

AERODYNAMISCHES INSTITUT
der Rheinisch - Westfälischen
Technischen Hochschule Aachen
Univ.-Prof. Dr.-Ing. W. Schröder

Klausur

Aerodynamik II

08. 09. 2017

M U S T E R L Ö S U N G
E I N S I C H T N A H M E

Hinweis:

Achten Sie darauf, ob Sie alle Aufgaben erhalten haben:

Klausur Aerodynamik II

Fragenteil, Skelett-Theorie und linearisierte Potentialtheorie, Überschallströmung und numerische Verfahren

Integrale und Additionstheoreme

Additionstheoreme

- $\sin(x \pm y) = \sin(x) \cdot \cos(y) \pm \sin(y) \cdot \cos(x)$
- $\cos(x \pm y) = \cos(x) \cdot \cos(y) \mp \sin(x) \cdot \sin(y)$
- $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
- $\sin(2x) = 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$
- $\sin(x) = 2 \cdot \sin(x/2) \cdot \cos(x/2)$
- $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$
- $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$
- $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$
- $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$
- $\tan\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \sin(x) = 1 - \cos(x)$
- $\sin(x) \cdot \sin(nx) = -\frac{1}{2}(\cos[(n+1)x] - \cos[(n-1)x])$
- $\sin[(n+1)x] - \sin[(n-1)x] = 2 \cdot \cos(nx) \cdot \sin(x)$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(n\varphi_p) \cdot \sin(n\varphi) = \frac{1}{4} \ln\left(\frac{1 - \cos(\varphi_p + \varphi)}{1 - \cos(\varphi_p - \varphi)}\right)$

Integrale

- $\int \frac{1}{ax + b} dx = \frac{1}{a} \cdot \ln(ax + b)$
- $\int \frac{x}{ax + b} dx = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2} \cdot \ln(ax + b)$
- $\int \frac{x^2}{X} dx = \frac{1}{a^3} \left[\frac{1}{2}(X) - 2b(X) + b^2 \ln(X) \right]$
mit $X = ax + b$
- $\int \sin(ax) dx = -\frac{\cos(ax)}{a}$
- $\int \cos(ax) dx = +\frac{\sin(ax)}{a}$
- $\int \sin^2(ax) dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4a} \sin(2ax)$
- $\int \cos^2(ax) dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4a} \sin(2ax)$
- $\int \sin^3(ax) dx = \frac{\cos^3(ax)}{3a} - \frac{\cos(ax)}{a}$
- $\int \cos^3(ax) dx = -\frac{\sin^3(ax)}{3a} + \frac{\sin(ax)}{a}$
- $\int \cos^4(ax) dx = \frac{3}{8}x + \frac{\sin(2ax)}{4a} + \frac{\sin(4ax)}{32a}$
- $\int \sin(ax) \cos(ax) dx = \frac{\sin^2(ax)}{2a}$
- $\int_0^{\pi} \cos(n \cdot \varphi) \cdot \cos(p \cdot \varphi) d\varphi = \begin{cases} \pi/2 & n = p \\ 0 & n \neq p \end{cases}$
- $\int_0^{\pi} \sin(n \cdot \varphi) \cdot \sin(p \cdot \varphi) d\varphi = \begin{cases} \pi/2 & n = p \\ 0 & n \neq p \end{cases}$
- Glauert-Integral
 $\int_0^{\pi} \frac{\cos(n \cdot \varphi')}{\cos(\varphi) - \cos(\varphi')} d\varphi' = -\pi \cdot \frac{\sin(n \cdot \varphi)}{\sin(\varphi)}$
- $\int \cos(ax) \cdot \cos(bx) dx = \frac{\sin[(a-b)x]}{2(a-b)} + \frac{\sin[(a+b)x]}{2(a+b)} \quad \forall |a| \neq |b|$

1. Aufgabe: Fragenteil (14 Punkte)

1. Erklären Sie das d'Alembert'sche Paradoxon und den induzierten Widerstand im Rahmen der Potentialtheorie.
2. Mit welchem Berechnungsverfahren der Potentialtheorie lässt sich der induzierte Widerstand eines gepfeilten Flügels bestimmen? Erläutern Sie in eigenen Worten kurz das Verfahrensprinzip.
3. Zur experimentellen Untersuchung eines gepfeilten Flügels für eine Machzahl von $Ma_\infty = 0.6$ wird ein nach der Prandtl-Glauert Ähnlichkeitsregel skaliertes Modellflügel für den vorhandenen Wasser-schleppkanal benötigt. Übertragen Sie in Ihre Aufgabenblätter die unten stehende Skizze und ergänzen Sie diese sorgfältig für das entsprechende Versuchsmodell (rechts). Achten Sie dabei auf die Relation der geometrischen Abmaße zum originalen Flügel (links) und geben Sie quantitative Angaben, welche Größen wie verändert werden.

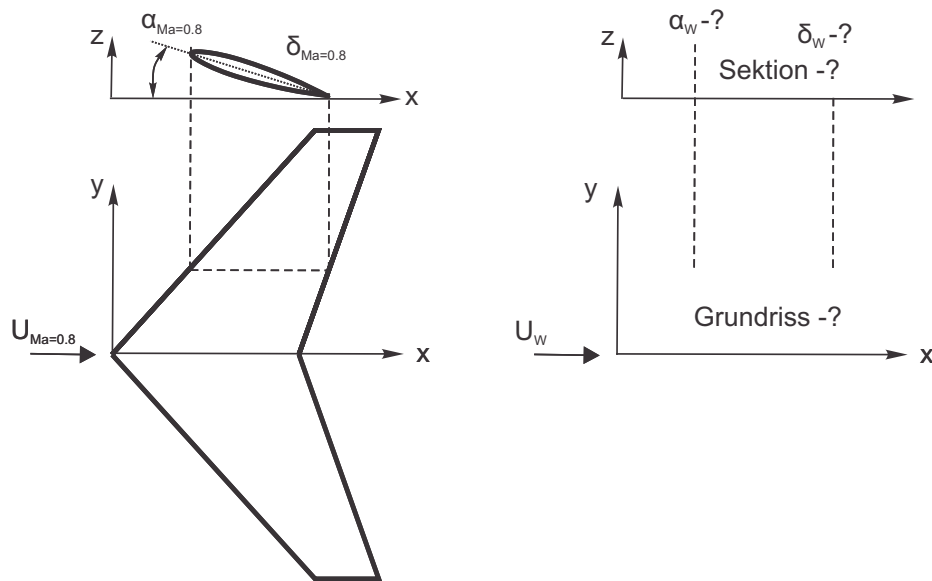


Abbildung 1.1: Grundriss und Profilschnitt eines gepfeilten Flügels.

4. Es wird im Folgenden ein Laminarprofil NACA 64₂-015 in einer inkompressiblen Anströmung mit Null-Anstellwinkel betrachtet.
 - (a) Zeichnen Sie für das untersuchte Laminarprofil die zu erwartende Druckbeiwertverteilung $c_p(X)$ bei der Reynoldszahl von $Re_c = 5 \cdot 10^5$.
 - (b) Skizzieren Sie sorgfältig den dem Fall 4(a) entsprechenden Verlauf des Reibungsbeiwertes c_f entlang der Profiloberseite.
 - (c) Erweitern Sie Ihr Diagramm aus 4(a) mit dem zu erwartenden Druckbeiwertverlauf für das betrachtete Profil bei der Reynoldszahl von $Re_c = 1 \cdot 10^6$.
 - (d) Ergänzen Sie Ihr Diagramm aus 4(b) mit dem zu erwartenden Verlauf des Reibungsbeiwertes c_f entlang der Profiloberseite für das betrachtete Profil bei der Reynoldszahl von $Re_c = 1 \cdot 10^6$.

Hinweis:

Falls nötig, übertragen Sie die Skizzen in Ihre Lösungsblätter und zeichnen Sie die Lösung dort ein!

2. Aufgabe: Skelett-Theorie und linearisierte Potentialtheorie (18 Punkte)

Im Rahmen eines Flugzeugvorentwurfs wird für die Skelettlinie eines Nurflüglers das folgende Polynom dritten Grades untersucht. Das Profilskelett ist um den Winkel α angestellt und wird je nach Aufgabenteil für verschiedene Machzahlen untersucht.

$$Z(X) = X^3 - \frac{7}{4}X^2 + \frac{3}{4}X, \quad 0 \leq X \leq 1.$$

1. Unter Anwendung der Skelett-Theorie für einen inkompressiblen Fall:

- Zeigen Sie, dass es sich um ein S-Schlag-Profil handelt und bestimmen Sie anschließend die zugehörige Zirkulationsverteilung nach dem Ansatz von Birnbaum-Ackermann unter der Angabe aller Koeffizienten A_n .
- Leiten Sie den Auftriebsbeiwert des untersuchten Profils in Abhängigkeit vom Anstellwinkel α her.
- Der Momentenbeiwert um die Profilhase kann i.a. nach der Formel $c_m = -\frac{\pi}{4}(2A_0 + 2A_1 - A_2)$ berechnet werden.

Bestimmen Sie die Lage des Druckpunktes X_{cp} und diskutieren Sie kurz ihre Abhängigkeit vom Anstellwinkel α . Zeigen Sie anschließend, dass der Neutralpunkt des Profils bei $X_N = \frac{1}{4}$ liegt.

2. Nun wird dasselbe Profil im Überschall unter Anwendung der linearisierten Potentialtheorie untersucht. Berechnen Sie die Lagen des Druckpunktes und des Neutralpunktes des Profils im Überschall.

Gegeben: Anstellwinkel α , Sehnenlänge l , V_∞ .

Hinweise:

$$\gamma(\varphi) = 2V_\infty \cdot \left(A_0 \cdot \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \sum_{n=1}^N A_n \cdot \sin(n\varphi) \right)$$

$$-w_a(\varphi) = -\frac{w}{V_\infty} = A_0 + \sum_{n=1}^N A_n \cdot \cos(n\varphi)$$

$$-\frac{w}{V_\infty} = \alpha - \frac{dZ}{dX} \quad \frac{u}{V_\infty} = \pm \frac{\gamma(X)}{V_\infty}$$

$$c_p|_{sup} = \pm \frac{2\beta}{\sqrt{Ma_\infty^2 - 1}}$$

$$X = \frac{x}{l}$$

3. Aufgabe: Numerische Verfahren (18 Punkte)

Das Strömungsfeld eines schlanken Doppelkeilprofils in einer Überschallströmung ($Ma > 1$) mit einem Anstellwinkel $\alpha > 0$ soll durch die numerische Lösung der Euler-Gleichungen approximiert werden. Es wird von einer zweidimensionalen Strömung ausgegangen.

1. Skizzieren Sie sorgfältig das Rechengebiet sowie ein uniformes kartesisches Rechengitter um das Profil.
2. Erläutern Sie mittels der Charakteristikentheorie die Wahl der Ein- und Auströmrandbedingungen und geben Sie alle für die Lösung des Problems notwendigen Randbedingungen für die Geschwindigkeitskomponenten in Hauptströmungsrichtung und in Normalenrichtung u, v an.
3. Beurteilen Sie die Fähigkeit des Verfahrens den Auftrieb bzw. den Widerstand bei verschiedenen Anstellwinkeln zu berechnen. Geben Sie hierbei insbesondere an, ob alle Ihnen bekannten Widerstandsanteile berücksichtigt werden.
Schlagen Sie anschließend gegebenenfalls ein alternatives Verfahren vor, mit dem die möglicherweise nicht berücksichtigten Widerstandsanteile berechnet werden könnten, und erläutern Sie, wie dabei das Rechengitter sowie die Randbedingungen angepasst werden müssten.
4. Eine zweidimensionale Überschallströmung wird nun durch die für kartesische Koordinaten formulierte partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung des Geschwindigkeitspotentials, die sogenannte Wellengleichung, beschrieben:

$$-\beta^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0, \quad \beta = \sqrt{Ma^2 - 1}, \quad Ma > 1. \quad (1)$$

Diese soll durch ein numerisches knotenzentriertes Differenzenverfahren gelöst werden. Entwickeln Sie aus der Taylorreihe

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m f(x_0)}{\partial x^m} \cdot (x - x_0)^m \quad (2)$$

eine zentrale Approximation für die zweite Ableitung einer Funktion $f(x)$ eines äquidistanten Gitters, die eine Genauigkeit von zweiter Ordnung in x besitzt. Geben Sie zudem den führenden Term des Abbruchfehlers an.

5. Ersetzen Sie die räumlichen Ableitungen der Wellengleichung durch zentrale Differenzen, welche den folgenden Differenzenstern enthalten. Dabei entspricht der Index i der x -Richtung und der Index j der y -Richtung.

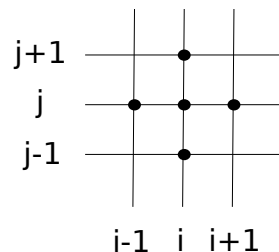


Abbildung 3.1: Differenzenstern.

1. Aufgabe: (LÖSUNG) Fragenteil (14 Punkte)

- Das d'Alembertsche Paradoxon folgt aus der Potentialtheorie und besagt, dass in einer zweidimensionalen reibungsfreien Strömung ein geschlossener Körper keine Widerstandskraft erfährt.

In einem dreidimensionalen Fall eines Flügels endlicher Spannweite ist die Auftriebsverteilung entlang der Spannweite nicht konstant. An den Flügelspitzen kommt es zum Ausgleich. Aufgrund des variierenden Druckfeldes auf der Ober- und Unterseite unterscheiden sich die Stromlinienfelder, weshalb sich hinter dem Flügel eine Wirbelfläche ausbildet. Diese Wirbelfläche induziert am Flügel eine nach unten gerichtete Geschwindigkeit, die zur Reduktion des geometrischen Anstellwinkels um den induzierten Anstellwinkel führt. Die resultierende Luftkraft wird um den induzierten Anstellwinkel entgegen der Flugrichtung geneigt, so dass eine in Strömungsrichtung weisende Kraft entsteht, die einer Widerstandskraft entspricht.

- Der induzierte Widerstand eines gefeiltten Flügels lässt sich mit der Traflächentheorie bestimmen. Hierzu wird eine flächige Verteilung der Wirbeldichte entlang der Spannweite sowie der Flügeltiefe angenommen. Aus der kinematischen Randbedingung, dass die von der Wirbelfläche induzierte Geschwindigkeit und die Normalkomponente der Anströmung sich gegenseitig aufheben, erhält man ein System von Integralgleichungen, das numerisch gelöst wird.

- Ein Wasserschleppversuch stellt eine inkompressible Strömung dar, somit muss eine Kompressibilitätskorrektur beim Modellbau berücksichtigt werden.

Die Anwendung einer Kompressibilitätskorrektur (z.B. der Prandtl-Glauert-Regel) auf den gefeiltten Flügel ergibt den rechts dargestellten Modellflügel für den Wasserschleppversuch.

Die x und z Richtungen bleiben unverändert: $\alpha_{Ma=0.6} = \alpha_{Wasser}$, $\delta(X)_{Ma=0.6} = \delta(X)_{Wasser}$.

Die y -Richtung wird mit $\sqrt{1 - Ma_\infty^2} = \sqrt{1 - 0.6^2} = 0.8$ skaliert (Spannweite sowie Vorder- und Hinterkantenpfeilungswinkel).

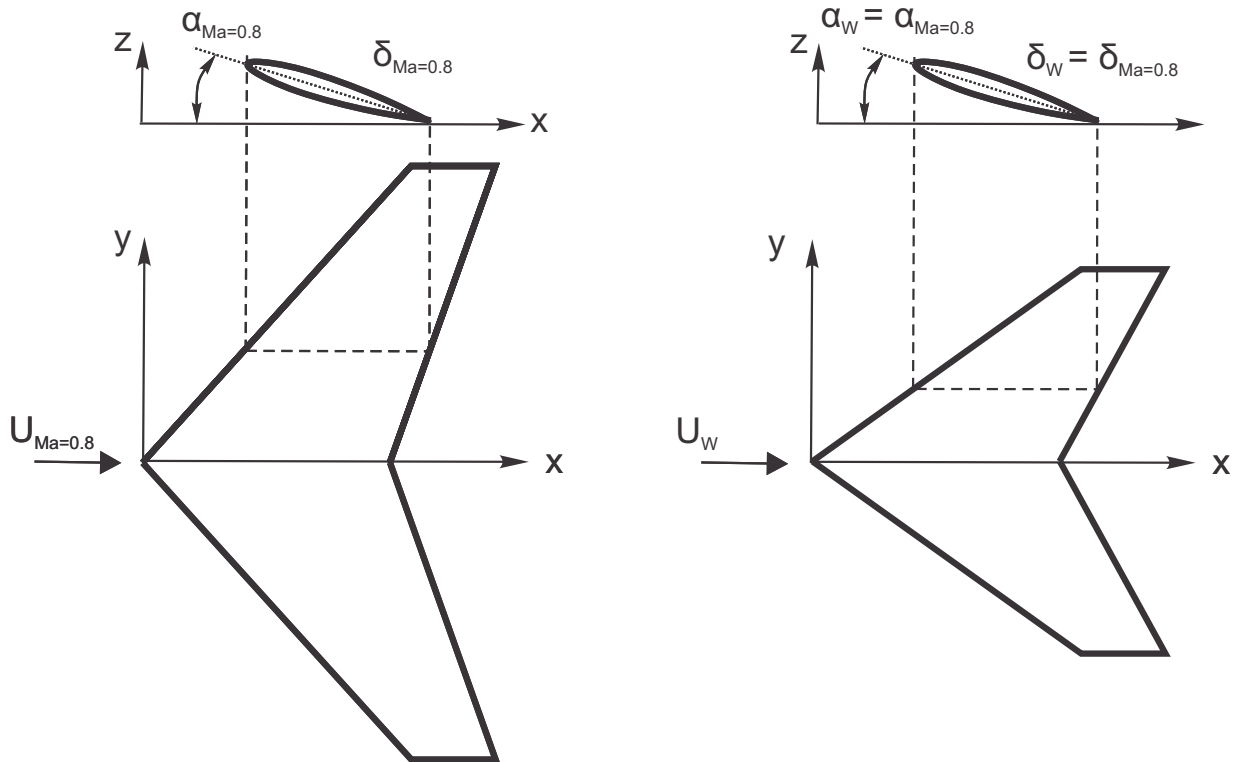
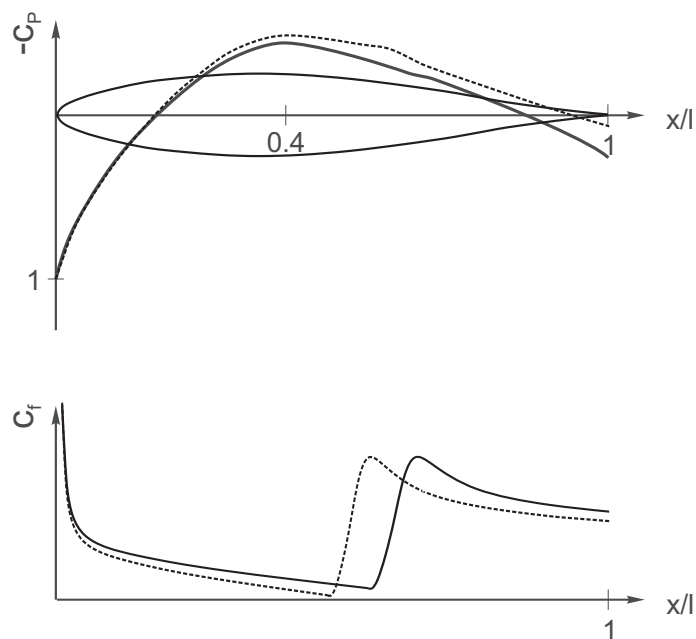


Abbildung 1.1: Grundriss und Profilschnitt eines gefeiltten Flügels

4. (a) Die Druckbeiwertverteilung des NACA 64₂-015 bei $\alpha = 0$ weist folgende Merkmale auf (siehe die durchgezogene Linie in der Skizze):
- Verläufe auf der Ober- und Unterseite identisch (symmetrische Anströmung und Profilform);
 - Druckminimum bei $X = 0.4$ (2. Kennziffer);
- (b) Da es sich um ein laminares Profil handelt und die Reynoldszahl von $Re_c = 5 \cdot 10^5$ relativ klein ist, erfolgt der laminar-turbulente Umschlag am Profil relativ spät. Der Wandreibungsbeiwert nimmt im laminaren Bereich kontinuierlich ab, erhöht sich sprunghaft im Bereich der Transition und nimmt dann im turbulenten Abschnitt wieder kontinuierlich ab.
- (c) Aufgrund der höheren Reynoldszahl sind zwei Effekte festzustellen (gestrichelte Linie):
- Höhere Saugspitze aufgrund der zunächst geringeren Grenzschichtdicke;
 - Kleinerer c_p -Wert im Bereich der der Hinterkante.
- (d) Aufgrund der höheren Reynoldszahl sind zwei Effekte festzustellen (gestrichelte Linie):
- Verschiebung der Transition stromauf;
 - Zunächst niedrigerer c_f -Beiwert.



2. Aufgabe: (LÖSUNG) Skelett-Theorie und linearisierte Potentialtheorie (18 Punkte)

1. (a)

$$Z(X) = X^3 - \frac{7}{4}X^2 + \frac{3}{4}X = X\left(X - \frac{3}{4}\right)(X - 1)$$

Das Profil besitzt einen S-Schlag aufgrund der drei Nullstellen bei $X = 0$, $X = \frac{3}{4}$, $X = 1$ innerhalb des Intervalls $0 \leq X \leq 1$.

$$\frac{dZ(X)}{dX} = 3X^2 - \frac{7}{2}X + \frac{3}{4}$$

Aus der kinematischen Randbedingung und dem Ansatz von Birnbaum-Ackermann folgt:

$$\alpha - \frac{dZ}{dX} = A_0 + \sum_{n=1}^N A_n \cdot \cos(n\varphi)$$

Mit der Substitution $X = \frac{1}{2}(\cos\varphi + 1)$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} \alpha - 3\left(\frac{1}{2}(\cos\varphi + 1)\right)^2 + \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{2}(\cos\varphi + 1) - \frac{3}{4} &= A_0 + \sum_{n=1}^N A_n \cdot \cos(n\varphi) \\ \alpha - \frac{3}{4}\cos^2\varphi - \frac{3}{2}\cos\varphi - \frac{3}{4} + \frac{7}{4}\cos\varphi + \frac{7}{4} - \frac{3}{4} &= A_0 + \sum_{n=1}^N A_n \cdot \cos(n\varphi) \\ \alpha - \frac{3}{4}\cos^2\varphi + \frac{1}{4}\cos\varphi + \frac{1}{4} &= A_0 + \sum_{n=1}^N A_n \cdot \cos(n\varphi) \\ \alpha - \frac{3}{8}(1 + \cos(2\varphi)) + \frac{1}{4}\cos\varphi + \frac{1}{4} &= A_0 + \sum_{n=1}^N A_n \cdot \cos(n\varphi) \\ \alpha - \frac{1}{8} - \frac{3}{8}\cos(2\varphi) + \frac{1}{4}\cos\varphi &= A_0 + \sum_{n=1}^N A_n \cdot \cos(n\varphi) \end{aligned}$$

Der Koeffizientenvergleich liefert die Konstanten A_0 bis A_n :

$$A_0 = \alpha - \frac{1}{8}; \quad A_1 = \frac{1}{4}; \quad A_2 = -\frac{3}{8}; \quad A_n = 0 \quad \text{für } n \geq 3$$

Der gesuchte Zirkulationsverteilung ergibt sich zu:

$$\gamma(\varphi) = 2V_\infty \cdot \left(\left(\alpha - \frac{1}{8}\right) \cdot \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \frac{1}{4}\sin(\varphi) - \frac{3}{8}\sin(2\varphi) \right)$$

(b) Aus dem Satz von Kutta-Zhukhovski folgt für die zweidimensionale Auftriebskraft

$$\hat{L} = \rho V_\infty \Gamma = \rho V_\infty \int_0^l \gamma(x) dx = \rho V_\infty l \int_0^1 \gamma(X) dX \quad , \quad \text{wobei } X = x/l.$$

Für den Auftriebskoeffizienten c_l ergibt sich:

$$c_l = \frac{\hat{L}}{\frac{\rho}{2} V_\infty^2 l} = \frac{2 \int_0^1 \gamma(X) dX}{V_\infty}$$

Eingesetzt $\gamma(\varphi)$ mit $dX = -\frac{1}{2}\sin\varphi d\varphi$ aus der Substitution $X = \frac{1}{2}(1 + \cos\varphi)$ ergibt

$$\begin{aligned} c_l &= \frac{1}{V_\infty} \int_0^\pi \gamma(\varphi) \sin\varphi d\varphi = 2 \int_0^\pi \left(A_0 \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin\varphi + A_1 \sin^2\varphi + A_2 \sin(2\varphi) \sin\varphi \right) d\varphi \\ &= 2 \int_0^\pi \left(A_0(1 - \cos\varphi) + A_1 \sin^2\varphi + A_2 \sin(2\varphi) \sin\varphi \right) d\varphi \\ &= \pi(2A_0 + A_1) \end{aligned}$$

Mit den berechneten Werten für A_n ergibt sich der Auftriebsbeiwert zu:

$$c_l = 2\pi\alpha$$

(c) Für den Momentenbeiwert ergibt sich:

$$c_m = -\frac{\pi}{4}(2A_0 + 2A_1 - A_2) = -\frac{\pi}{2}\alpha - \frac{5\pi}{32}$$

Der Druckpunkt ergibt sich aus der Momentenbilanz um die Profilnase:

$$X_{cp} = -\frac{c_m}{c_l} = \frac{1}{4} + \frac{5}{64\alpha}$$

Für den Fall $\alpha \rightarrow 0$ liegt der DP demnach weit hinter dem Profil. Mit zunehmendem Anstellwinkel wandert der DP in Richtung $X = \frac{1}{4}$, da sich das Verhältnis zwischen Nullmoment und auftriebsabhängigem Moment immer mehr zu Gunsten des auftriebsabhängigen Moments verschiebt.

Aus der Momentenbilanz um die Profilnase und der Definition des Neutrapunktes ($\partial c_{m_0}/\partial c_l = 0$) folgt:

$$c_m = c_{m_0} - c_l \cdot X_N \quad \Rightarrow \quad (\text{abgeleitet nach } c_l) \quad \Rightarrow \quad X_N = -\frac{\partial c_m}{\partial c_l} = -\frac{\partial c_m}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial c_l} = -\frac{-\pi/2}{2\pi} = \frac{1}{4}$$

2. Für die Bestimmung der Lagen des Druckpunktes und des Neutrapunktes müssen zunächst der Auftriebsbeiwert c_{l2} und der Momentenbeiwert um die Profilnase c_{m2} im Überschall bestimmt werden.

Mit den absoluten lokalen Strömungsänderungswinkeln β_i entlang des Profilskeletts und dem Hinweis $c_p|_{sup} = \pm \frac{2\beta_i}{\sqrt{Ma_\infty^2 - 1}}$ ergibt sich:

$$c_{p,i}|_{sup} = \pm \frac{2\beta_i}{\sqrt{Ma_\infty^2 - 1}} \Rightarrow \Delta c_{p,i} = \frac{4(\alpha - \frac{dZ}{dX})}{\sqrt{Ma_\infty^2 - 1}}$$

Aus der Integration ergibt sich der Auftriebsbeiwert zu:

$$c_l|_{sup} = \int_0^1 \Delta c_p dX = \dots (\text{Nur Anstellung der Profilschne relevant}) = \frac{4\alpha}{\sqrt{Ma_\infty^2 - 1}}$$

$$\begin{aligned} c_m|_{sup} &= - \int_0^1 \Delta c_p X dX = - \frac{4}{\sqrt{Ma_\infty^2 - 1}} \int_0^1 \left(\alpha - 3X^2 + \frac{7}{2}X - \frac{3}{4} \right) X dX \\ &= - \frac{4}{\sqrt{Ma_\infty^2 - 1}} \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{3}{8} - \frac{3}{4} + \frac{7}{6} \right) = - \frac{4}{\sqrt{Ma_\infty^2 - 1}} \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{24} \right) \end{aligned}$$

Somit ergibt sich für die Lagen des Druckpunktes und des Neutrapunktes im Überschall:

$$X_{cp} = -\frac{c_m}{c_l} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{24\alpha} \right) \quad \text{und} \quad X_N = -\frac{\partial c_m}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial c_l} = \frac{1}{2}$$

3. Aufgabe: Numerische Verfahren (18 Punkte) (LÖSUNG)

1. Kartesisches Rechengitter mit Berandungen 1-5.

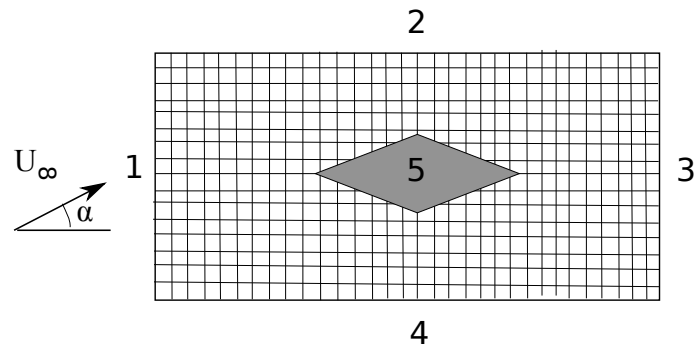


Abbildung 3.1: Gitter.

2. Bestimmung der Randbedingungen über die charakteristischen Ausbreitungsgeschwindigkeiten ($u - c, u, u + c$).

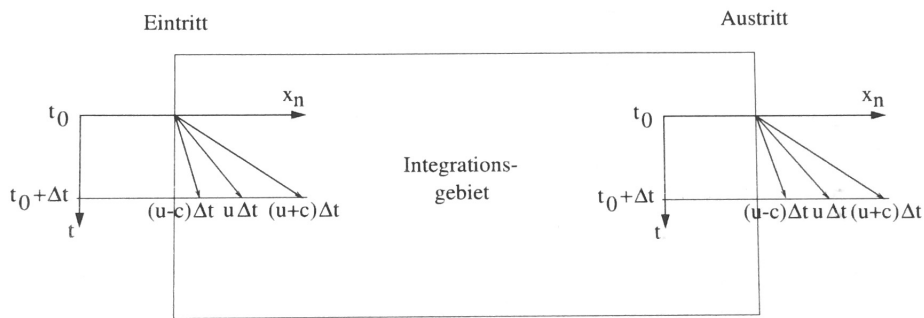


Abbildung 3.2: Charakteristische Ausbreitungsgeschwindigkeiten.

1: Einströmrand; $u(y) = U_\infty \cos(\alpha), v(y) = U_\infty \sin(\alpha)$

2: Ausströmrand; muss nichts vorgegeben werden; alle Variablen können aus dem Rechengebiet extrapoliert werden $\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \frac{\partial v}{\partial y} = 0$

3: Ausströmrand; muss nichts vorgegeben werden; alle Variablen können aus dem Rechengebiet extrapoliert werden $\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \frac{\partial v}{\partial x} = 0$

4: Einströmrand; $u(x) = U_\infty \cos(\alpha), v(x) = U_\infty \sin(\alpha)$

5: Körperoberfläche; $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$

3. Berechnung von Auftrieb und Widerstand:

- Auftrieb: kann aus dem Druckverlauf am Körperrand näherungsweise berechnet werden.

-Wellenwiderstand: kann berechnet werden, da nur die Druckverteilung benötigt wird.

-induzierter Widerstand: nicht vorhanden, da ein zweidimensionales Problem betrachtet wird.

-Druckwiderstand: kein Druckwiderstand vorhanden, da eine reibungsfreie Strömung betrachtet wird (d'Alembertsches Paradoxon).

-Reibungswiderstand: kann nicht berechnet werden, da viskose Effekte in den Euler-Gleichungen vernachlässigt werden.

Um den Reibungswiderstand zu bestimmen, müssen die Navier-Stokes Gleichungen verwendet werden. Dazu muss das Rechengitter in Wandnähe eine höhere Auflösung besitzen, um die Geschwindigkeitsgradienten, welche aufgrund der Haftbedingung ($\vec{u}=0$) entstehen, zu erfassen. Abhängig von der Reynoldszahl kann es an den Kanten, die die maximale Dicke des Profils definieren, zur Ablösung kommen. In diesem Fall is auch der Druckwiderstand zu berechnen.

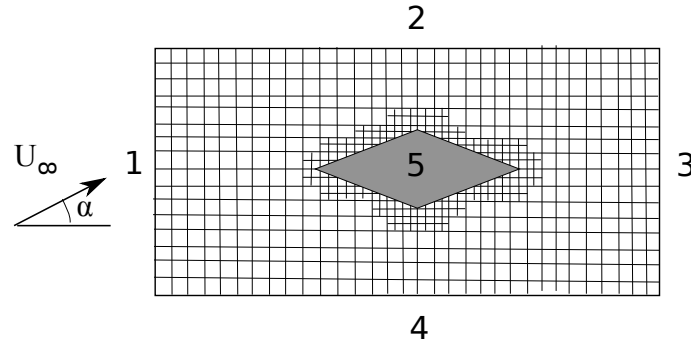


Abbildung 3.3: Gitter mit Randverfeinerung.

4. Taylorreihenapproximation für die zweite Ableitung:

$$I: \quad \phi_{i+1} = \phi_i + \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} \Delta x^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \phi_i}{\partial x^3} \Delta x^3 + \frac{1}{24} \frac{\partial^4 \phi_i}{\partial x^4} \Delta x^4 + \mathcal{O}(\Delta x^5) \quad (3)$$

$$II: \quad \phi_{i-1} = \phi_i - \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} \Delta x^2 - \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \phi_i}{\partial x^3} \Delta x^3 + \frac{1}{24} \frac{\partial^4 \phi_i}{\partial x^4} \Delta x^4 + \mathcal{O}(\Delta x^5) \quad (4)$$

Addition von I und II ergibt:

$$\phi_{i+1} + \phi_{i-1} = 2\phi_i + \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} \Delta x^2 + \frac{1}{12} \frac{\partial^4 \phi_i}{\partial x^4} \Delta x^4 \quad (5)$$

Damit ergibt sich für die zweite Ableitung:

$$\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} = \frac{\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}}{\Delta x^2} - \left(\frac{1}{12} \frac{\partial^4 \phi_i}{\partial x^4} \Delta x^2 \right)_{\text{Abbruchfehler}} \quad (6)$$

5. Diskretisierte Wellengleichung:

$$-\beta^2 \frac{\phi_{i+1,j} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{\phi_{i,j+1} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i,j-1}}{\Delta y^2} = 0, \quad i = 1, \dots, \quad j = 1, \dots \quad (7)$$