

AERODYNAMISCHES INSTITUT
der Rheinisch - Westfälischen
Technischen Hochschule Aachen
Univ.-Prof. Dr.-Ing. W. Schröder

Klausur

Aerodynamik II

02. 09. 2019

M U S T E R L Ö S U N G
E I N S I C H T N A H M E

Hinweis:

Achten Sie darauf, ob Sie alle Aufgaben erhalten haben.

Klausur Aerodynamik II

Fragenteil, Skelett-Theorie und linearisierte Potentialtheorie, Traglinientheorie

Integrale und Additionstheoreme

Additionstheoreme

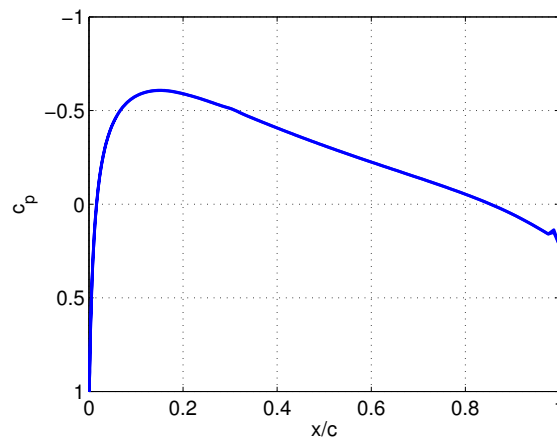
- $\sin(x \pm y) = \sin(x) \cdot \cos(y) \pm \sin(y) \cdot \cos(x)$
- $\cos(x \pm y) = \cos(x) \cdot \cos(y) \mp \sin(x) \cdot \sin(y)$
- $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
- $\sin(2x) = 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$
- $\sin(x) = 2 \cdot \sin(x/2) \cdot \cos(x/2)$
- $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$
- $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$
- $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$
- $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$
- $\tan\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \sin(x) = 1 - \cos(x)$
- $\sin(x) \cdot \sin(nx) = -\frac{1}{2}(\cos[(n+1)x] - \cos[(n-1)x])$
- $\sin[(n+1)x] - \sin[(n-1)x] = 2 \cdot \cos(nx) \cdot \sin(x)$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(n\varphi_p) \cdot \sin(n\varphi) = \frac{1}{4} \ln\left(\frac{1 - \cos(\varphi_p + \varphi)}{1 - \cos(\varphi_p - \varphi)}\right)$

Integrale

- $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \cdot \ln(ax+b)$
- $\int \frac{x}{ax+b} dx = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2} \cdot \ln(ax+b)$
- $\int \frac{x^2}{X} dx = \frac{1}{a^3} \left[\frac{1}{2}(X) - 2b(X) + b^2 \ln(X) \right]$
mit $X = ax+b$
- $\int \sin(ax) dx = -\frac{\cos(ax)}{a}$
- $\int \cos(ax) dx = +\frac{\sin(ax)}{a}$
- $\int \sin^2(ax) dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4a} \sin(2ax)$
- $\int \cos^2(ax) dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4a} \sin(2ax)$
- $\int \sin^3(ax) dx = \frac{\cos^3(ax)}{3a} - \frac{\cos(ax)}{a}$
- $\int \cos^3(ax) dx = -\frac{\sin^3(ax)}{3a} + \frac{\sin(ax)}{a}$
- $\int \cos^4(ax) dx = \frac{3}{8}x + \frac{\sin(2ax)}{4a} + \frac{\sin(4ax)}{32a}$
- $\int \sin(ax) \cos(ax) dx = \frac{\sin^2(ax)}{2a}$
- $\int_0^{\pi} \cos(n \cdot \varphi) \cdot \cos(p \cdot \varphi) d\varphi = \begin{cases} \pi/2 & n = p \\ 0 & n \neq p \end{cases}$
- $\int_0^{\pi} \sin(n \cdot \varphi) \cdot \sin(p \cdot \varphi) d\varphi = \begin{cases} \pi/2 & n = p \\ 0 & n \neq p \end{cases}$
- Glauert-Integral
 $\int_0^{\pi} \frac{\cos(n \cdot \varphi')}{\cos(\varphi) - \cos(\varphi')} d\varphi' = -\pi \cdot \frac{\sin(n \cdot \varphi)}{\sin(\varphi)}$
- $\int \cos(ax) \cdot \cos(bx) dx = \frac{\sin[(a-b)x]}{2(a-b)} + \frac{\sin[(a+b)x]}{2(a+b)} \quad \forall |a| \neq |b|$

1. Aufgabe: Fragenteil (14 Punkte)

1. Nennen Sie zwei geometrische Maßnahmen zur Reduktion des induzierten Widerstandes eines Flügels bei gegebenem konstanten Auftriebsbeiwert c_L im Rahmen der Prandtl'schen Traglinientheorie.
2. Welchen Effekt hat die Pfeilung eines Tragflügels und welcher Nachteil ist damit verbunden?
3. Welche Größen sind für die Widerstands- und Auftriebsbestimmung eines Profils relevant, wenn dessen supersonische Umströmung mit Hilfe der linearisierten Störpotentialgleichung berechnet wird?
4. In nachstehender Abbildung ist die Verteilung des Druckbeiwerts c_p einer transonischen Anströmung mit $M_\infty = 0.7$ bei einem Anstellwinkel von $\alpha = 0^\circ$ um ein Profil der vierziffrigen NACA-Reihe auf der Ober- und Unterseite gegeben.



- (a) Zu welcher Profilvereihe gehört die c_p -Verteilung a) NACA0018 oder b) NACA2418? Begründen Sie Ihre Antwort.
- (b) Zeichnen Sie qualitativ für ein NACA0018 Profil die Verteilung des Druckbeiwerts c_p auf der Ober- und Unterseite unter einem Anstellwinkel von $\alpha = 5^\circ$, einer Anströmmachzahl von $M_\infty = 0.7$ und einer Reynoldszahl von $Re_c = 10^6$.

Ein NACA0018 Profil wird nun mit der Machzahl $Ma_\infty = 2.0$ unter dem Anstellwinkel $\alpha = 0^\circ$ reibungsfrei umströmt.

- (c) Zeichnen Sie qualitativ die in dem Strömungsfeld um das Profil evtl. auftretenden wesentlichen Strömungsphänomene.
- (d) Zeichnen Sie qualitativ den Verlauf des statischen Drucks p/p_∞ entlang der Längsachse des Profils inklusive Stromauf- und Stromabbereiche der Anströmung und des Nachlaufes.

Hinweis:

Falls nötig, übertragen Sie die Skizzen in Ihre Lösungsblätter und zeichnen Sie die Lösung dort ein!

2. Aufgabe: Skelett-Theorie und linearisierte Potentialtheorie (18 Punkte)

Im Rahmen eines Flugzeugvorentwurfs wird ein Flügelprofil mit Hilfe der Skelett-Theorie und der linearisierten Potentialtheorie untersucht. Die Skelettlinie des Profils wird durch das gegebene Polynom dritten Grades $Z^{(s)}(X)$ beschrieben. Das Profilskelett ist um den Winkel α angestellt und wird je nach Aufgabenteil für verschiedene Machzahlen der Anströmung untersucht.

$$Z^{(s)}(X) = X \left(X^2 - \frac{13}{8}X + \frac{5}{8} \right), \quad 0 \leq X \leq 1, \quad X = \frac{1}{2}(1 + \cos(\varphi))$$

1. Unter Anwendung der Skelett-Theorie für einen inkompressiblen Fall:

- (a) Zeigen Sie, dass es sich bei dem gegebenen Profil um ein S-Schlag-Profil handelt. Bestimmen Sie anschließend die zugehörige Zirkulationsverteilung $\gamma(\varphi)$ nach dem Ansatz von Birnbaum-Ackermann unter der Angabe aller Koeffizienten A_n .
- (b) Leiten Sie die allgemeine Formel zur Berechnung des Auftriebsbeiwertes $c_l = \pi(2A_0 + A_1)$ her und berechnen Sie den Auftriebsbeiwert des untersuchten Profils in Abhängigkeit vom Anstellwinkel α .
- (c) Der Momentenbeiwert um die Profilnase kann i.a. mit der Formel $c_m = -\frac{\pi}{4}(2A_0 + 2A_1 + A_2)$ berechnet werden. Zeigen Sie, dass der Neutralpunkt des Profils bei $X_N = \frac{1}{4}$ liegt.

2. Berechnen Sie mit den Ergebnissen aus Aufgabenteil 1 für den inkompressiblen Fall den Auftriebsbeiwert c_{l1} und den Widerstandsbeiwerte c_{w1} für das Skelett bei einer Machzahl von $Ma_1 = 0.6$.

3. Nun wird das Profil bei der Machzahl $Ma_2 = 3$ unter Anwendung der linearisierten Potentialtheorie untersucht. Die Skelettlinie wird nun durch die Tropfenform

$$Z^{(t)}(X) = \pm \frac{1}{8} (X - X^2), \quad 0 \leq X \leq 1,$$

ergänzt.

Berechnen Sie den Auftriebsbeiwert c_{l2} und den Widerstandsbeiwerte c_{w2} für das erweiterte Profil bei einer Machzahl von $Ma_2 = 3$. Hinweis: Das Endergebnis in Abhängigkeit der gegebenen Größen muss nicht weiter vereinfacht werden.

Gegeben: Anstellwinkel α , Sehnenlänge l , V_∞ , $Ma_1 = 0.6$, $Ma_2 = 3$.

Hinweise:

$$\gamma(\varphi) = 2V_\infty \cdot \left(A_0 \cdot \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \sum_{n=1}^N A_n \cdot \sin(n\varphi) \right)$$

$$-w_a(\varphi) = -\frac{w}{V_\infty} = A_0 + \sum_{n=1}^N A_n \cdot \cos(n\varphi)$$

$$-\frac{w}{V_\infty} = \alpha - \frac{dZ}{dX} \quad \frac{u}{V_\infty} = \pm \frac{\gamma(X)}{V_\infty}$$

$$c_p|_{sup} = \pm \frac{2\beta}{\sqrt{Ma_\infty^2 - 1}}$$

$$X = \frac{x}{l}$$

3. Aufgabe: Traglinientheorie (18 Punkte)

1. Skizzieren Sie das Wirbelsystem, welches in der PRANDTL'schen Traglinientheorie Verwendung findet und erläutern Sie die Unterschiede zu einem einfachen Hufeisenwirbelsystem. Benennen Sie außerdem zwei Voraussetzungen für die Anwendbarkeit dieser Theorie.
2. Zeigen Sie, dass für einen endlichen Tragflügel mit elliptischer Zirkulationsverteilung der induzierte Widerstand minimal wird. Leiten Sie dafür zunächst die allgemeine Formulierung des induzierten Anstellwinkels α_i in Abhängigkeit von φ für die in den Hinweisen gegebene allgemeine Γ -Verteilung her.

Ein Modellflugzeug mit Tragflügeln endlicher Streckung, die einen elliptischen Grundriss haben, wird in einem Windkanal auf das Flugverhalten während einer Störung der Querruder getestet. Dafür wird ein einseitiger Querruderausschlag erzeugt. Die Auftriebskraft L , die induzierte Widerstandskraft W_i und das Rollmoment M_R werden mit einer 6-Komponentenwaage gemessen.

3. Für die Beschreibung der Zirkulation wird folgender Ansatz als hinreichend genau angenommen.

$$\Gamma(\varphi) = 2bV_\infty \sum_{n=1}^3 A_n \sin(n\varphi)$$

Bestimmen Sie die Koeffizienten A_1 , A_2 und A_3 der Zirkulationsverteilung aus den gemessenen Größen.

4. Bei der Auswertung der Versuchsergebnisse zeigt sich, dass die Messung des Nickmoments aufgrund eines Wackelkontakts nicht funktioniert hat. Um einen weiteren Versuchsdurchlauf zu vermeiden, soll das Nickmoment aus der Auftriebsverteilung über der gesamten Flügelfläche bestimmt werden. Ist dies mit der PRANDTL'schen Traglinientheorie möglich oder muss ein anderes Verfahren angewandt werden. Begründen Sie Ihre Antwort.

gegeben: $b, \rho_\infty, V_\infty, L, W_i, M_R$,

Hinweise:

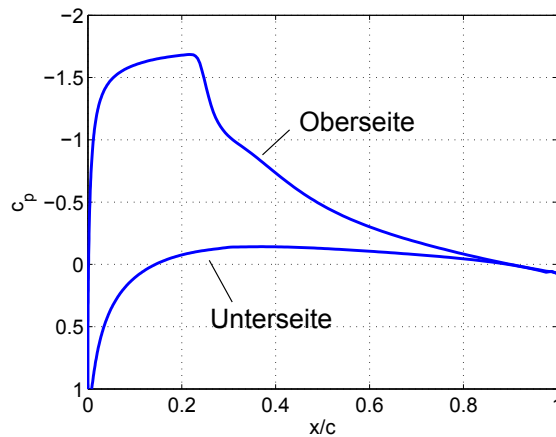
$$y = -\frac{b}{2} \cos(\varphi)$$

$$\Gamma(\varphi) = 2bV_\infty \sum_{n=1}^N A_n \sin(n\varphi)$$

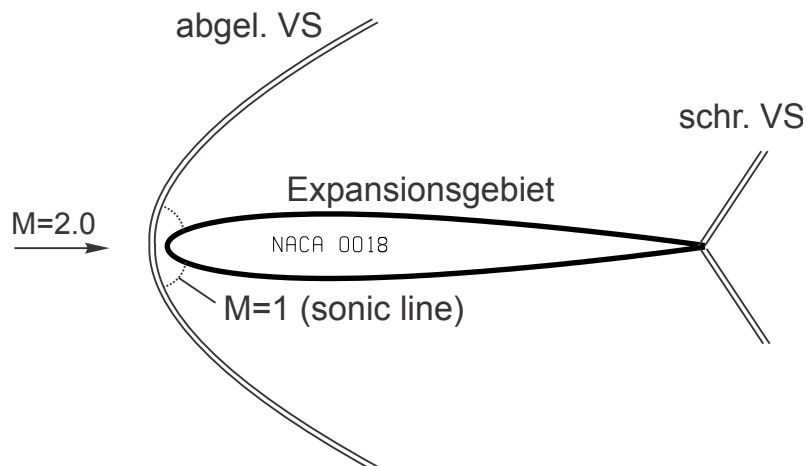
$$w_i(y) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{d\Gamma}{dy'} \frac{dy'}{y - y'}$$

Lösung 1. Aufgabe: Fragenteil (14 Punkte)(LÖSUNG)

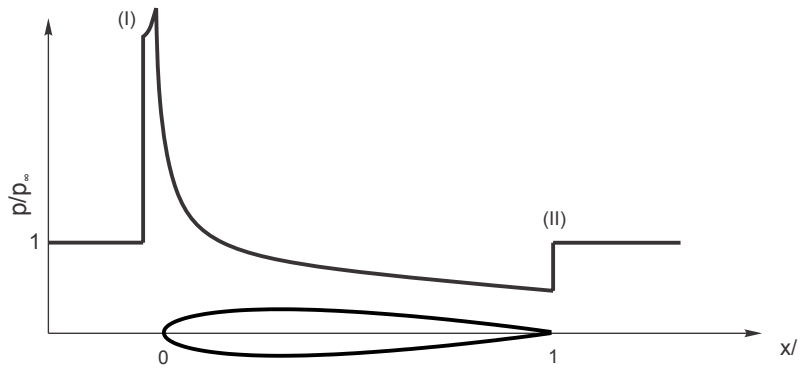
1. Methode 1: Erhöhung der Streckung
Methode 2: Annäherung an eine elliptische Auftriebsverteilung durch Änderung der Flügelgeometrie in Spannweitenrichtung.
2. Die Pfeilung bewirkt eine Reduzierung der Kompressibilitätseffekte (kleinere effektive Machzahl: $M_\infty \cos \varphi_c$).
Nachteil der Pfeilung ist die Verringerung des Auftriebs: $v_\infty \cos \varphi_c \leq v_\infty \rightarrow C_L \downarrow$
3. In einer supersonischen Strömung über dünne Profile sind für die Widerstandsberechnung mit der lin. Pot. Theorie folgende Parameter relevant: Dickenverteilung, Anstellwinkel, Wölbung
Zur Auftriebsberechnung ist lediglich der Anstellwinkel relevant.
4. (a) Der Verlauf gehört zum symmetrischen NACA0018-Profil, da die Druckverteilung auf der Ober- und Unterseite gleich sind.
(b) Erkennbare physikalische Aspekte: Stoß auf der Oberseite, kein Stoß auf der Unterseite. Evtl. Ablösegebiet stromab des Verdichtungsstoßes (in nachstehender Abbildung nur angedeutet).



(c) Strömungsphänomene:



- (d) Verlauf des statischen Druckes p/p_∞ entlang der Längsachse des Profils:
 - (i) Abrupter Druckanstieg durch einen abgelösten VS inklusiver Druckerhöhung im Staupunkt.
 - (ii) Druckabfall entlang der Profilloberfläche infolge Expansion mit anschließendem Druckanstieg durch den schrägen VS an der Hinterkante.



Lösung 2. Aufgabe: (LÖSUNG) Skelett-Theorie und linearisierte Potentialtheorie (18 Punkte)

1. (a)

$$Z^{(s)}(X) = X^3 - \frac{13}{8}X^2 + \frac{5}{8}X = X\left(X - \frac{5}{8}\right)(X - 1)$$

Das Profil besitzt einen S-Schlag aufgrund der drei Nullstellen bei $X = 0$, $X = \frac{5}{8}$, $X = 1$ innerhalb des Intervalls $0 \leq X \leq 1$.

$$\frac{dZ^{(s)}(X)}{dX} = 3X^2 - \frac{13}{4}X + \frac{5}{8}$$

Aus der kinematischen Randbedingung und dem Ansatz von Birnbaum-Ackermann folgt:

$$\alpha - \frac{dZ^{(s)}}{dX} = A_0 + \sum_{n=1}^N A_n \cdot \cos(n\varphi)$$

Mit der Substitution $X = \frac{1}{2}(\cos \varphi + 1)$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} \alpha - \frac{dZ^{(s)}}{X} &= \alpha - 3\left(\frac{1}{2}(\cos \varphi + 1)\right)^2 + \frac{13}{4} \cdot \frac{1}{2}(\cos \varphi + 1) - \frac{5}{8} \\ &= \alpha - \frac{3}{4} \cos^2 \varphi - \frac{3}{2} \cos \varphi - \frac{3}{4} + \frac{13}{8} \cos \varphi + \frac{13}{8} - \frac{5}{8} \\ &= \alpha - \frac{3}{4} \cos^2 \varphi + \frac{1}{8} \cos \varphi + \frac{1}{4} \\ &= \alpha - \frac{3}{8}(1 + \cos(2\varphi)) + \frac{1}{8} \cos \varphi + \frac{1}{4} \\ &= \alpha - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \cos \varphi - \frac{3}{8} \cos(2\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^N A_n \cdot \cos(n\varphi) \end{aligned}$$

Der Koeffizientenvergleich liefert die Konstanten A_0 bis A_n :

$$A_0 = \alpha - \frac{1}{8}; \quad A_1 = \frac{1}{8}; \quad A_2 = -\frac{3}{8}; \quad A_n = 0 \quad \text{für } n \geq 3$$

Der gesuchte Zirkulationsverteilung ergibt sich zu:

$$\gamma(\varphi) = 2V_\infty \cdot \left(\left(\alpha - \frac{1}{8}\right) \cdot \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \frac{1}{8} \sin(\varphi) - \frac{3}{8} \sin(2\varphi) \right)$$

(b) Aus dem Satz von Kutta-Zhukhovski folgt für die zweidimensionale Auftriebskraft

$$\hat{L} = \varrho V_\infty \Gamma = \varrho V_\infty \int_0^l \gamma(x) dx = \varrho V_\infty l \int_0^1 \gamma(X) dX \quad , \quad \text{wobei } X = x/l.$$

Für den Auftriebskoeffizienten c_l ergibt sich:

$$c_l = \frac{\hat{L}}{\frac{\varrho}{2} V_\infty^2 l} = \frac{2 \int_0^1 \gamma(X) dX}{V_\infty}$$

Eingesetzt $\gamma(\varphi)$ mit $dX = -\frac{1}{2} \sin \varphi d\varphi$ aus der Substitution $X = \frac{1}{2}(1 + \cos \varphi)$ ergibt

$$\begin{aligned} c_l &= \frac{1}{V_\infty} \int_0^\pi \gamma(\varphi) \sin \varphi d\varphi = 2 \int_0^\pi \left(A_0 \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin \varphi + A_1 \sin^2 \varphi + A_2 \sin(2\varphi) \sin \varphi \right) d\varphi \\ &= 2 \int_0^\pi \left(A_0(1 - \cos \varphi) + A_1 \sin^2 \varphi + A_2 \sin(2\varphi) \sin \varphi \right) d\varphi \\ &= \pi(2A_0 + A_1) \end{aligned}$$

Mit den berechneten Werten für A_n ergibt sich der Auftriebsbeiwert zu:

$$c_l = 2\pi \left(\alpha - \frac{1}{16} \right)$$

(c) Für den Momentenbeiwert ergibt sich:

$$c_m = -\frac{\pi}{4}(2A_0 + 2A_1 + A_2) = -\frac{\pi}{2}\alpha + \frac{3\pi}{32}$$

Aus der Momentenbilanz um die Profilhase und der Definition des Neutralpunktes ($\partial c_{m_0}/\partial c_l = 0$) folgt:

$$c_m = c_{m_0} - c_l \cdot X_N \quad \Rightarrow \quad (\text{abgeleitet nach } c_l) \quad \Rightarrow \quad X_N = -\frac{\partial c_m}{\partial c_l} = -\frac{\partial c_m}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial c_l} = -\frac{-\pi/2}{2\pi} = \frac{1}{4}$$

2. Bei $Ma_1 = 0.6$ ergibt sich der Auftriebsbeiwert aus der Prandtl-Glauert-Regel und dem in Teil 1 bestimmten Wert für den inkompressiblen Fall zu:

$$c_l|_{Ma_1=0.6} = \frac{1}{\sqrt{1 - Ma_1^2}} c_l|_{Ma_1=0} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - 0.6^2}} \left(\alpha - \frac{1}{16} \right) = \frac{2\pi}{0.8} \left(\alpha - \frac{1}{16} \right)$$

Für den Fall mit $Ma_1 = 0.6$ besitzt das Profil keinen Widerstandsbeiwert (D'Alembert'sches Paradoxon):

$$c_w|_{Ma_1=0.6} = 0$$

3. Mit den absoluten lokalen Strömungsänderungswinkeln β_i entlang des Profilskeletts und dem Hinweis $c_p|_{Ma_\infty > 1.2} = \pm \frac{2\beta_i}{\sqrt{Ma_\infty^2 - 1}}$ ergibt sich für den Druckbeiwert auf der Ober- und Unterseite bei $Ma_2 = 3$:

$$\Rightarrow c_{p,u} = - \left[\left(\frac{dZ^{(s)}}{dX} + \frac{dZ^{(t,u)}}{dX} \right) - \alpha \right] \frac{2}{\sqrt{Ma_\infty^2 - 1}}$$

$$\Rightarrow c_{p,o} = \left[\left(\frac{dZ^{(s)}}{dX} + \frac{dZ^{(t,o)}}{dX} \right) - \alpha \right] \frac{2}{\sqrt{Ma_\infty^2 - 1}}$$

$$\Delta c_{p,i} = c_{p,u} - c_{p,o} = \frac{4 \left(\alpha - \frac{dZ^{(s)}}{dX} \right)}{\sqrt{Ma_\infty^2 - 1}}$$

$$c_l|_{Ma_2=3.0} = \int_0^1 \Delta c_p dX = \frac{4}{\sqrt{Ma_2^2 - 1}} \int_0^\pi \left(\alpha - 3X^2 + \frac{13}{4}X - \frac{5}{8} \right) dX = \frac{4\alpha}{\sqrt{Ma_2^2 - 1}} = \frac{4\alpha}{\sqrt{8}}$$

Alternativ: Im Rahmen der linearisierten Potentialtheorie ist für den Auftriebsbeiwert bei $Ma_2 = 3$ nur der Anstellwinkel der Profilschne α_0 relevant. Mit $\alpha_0 = \alpha$ ergibt sich:

$$c_l|_{Ma_2=3.0} = \frac{4\alpha_0}{\sqrt{Ma_2^2 - 1}} = \frac{4\alpha}{\sqrt{8}}$$

Im Rahmen der linearisierten Potentialtheorie kann der Widerstandsbeiwert bei $Ma_2 = 3$ in eine Auftriebs-, eine Skelettlinien- und eine Dicken-Komponente aufgeteilt werden und setzt sich somit zusammen zu:

$$c_w = \frac{4}{\sqrt{Ma_\infty^2 - 1}} \left(\underbrace{\alpha^2}_{\text{Auftriebsanteil}} + \underbrace{\int_0^1 \left(\frac{dZ^{(s)}}{dX} \right)^2 dX}_{\text{Wölbungsanteil}} + \underbrace{\int_0^1 \left(\frac{dZ^{(t)}}{dX} \right)^2 dX}_{\text{Dickenanteil}} \right)$$

$$c_w|_{Ma_2=3.0} = \frac{4}{\sqrt{Ma_2^2 - 1}} \left(\alpha^2 + \int_0^1 \left(3X^2 - \frac{13}{4}X + \frac{5}{8} \right)^2 dX + \int_0^1 \frac{1}{64} (1 - 2X)^2 dX \right)$$

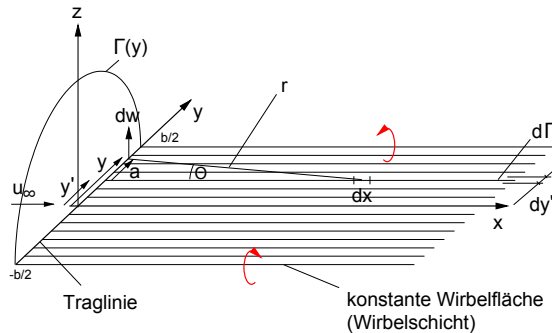
$$= \frac{4}{\sqrt{Ma_2^2 - 1}} \left(\alpha^2 + \int_0^1 \left(9x^4 - \frac{39}{2}x^3 + \frac{229}{16}x^2 - \frac{65}{16}x + \frac{25}{64} \right) dX + \int_0^1 \frac{1}{64} (1 - 4x + 4x^2) dX \right)$$

$$= \frac{4}{\sqrt{Ma_2^2 - 1}} \left(\alpha^2 + \frac{9}{5} - \frac{39}{8} + \frac{229}{48} - \frac{65}{32} + \frac{25}{64} + \frac{1}{64} \left(1 - 2 + \frac{4}{3} \right) \right) = \frac{4}{\sqrt{8}} \left(\alpha^2 - \frac{29}{480} \right)$$

Lösung 3. Aufgabe: Traglinientheorie (18 Punkte)(LÖSUNG)

1. (4 Punkte)

Skizze:



Bei einem Hufeisenwirbelsystem wird die Zirkulation des gebundenen Wirbels als konstant über die Spannweite angenommen. Daher muss der gebundene Wirbel mithilfe zweier halbumendlicher Wirbelfäden an den spannsseitigen Enden des Tragflügels bis ins Unendliche vorgesetzt, da Wirbelfäden nach dem 3. Helmholtz'schen Wirbelsatz nicht in der Strömung enden können. Daraus resultiert eine an den Enden des Tragflügels unendliche induzierte Geschwindigkeit $w_i(y = \pm \frac{b}{2}) = -\infty$. In der PRANDTL'schen Traglinientheorie wird dieses Problem behoben, indem eine kontinuierliche Zirkulationsverteilung über der Traglinie angenommen wird. Diese erzeugt eine unendliche Anzahl halbumendlicher Wirbelfäden (eine kontinuierliche Wirbelschicht) und eine endliche induzierte Geschwindigkeit w_i an den spannsseitigen Enden des Tragflügels.

Voraussetzungen: inkompressible Strömung, ungepfeilter Flügel (gerade $\frac{l}{4}$ -Linie), mittlere bis große Streckung ($\Lambda > 5$), kleine Wölbung/Profilicke/Anstellwinkel, keine V-Stellung

2. (8 Punkte)

Ansatz:

$$w_i(y) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{d\Gamma}{dy'} \frac{dy'}{y - y'}$$

Für kleine Winkel gilt näherungsweise $\tan(\alpha) = \alpha \rightarrow \alpha_i = -\frac{w_i}{V_\infty}$. Daher folgt für $\alpha_i(y)$:

$$\alpha_i(y) = \frac{1}{4\pi V_\infty} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{d\Gamma}{dy'} \frac{dy'}{y - y'}$$

Mit der Koordinatentransformation $y = -\frac{b}{2} \cos(\varphi)$ und $dy = \frac{b}{2} \sin(\varphi) d\varphi$, sowie den angepassten Integrationsgrenzen $y = -\frac{b}{2} \hat{=} \varphi = 0$ und $y = \frac{b}{2} \hat{=} \varphi = \pi$ ergibt sich:

$$\alpha_i(\varphi) = -\frac{1}{2\pi b V_\infty} \int_0^\pi \frac{d\Gamma}{d\varphi'} \frac{d\varphi'}{\cos(\varphi) - \cos(\varphi')}$$

Die Ableitung der Zirkulationsverteilung

$$\frac{d\Gamma}{d\varphi'} = 2bV_\infty \sum_{n=1}^N n A_n \cos(n\varphi')$$

wird anschließend in die Beziehung für $\alpha_i(\varphi)$ eingesetzt.

$$\alpha_i(\varphi) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sum_{n=1}^N n A_n \frac{\cos(n\varphi') d\varphi'}{\cos(\varphi) - \cos(\varphi')}$$

Aus der Lösung des Glauert-Intergrals resultiert die allgemeine Beschreibung des induzierten Anstellwinkels.

$$\alpha_i(\varphi) = \sum_{n=1}^N n A_n \frac{\sin(n\varphi)}{\sin(\varphi)}$$

Aus der spannweitigen Verteilung des induzierten Widerstands $\hat{W}_i(y) = \hat{L}(y)\alpha_i(y)$ wird mittels Integration über die gesamte Spannweite der induzierte Widerstand zu

$$W_i = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \hat{L}(y)\alpha_i(y) dy$$

bestimmt. Mit der Koordinatentransformation $dy = \frac{b}{2} \sin(\varphi)$, der Beziehung für die spannweitige Auftriebsverteilung $\hat{L}(\varphi)$

$$\hat{L}(\varphi) = \rho_\infty V_\infty \Gamma(\varphi) = 2b\rho_\infty V_\infty^2 \sum_{n=1}^N A_n \sin(n\varphi)$$

und der bereits hergeleiteten Beziehung für $\alpha_i(\varphi)$ folgt für den induzierten Widerstand:

$$W_i = b^2 \rho_\infty V_\infty^2 \int_0^\pi \sum_{n=1}^N A_n \sin(n\varphi) \cdot \sum_{m=1}^M m A_m \frac{\sin(m\varphi)}{\sin(\varphi)} \sin(\varphi) d\varphi$$

Mit:

$$\int_0^\pi \sin(n\varphi) \sin(p\varphi) d\varphi = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & n = p \\ 0 & n \neq p \end{cases}$$

kann die Gleichung zu

$$W_i = b^2 \rho_\infty V_\infty^2 \int_0^\pi \sum_{n=1}^N n A_n^2 \sin^2(n\varphi) d\varphi$$

umgeformt und mit Hilfe der Formelsammlung gelöst werden. Für den induzierten Widerstand ergibt sich dadurch:

$$W_i = \frac{\pi}{2} b^2 \rho_\infty V_\infty^2 \sum_{n=1}^N n A_n^2 = \frac{\pi}{2} b^2 \rho_\infty V_\infty^2 A_1^2 \left[1 + \sum_{n=2}^N n \left(\frac{A_n}{A_1} \right)^2 \right]$$

Da der Term $\sum_{n=2}^N n \left(\frac{A_n}{A_1} \right)^2$ immer positiv ist, ist der induzierte Widerstand minimal, wenn $A_n = 0$ für $n \geq 2$. Dies ist für einen Tragflügel mit elliptischer Zirkulationsverteilung $\Gamma(\varphi) = 2bV_\infty A_1 \sin(\varphi)$ der Fall.

3. (5 Punkte)

Die Auftriebskraft wird durch Integration der spannweitigen Auftriebsverteilung $\hat{L}(\varphi)$ (siehe 2.) über die gesamte Spannweite bestimmt.

$$L = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \hat{L}(y) dy = \frac{b}{2} \int_0^\pi \hat{L}(\varphi) \sin(\varphi) d\varphi = b^2 \rho_\infty V_\infty^2 \int_0^\pi \sum_{n=1}^N A_n \sin(n\varphi) \sin(\varphi) d\varphi$$

Aufgrund von $\int_0^\pi \sin(n\varphi) \sin(p\varphi) d\varphi = 0$ für $n \neq p$ verschwinden alle Koeffizienten mit Ausnahme von A_1 (siehe Formelsammlung). Es gilt:

$$L = b^2 \rho_\infty V_\infty^2 \int_0^\pi \sum_{n=1}^N A_n \sin(n\varphi) \sin(\varphi) d\varphi = \frac{\pi}{2} b^2 V_\infty^2 \rho_\infty A_1$$

$$\Leftrightarrow A_1 = \frac{2L}{\pi \rho_\infty b^2 V_\infty^2}$$

Für das Rollmoment gilt $dM_R(y) = d\hat{L}(y)y$. Aus der Integration über die gesamte Spannweite folgt für das Rollmoment:

$$M_R = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \hat{L}(y)y dy = -\frac{b^2}{4} \int_0^\pi \hat{L}(\varphi) \sin(\varphi) \cos(\varphi) d\varphi$$

Durch Einsetzen der Beziehung für $\hat{L}(\varphi)$ ergibt sich:

$$M_R = -\frac{b^2}{4} \int_0^\pi 2b \rho_\infty V_\infty^2 \sum_{n=1}^3 A_n \sin(n\varphi) \cos(\varphi) \sin(\varphi) d\varphi$$

Durch Lösung des Integrals anhand der Formelsammlung lässt sich der Koeffizient A_2 bestimmen. Alle weiteren Koeffizienten verschwinden aufgrund des Integrals.

$$M_R = -\frac{b^3}{2} \rho_\infty V_\infty^2 \int_0^\pi \sum_{n=1}^3 A_n \sin(n\varphi) \cos(\varphi) \sin(\varphi) d\varphi = -\frac{b^3}{4} \rho_\infty V_\infty^2 \int_0^\pi \sum_{n=1}^3 A_n \sin(n\varphi) \sin(2\varphi) d\varphi$$

$$\Leftrightarrow M_R = -\frac{\pi b^3}{8} \rho_\infty V_\infty^2 A_2$$

$$\Leftrightarrow A_2 = -\frac{8M_R}{\pi b^3 \rho_\infty V_\infty^2}$$

Der induzierte Widerstand in Abhängigkeit der Koeffizienten A_1 , A_2 und A_3 wurde bereits in 2. hergeleitet.

$$W_i = \frac{\pi}{2} b^2 \rho_\infty V_\infty^2 \sum_{n=1}^3 n A_n^2$$

Einsetzen der Koeffizienten A_1 und A_2 ergibt:

$$W_i = \frac{\pi}{2} b^2 \rho_\infty V_\infty^2 \left[\left(\frac{2L}{\pi \rho_\infty b^2 V_\infty^2} \right)^2 + 2 \left(-\frac{8M_R}{\pi b^3 \rho_\infty V_\infty^2} \right)^2 + 3A_3^2 \right]$$

$$\Leftrightarrow A_3 = \sqrt{\frac{\frac{2W_i}{\pi b^2 \rho_\infty V_\infty^2} - \left(\frac{2L}{\pi \rho_\infty b^2 V_\infty^2} \right)^2 - 2 \left(-\frac{8M_R}{\pi b^3 \rho_\infty V_\infty^2} \right)^2}{3}}$$

4. (1 Punkt)

Da die Zirkulationsverteilung in der PRANDTL'schen Traglinientheorie auf einer Linie konzentriert ist, kann die Auftriebsverteilung lediglich entlang dieser Linie berechnet werden. Daher ist auch die Berechnung des Nickmoments mithilfe der PRANDTL'schen Traglinientheorie nicht möglich. Eine flächenhafte Beschreibung der Zirkulationsverteilung wie beispielsweise in der Tragflächentheorie ermöglicht hingegen die Berechnung der Auftriebs-/Geschwindigkeits-/Druckverteilung über der Flügelfläche und somit auch die Bestimmung des Nickmoments.