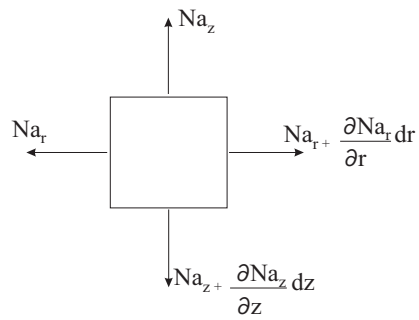


Abbildung 10.8: Blasenoxxygenator

In r-Richtung nur Diffusion $\Rightarrow N_{ar} = -D_{O_2} \frac{\partial C_A}{\partial r}$

In z-Richtung nur Konvektion $\Rightarrow N_{az} = C \cdot M(r)$

$$u(r) \frac{\partial C_A}{\partial z} - D_{O_2} \frac{\partial^2 C^2}{\partial r^2} = 0$$

geringe Eindringtiefe $\Rightarrow \frac{r}{\delta} \ll 1$

$$\Rightarrow \frac{\partial C}{\partial z} = \frac{D_{O_2}}{u_{max}} \cdot \frac{\partial^2 C^2}{\partial r^2}$$

ii)

$$\frac{C_A}{C_{A0}} = 1 - \operatorname{erf} \left[\frac{x}{\sqrt{4D_{O_2} \cdot \frac{z}{u_z}}} \right]$$

$$N_{ax} = -D_{O_2, Blut} \cdot \frac{\partial C_A}{\partial x} \Big|_{x=0}$$

$$N_{ax} = -D_{O_2, Blut} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \exp \left(\frac{-x}{\sqrt{4D_{O_2} \cdot \frac{z}{u_z}}} \right)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{4D_{O_2} \cdot \frac{z}{u_z}}} \Big|_{x=0}$$

$$N_{ax} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{4D_{O_2} \cdot \frac{z}{u_z}}}$$

iii)

$$W = \int N_a dA_A = N_a |_{(x=0)} \cdot A = N_a |_{(x=0)} \cdot 4D^2$$

10.4.3 ML-Filmoxygenator

- a) i) • voll ausgebildete, rotationssymmetrische Strömung
Bilanz am Ringelement:

$$\begin{aligned} \sum F_z &= 0 \\ \Rightarrow \tau dz 2\pi r - \left(\tau + \frac{\partial \tau}{\partial r} dr\right) 2\pi(r + dr) dz - \rho g 2\pi r dr dz &= 0 \\ \Leftrightarrow \tau + r \frac{\partial \tau}{\partial r} + \rho g r &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(\tau r) &= -\rho g \\ \Rightarrow \tau r &= -\rho g \frac{r^2}{2} + c_1 \end{aligned}$$

$$\text{R.B.1: } \tau(r = R + \delta) = 0 \Rightarrow c_1 = \frac{\rho g}{2} (R + \delta)^2$$

$$\Rightarrow \tau = \rho g \left[\frac{(R + \delta)^2}{2r} - \frac{r}{2} \right]$$

$$\text{Newton'sches Fluid} \quad \Rightarrow \tau = -\eta \frac{du}{dr} = \rho g \left[\frac{(R + \delta)^2}{2r} - \frac{r}{2} \right]$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow du &= -\frac{\rho g}{\eta} \left[\frac{(R + \delta)^2}{2r} - \frac{r}{2} \right] dr \\ \Rightarrow u(r) &= -\frac{\rho g}{\eta} \left[\frac{(R + \delta)^2}{2} \ln(r) - \frac{r^2}{4} \right] + C_2 \end{aligned}$$

$$\text{R.B.: } u(r = R) = 0$$

$$\Rightarrow C_2 = \frac{\rho g}{\eta} \left[\frac{(R + \delta)^2}{2} \ln(R) - \frac{R^2}{4} \right]$$

$$\Rightarrow u(r) = -\frac{\rho g}{\eta} \left[\frac{(R + \delta)^2}{2} \ln(r - R) - \frac{r^2 - R^2}{4} \right]$$

- Bilanz an der Platte:

$$\begin{aligned} \sum F_z &= 0 \\ \tau dx dz - \left(\tau + \frac{\partial \tau}{\partial x} dx \right) dy dz + \rho g dx dy dz &= 0 \\ \frac{\partial \tau}{\partial x} &= \rho g \end{aligned}$$

Integral:

$$\rho g x + C_1 = \tau = -\eta \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\text{R.B. } \tau(x = \delta) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = -\rho g \delta$$

Integral :

$$u(x) = -\frac{\rho g}{\eta} \left(\frac{x^2}{2} + \delta x + C_2 \right)$$

$$\text{R.B. } u(x = 0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0$$

$$u(x) = -\frac{\rho g}{\eta} \left(\frac{x^2}{2} - \delta x \right)$$

11 Musterlösung-Bionik und Messsysteme

11.1 ML-Allgemeine Fragen zur Strömungssimulation

- a) Ziele der technischen Strömungssimulation:
Gewinnung vorläufiger Daten zu Funktion und Verhalten eines komplexen Originals zwecks weiterer Planung; Detailuntersuchung komplexer Strömungsvorgänge; Simulation und Untersuchung von Vorgängen, die am Original nicht beobachtbar sind; Nachbildung von Originalbeobachtungen zur Gewinnung u/o Bestätigung physikalischer Vorstellungen, Einflussgrößen und Wechselwirkungen; Erarbeiten von Vorgaben, Randbedingungen u/o Vergleichswerten für die mathematische Simulation; Eckwert- u/o Feld- Überprüfung von Ergebnissen aus anderen Messungen oder Rechnungen; Prüfung von Eigenschaften und des Verhaltens von Prüfobjekten, z.B. zwecks Methodenvergleich (z.B. Strömungsbild/EDO; Labor/Patient), Funktionskontrolle, Qualitätsprüfung;
- b) Vorgaben zur technischen Modellierung:
Hinreichende Beschreibbarkeit des Originals; Liste der Beschreibungsparameter und Parameterbereiche zum Original; technische Modellierung muss physikalisch möglich sein; Zweckmäßigkeit (zielgerecht, durchführbar, sicher, verwertbar [Verkauf]); hinreichende eindeutige Übertragbarkeit der Ergebnisse; zulässiger Aufwand (Zeit, Kosten für Planung, Konstruktion, Fertigung, Betrieb, Wartung, Entsorgung); Vorteil gegenüber anderen Simulationsverfahren; Definition der Simulationsaufgabe mit Beobachtungs- und Messgrößen; Definition der Beobachtungs- und Messaufgaben zum technischen Modell; Übertragung des Originals in eine technische Modellvorstellung; Festlegung von Vorgaben, Parametern, Funktionen und Variationsbereichen; technische Beschreibung des Modells: Zeichnungen, Stücklisten; Ausführungs- und Betriebsanweisungen; hinreichend gute Fertigung des Modells; geeignete und hinreichende Beobachtungs- und Messtechnik. Geeignete und hinreichende Auswertemethode und Dokumentationstechnik.
- c) Physikalische Ähnlichkeit:
Aus der Forderung nach hinreichender und eindeutiger Übertragbarkeit der Untersuchungsergebnisse vom Modellversuch auf das Original folgt, dass Übertragungsregeln aller für das physikalische System wichtigen Größen bekannt sein müssen. Dies ist allgemein nur gewährleistet, wenn auch das Modell und dessen Betriebszustände entsprechenden Regeln entsprechen. Sind solche Regeln für Original und Modell vorhanden oder festgelegt, so bezeichnet man dieses als physikalische Ähnlichkeit zwischen Original und Modell.
- d) Die Dimension erfasst die Qualität der physikalischen Größe, die Einheit ihre Quan-

tität. Relative Maße werden aus Größen gleicher Qualität (also gleicher Dimension) gebildet. Ihre Dimension ist 1.

- e) Kennzahlen sind Größen, die in dimensionsloser Form die Übertragungsregeln aller für ein physikalisches System wichtigen Größen beschreiben (für ähnliche Systeme sind auch die von den dimensionsbehafteten Größen abgeleiteten dimensionslosen Größenverhältnisse gleich, d.h. es besteht Übertragbarkeit vom Modell auf das Original). Größenverhältnisse, die die Ähnlichkeit definieren und davon abgeleitete Größenverhältnisse gelten für alle ähnlichen Systeme. Beziehungen zwischen Größen, die ein System beschreiben, lassen sich in Beziehungen zwischen den Größenverhältnissen umschreiben, deren Anzahl geringer ist als die der ursprünglichen Größen. Sie gelten allgemeiner, da sie auf alle ähnlichen Systeme anwendbar sind. Die Größenverhältnisse brauchen nicht nur aus zwei einzelnen Größen gleicher Einheit gebildet werden, sondern können auch Potenzprodukte verschiedenartiger physikalischer Größen sein, die dann aber die gleiche Einheit haben.

f) Definitionen für Kennzahlen:

- i) Euler-Zahl Eu : Druckverlust bei durchströmten Körpern.

$$Eu = \frac{\Delta p}{\rho u^2} = \frac{\text{Druckkraft}}{\text{Trägheitskraft}}$$

- ii) Reynolds-Zahl Re : dynamisches Strömungsverhalten hinsichtlich Reibungseinfluss

$$Re = \frac{uL}{\nu} = \frac{\text{Trägheitskraft}}{\text{Zähigkeitskraft}}$$

- iii) Strouhal-Zahl Sr : Beschreibung instationärer (periodischer) Strömungsvorgänge

$$Sr = \frac{L}{ut} = \frac{Lf}{u} = \frac{\text{lokale Beschleunigung}}{\text{konvektive Beschleunigung}}$$

- iv) Buckingham'sche π -Theorem beschreibt, wie eine physikalisch sinnvolle Gleichung mit n dimensionsbehafteten Größen in eine Gleichung mit $n-m$ dimensionslosen Größen umgeschrieben wird, wobei m die Anzahl der verwendeten unabhängigen Grundgrößen ist. Weiterhin ist es durch das Buckingham'sche π -Theorem möglich, dimensionslose Kennzahlen zu einem Problem aus den Ausgangsgrößen zu ermitteln, auch wenn der exakte Zusammenhang in Form einer Gleichung noch nicht bekannt ist.

11.2 ML-Messverfahren

- a) Grundzüge der Particle-Image Velocimetry:
Optische Messmethode, berührungsloses Messverfahren, Ganzfeldmethode, Verfahren der Strömungssichtbarmachung erlaubt qualitative Aussagen über die Strömung in der Messebene, zusätzlich quantitative Aussagen durch Bestimmung von Partikelverschiebungen, hohe Auflösung der Strömungsstruktur, komplexer Versuchsaufbau, teure Messausrüstung, hohe Sicherheitsanforderungen
- b) Funktionsprinzip der Particle-Image Velocimetry:
Geschwindigkeitsmessverfahren basierend auf der Verfolgung von dem Fluid zugegebenen Tracern
- Zuführung von Partikeln in die Strömung (Seeding)
 - Zweifache Beleuchtung der Partikel in einem Laserlichtschnitt kurz hintereinander ergeben ein Doppelbild
 - Detektion des von den Partikeln gebeugten Lichts mit einer Kamera
 - Bestimmung der Partikelverschiebung und Berechnung des Geschwindigkeitsvektorfeldes
 - Nachbearbeitung des Vektorfeldes (Fehlvektoreliminierung, Berechnung abgeleiteter Größen)
- c) Unterschiede zwischen PIV und LDA:
- PIV: Ganzfeldmethode, Kalibration notwendig, Doppelpulstechnik
 - LDA: punktueller Messverfahren, absolute Messung, kontinuierliche Messung, sehr hohe örtliche und zeitliche Auflösung (keine Kalibration)
- d) PIV: globales Geschwindigkeitsfeld (Wirbel, Totwassergebiete, Rückströmungen) kann mit der PIV sehr schnell erfasst werden (Ganzfeldmessung).
LDA würde einen sehr hohen zeitlichen Aufwand erfordern, da für die Analyse des globalen Geschwindigkeitsfeldes sehr viele Messpunkte anzufahren wären.

11.3 ML-Biologische Strömungsanpassung

- a) Widerstandanteile:
Der Gesamtwiderstand setzt sich im Wesentlichen aus folgenden Anteilen zusammen:
- Siehe Abbildung 11.1
Reibungs- oder Oberflächenwiderstand D_R , hervorgerufen durch die Zähigkeit realer Fluide, hängt im Wesentlichen von der benetzten Oberfläche ab.
 - Druck- oder Formwiderstand D_D , Ablösung der Grenzschicht infolge der Trägheit des strömenden Mediums, hängt von der Körperform ab. Reibungs- und Formwiderstand bilden zusammen den Profilwiderstand D_p
 - Induzierter Widerstand D_i , entsteht durch Umströmung der Flügelenden bei Flügeln endlicher Streckung

- Wellenwiderstand D_W
- Interferenzwiderstand D_I

$$D = \underbrace{D_R + D_D}_{D_P} + D_i + D_W + D_I$$

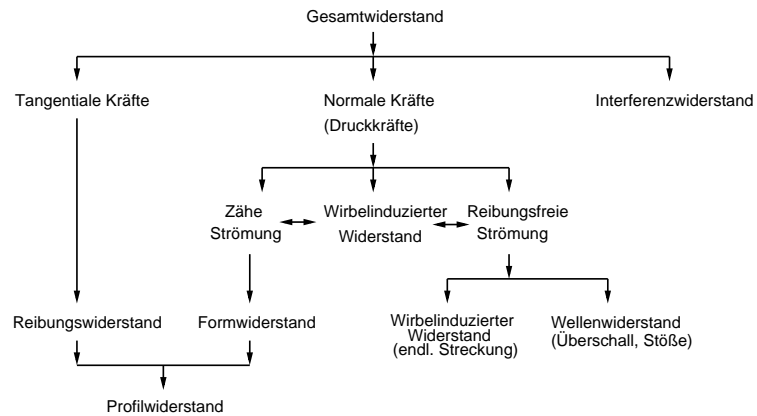


Abbildung 11.1: Widerstandsanteile

b) Reynoldszahlverlauf: Siehe Abbildung 11.2

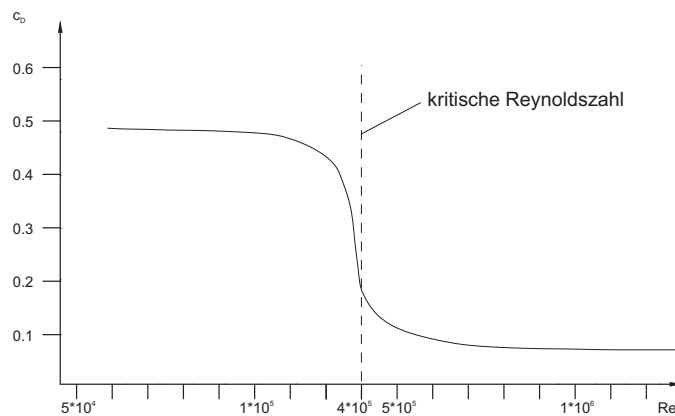


Abbildung 11.2: reynolds-kugel

- c) Siehe Abbildung 11.3
- d) ML
- e) Siehe Abbildung 11.4
- f) ML
- g) ML
- h) ML

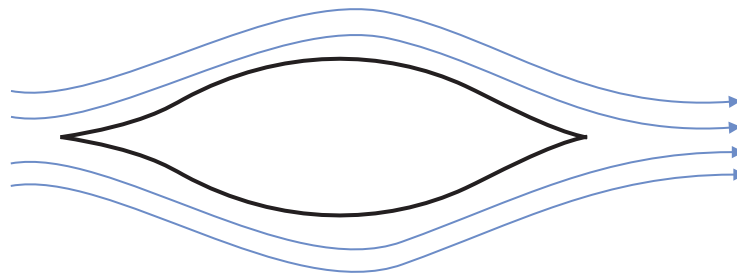


Abbildung 11.3: Widerstandsoptimierte Körperform für ein Kleinstlebewesen

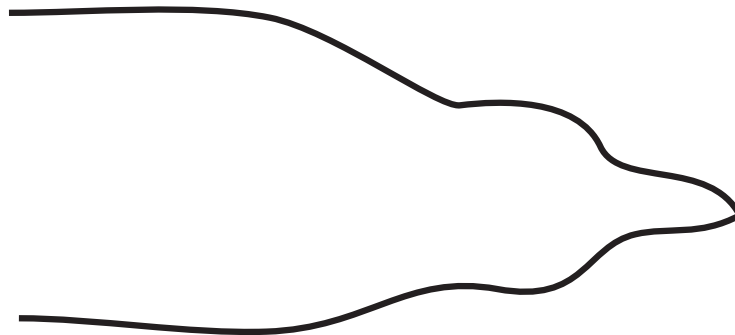


Abbildung 11.4: Strömungsangepasste Form des Kopfes eines Eispinguins

11.4 ML-Vogelflug

a) Berechnung der Reynoldszahl:

$$Re = \frac{u_{\infty} l}{\nu} = \frac{\rho u_{\infty} l}{\eta} = \frac{1.184 \text{ kg/m}^3 \cdot 10 \text{ m/s} \cdot 0.1 \text{ m}}{1.8155 \cdot 10^{-5} \text{ kg/(m} \cdot \text{s)}} = 65216$$

b) Bestimmung der Anströmgeschwindigkeit:
Randbedingung:

$$Re_{H_2O} \stackrel{!}{=} Re_L$$

Daraus folgt:

$$Re_L = \frac{\rho_{H_2O} u_{\infty, H_2O} l}{\eta_{H_2O}} \rightarrow u_{\infty, H_2O} = \frac{\eta_{H_2O} Re_L}{\rho_{H_2O} l}$$

Einsetzen liefert:

$$u_{\infty, H_2O} = \frac{0.891 \cdot 10^{-3} \text{kg}/(\text{m} \cdot \text{s}) \cdot 65216}{997 \text{kg}/\text{m}^3 \cdot 0.1 \text{m}} = 0.583 \text{m}/\text{s}$$