

Einführung

Die Grenzschichttheorie ist ein Sondergebiet der Strömungsmechanik, das sich mit “Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung” beschäftigt. Dies ist der Titel eines Vortrags, den Ludwig Prandtl 1904 auf dem Heidelberger Mathematiker-Kongreß gehalten hat. Er ist der Vater der Grenzschichttheorie und hat sie mit diesem Vortrag eingeführt. Er teilte die Strömung in der Umgebung eines Körpers in zwei Gebiete auf: 1. in eine Außenströmung, in der man die Reibung vernachlässigen kann und 2. in eine dünne Schicht in der Nähe des Körpers, die er “Grenzschicht” nannte, in der die Reibung eine wesentliche Rolle spielt.

Dieser revolutionäre Gedanke von Prandtl, der zunächst in Mathematikerkreisen noch sehr umstritten war, hat zu neuen Impulsen in der gesamten Strömungsmechanik und insbesondere in der Aerodynamik geführt. Er hat die Kluft, die sich am Ende des 19. Jahrhunderts zwischen der theoretischen Hydrodynamik und der mehr praktisch orientierten Hydraulik aufgetan hatte, wieder geschlossen. Er konnte zeigen, wie gerade einige praktisch sehr wichtige Fragestellungen, insbesondere die des Reibungswiderstandes von Körpern, theoretisch behandelt werden können. Darüber hinaus hat der ohne Einschränkung genial zu nennende Ansatz eine neue mathematische Methode ins Leben gerufen: Die Methode der singulären asymptotischen Entwicklungen. Diese Methode hat in vielen anderen Gebieten der Physik große Erfolge gezeigt. Es handelt sich dabei fast immer um das Auffinden dünner Schichten, die eine besondere, physikalisch begründete Struktur haben, und die in Außengebiete, denen diese Struktur fehlt, eingebettet sind. In jüngster Zeit hat zum Beispiel die Theorie dünner laminarer Flammenschichten die Beschreibung von Verbrennungsvorgängen revolutioniert.

Die Vorlesung kann lediglich eine Einführung in das inzwischen klassische Gebiet der Strömungs- und Temperaturgrenzschichten sein. Zur Vertiefung werden die Bücher

- [1] H. Schlichting, *Grenzschichttheorie*, Verlag G. Braun, Karlsruhe (1980)
- [2] M. Jischa, *Konvektiver Impuls-, Wärme- und Stoffaustausch*, Vieweg-Verlag, Braunschweig/Wiesbaden (1982)

und im Hinblick auf die Turbulenztheorie das Buch von Rotta

- [3] J.C. Rotta, *Turbulente Strömungen*, Teubner-Verlag, Stuttgart (1972)

empfohlen.

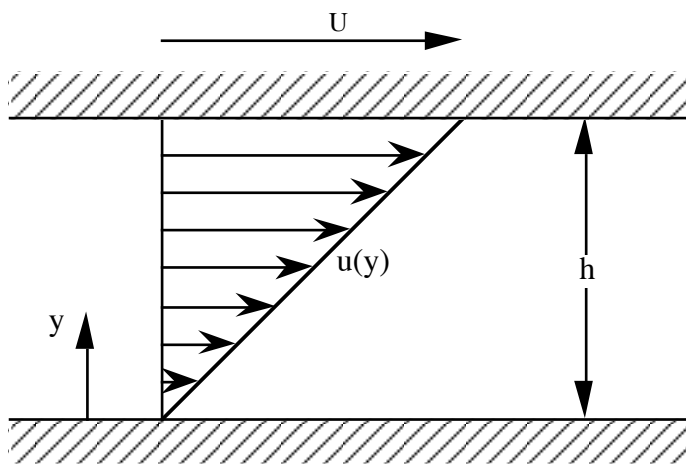


Bild 1.1:
Geschwindigkeitsverteilung einer zähen Flüssigkeit zwischen zwei parallelen ebenen Wänden (Couette-Strömung)

1. Einige Grundzüge der Strömungen mit kleiner Reibung

1.1 Die molekulare Zähigkeit

Das Wesen der Zähigkeit einer Flüssigkeit kann man sich am einfachsten durch den folgenden Versuch klarmachen: Wir betrachten die Strömung zwischen zwei sehr langen parallelen ebenen Platten, von denen die eine in Ruhe ist, während die andere mit der konstanten Geschwindigkeit U in ihrer eigenen Ebene bewegt wird. Der Plattenabstand beträgt h (Bild 1.1). Der Druckgradient sei in dem ganzen Flüssigkeitsraum konstant. Aus dem Experiment erhält man die Aussage, daß die Flüssigkeit an den beiden Platten haftet, so daß an der unteren Platte die Geschwindigkeit Null ist, während sie an der oberen Platte mit der Geschwindigkeit U der Platte übereinstimmt. Ferner herrscht zwischen den Platten eine lineare Geschwindigkeitsverteilung, somit ist die Geschwindigkeit dem Abstand y von der unteren Platte proportional und es gilt

$$u(y) = \frac{y}{h}U . \quad (1.1)$$

Um den Bewegungszustand aufrechtzuerhalten, muß an der oberen Platte eine Tangentialkraft in der Bewegungsrichtung angreifen, die den Reibungskräften der Flüssigkeit das Gleichgewicht hält. Nach den Versuchsergebnissen ist diese Kraft (genommen pro Einheit der Plattenfläche) proportional der Geschwindigkeit U der oberen Platte und umgekehrt proportional dem Plattenabstand h . Die Reibungskraft pro Flächeneinheit τ (Reibungsschubspannung) ist somit proportional U/h , wofür im allgemeinen Fall auch du/dy gesetzt werden kann. Der Proportionalitätsfaktor zwischen τ und du/dy , der mit μ bezeichnet werden möge, hängt von der Natur der Flüssigkeit ab. Er ist klein für die sogenannten "leichtflüssigen" Flüssigkeiten wie Wasser und Alkohol, dagegen groß für die sogenannten sehr zähen Flüssigkeiten wie Öl und Glycerin. Wir haben somit das Elementargesetz der Flüssigkeitsreibung in der Form

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} . \quad (1.2)$$

Die Größe μ ist eine von der Temperatur stark abhängige Materialkonstante der Flüssigkeit, die als das Zähigkeitsmaß oder kurz die Zähigkeit der Flüssigkeit bezeichnet wird.

Das durch Gl. (1.2) gegebene Reibungsgesetz heißt Newtonscher Schubspannungsansatz. Die Gl. (1.2) kann als Definitionsgleichung für den Zähigkeitsbeiwert aufgefaßt werden. Es muß jedoch betont werden, daß die hier betrachtete Bewegung einen sehr einfachen Spezialfall darstellt. Die Strömung nach Bild 1.1 wird auch als einfache Scherströmung bezeichnet. Die Verallgemeinerung dieses elementaren Reibungsgesetzes ergibt das Stokesche Reibungsgesetz. Die physikalische Dimension des Zähigkeitsbeiwertes kann aus Gl. (1.2) sofort abgelesen werden. Die Schubspannung τ hat die Dimension $\text{kg}/(\text{m s}^2)$ und der Geschwindigkeitsgradient du/dy die Dimension s^{-1} . Somit hat man

$$\mu = \left[\frac{\text{kg}}{\text{m s}} \right].$$

Bei allen Strömungen, bei denen die Reibungskräfte mit den Trägheitskräften zusammenwirken, spielt eine wichtige Rolle der Quotient aus der Zähigkeit μ und der Dichte ρ , der als kinematische Zähigkeit ν bezeichnet wird:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} = \left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}} \right]. \quad (1.3)$$

Zahlenwerte: Für die tropfbaren Flüssigkeiten ist die Zähigkeit nahezu unabhängig vom Druck, während sie mit wachsender Temperatur stark abnimmt. Die Unabhängigkeit von μ vom Druck besteht auch für Gase, während hier μ mit wachsender Temperatur zunimmt. Die kinematische Zähigkeit ν hat für tropfbare Flüssigkeiten nahezu den gleichen Gang mit der Temperatur wie μ , da die Dichte ρ sich nur wenig mit der Temperatur ändert. Dagegen bei den Gasen, wobei ρ mit wachsender Temperatur stark abnimmt, zeigt ν eine starke Zunahme mit der Temperatur. In der nachstehenden Tabelle sind einige Zahlenwerte von ρ , μ und ν für Wasser und Luft angegeben (Tabelle 1).

Wasser					
Temperatur T [°C]	Dichte ρ [kg/m ³]	Zähigkeit $\mu \cdot 10^6$ [kg/m s]	kinematische Zähigkeit $\nu \cdot 10^6$ [m ² /s]	Wärmeleit- fähigkeit λ [W/m K]	sp. Wärme bei konst. Druck c_p [kJ/kgK]
0	999,3	1795	1,800	0,552	4,218
10	999,3	1304	1,300	0,578	4,192
20	997,3	1010	1,010	0,598	4,182
40	991,5	655	0,661	0,628	4,178
60	982,6	474	0,482	0,652	4,184
80	971,8	357	0,368	0,669	4,196
100	951,1	283	0,296	0,682	4,216

Luft					
Temperatur T [°C]	Dichte ρ [kg/m ³]	Zähigkeit $\mu \cdot 10^6$ [kg/m s]	kinematische Zähigkeit $\nu \cdot 10^6$ [m ² /s]	Wärmeleit- fähigkeit λ [W/m K]	sp. Wärme bei konst. Druck c_p [kJ/kgK]
-20	1,39	15,6	11,3	0,0228	1,005
-10	1,34	16,2	12,1	0,0235	1,005
0	1,29	16,8	13,0	0,0243	1,005
10	1,25	17,4	13,9	0,0250	1,005
20	1,21	17,9	14,9	0,0257	1,005
40	1,12	19,1	17,0	0,0271	1,009
60	1,06	20,3	19,2	0,0285	1,009
80	0,99	21,5	21,7	0,0299	1,009
100	0,94	22,9	24,5	0,0314	1,009

Tabelle 1: Dichte, dynamische und kinematische Zähigkeit sowie Wärmeleitfähigkeit und spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck von Wasser und Luft in Abhängigkeit von der Temperatur.

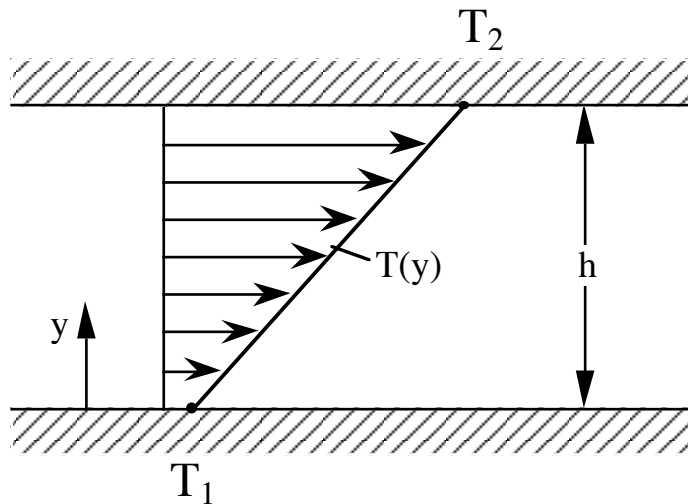


Bild 1.2:
Temperaturprofil zwischen zwei
ebenen Platten

1.2 Die molekulare Wärmeleitfähigkeit

In ähnlicher Weise wie der Newtonsche Ansatz für die Reibung läßt sich der Fouriersche Ansatz für die Wärmeleitung herleiten. Dazu soll ein ruhendes Medium zwischen zwei Platten im Abstand h betrachtet werden (Bild 1.2). Die Temperaturdifferenz betrage $\Delta T = T_2 - T_1$.

Die Erfahrung sagt nun, daß der auf die Fläche bezogene Wärmestrom q proportional der Temperaturdifferenz ΔT und umgekehrt proportional dem Abstand zwischen den Platten h ist. Da wiederum ein lineares Temperaturprofil im Medium vorausgesetzt wird

$$T(y) = \frac{y}{h}(T_2 - T_1) + T_1, \quad (1.4)$$

ergibt sich, daß lokal im Medium der Wärmestrom proportional zum Temperaturgradienten ist

$$q \sim \frac{dT}{dy}. \quad (1.5)$$

Der Proportionalitätsfaktor ist eine stoffspezifische Größe und wird als Wärmeleitfähigkeit λ bezeichnet. Weiterhin wird ein negatives Vorzeichen eingeführt, um anzudeuten, daß Wärme in Richtung abnehmender Temperatur fließt. Der Fouriersche Ansatz für die Wärmeleitung lautet dann

$$q = -\lambda \frac{dT}{dy}. \quad (1.6)$$

Dabei hat der auf die Fläche bezogene Wärmestrom die Dimension

$$q = \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right],$$

die Temperatur die Dimension K und die Wärmeleitfähigkeit infolgedessen die Dimension

$$\lambda = \left[\frac{\text{W}}{\text{m K}} \right].$$

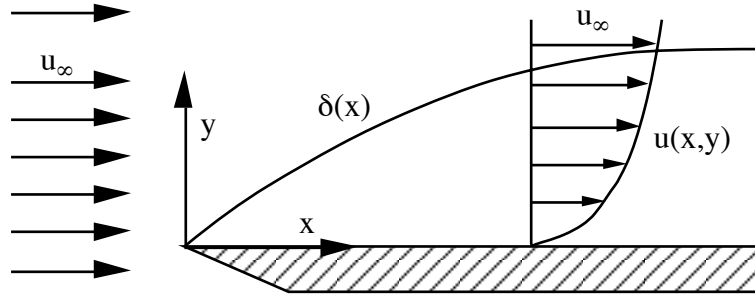


Bild 1.3:
Schematische Darstellung der Grenzschicht an einer ebenen Platte

Weiterhin wird die spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck c_p benötigt. Sie hat die Dimension

$$c_p = \left[\frac{\text{kJ}}{\text{kg K}} \right] .$$

Diese Größen sind für Wasser und Luft ebenfalls in Tabelle 1 dargestellt. Daraus läßt sich die Temperaturleitfähigkeit a

$$a = \frac{\lambda}{\rho c_p} , \quad (1.7)$$

die die Dimension $[\text{m}^2/\text{s}]$ hat, und schließlich, als dimensionslose Kennzahl, die Prandtl-Zahl

$$\text{Pr} = \frac{\mu c_p}{\lambda} = \frac{\nu}{a} \quad (1.8)$$

bilden.

1.3 Phänomenologische Beschreibung von Grenzschichten

Anschaulich versteht man unter einer Grenzschicht eine Schicht in der Nähe einer festen Wand, in der die Geschwindigkeit u vom Wert Null an der Wand auf den Wert u_δ der ungestörten Außenströmung fernab von der Wand asymptotisch übergeht. Die Dicke der Grenzschicht wird definiert durch diejenige Stelle, an der $u = 0,99 u_\delta$ ist. Die Grenzschichtdicke ist aus Gründen, die später deutlich werden, eine Funktion der Lauflänge entlang der Oberfläche des Körpers. Die Lauflänge wird bei einem stumpfen Körper vom vorderen Staupunkt oder, bei einem spitzen Körper, von der Spitze oder Vorderkante aus gemessen. Für die Grenzschicht auf einer ebenen Platte ist das Geschwindigkeitsprofil in Bild 1.3 schematisch dargestellt. In diesem Fall ist $u_\delta = u_\infty$ konstant.

Um eine erste Abschätzung durchführen zu können, soll näherungsweise angenommen werden, daß das Geschwindigkeitsprofil linear ist, d. h. durch den Ansatz

$$u(x, y) = u_\infty \frac{y}{\delta(x)} \quad (1.9)$$

angenähert werden kann. Dann kann in einem rechteckigen Kontrollvolumen 1–2–3–4 entsprechend Bild 1.4 eine Massen- und Impulsbilanz durchgeführt werden. Dabei sollen

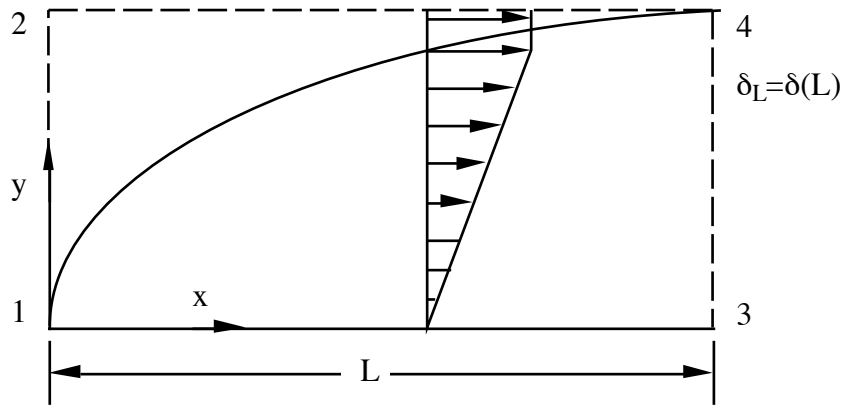


Bild 1.4:
Massen- und Impulsbilanz in einer Grenzschicht

alle Massen- und Impulsströme für die Einheitstiefe eins gelten, so daß die Tiefe der Platte senkrecht zur dargestellten Ebene nicht auftaucht.

Für die Massenbilanz gilt pro Einheitstiefe

Massenstrom durch 1–2:

$$\rho u_{\infty} \delta_L$$

Massenstrom durch 3–4:

$$-\int_0^{\delta_L} \rho u \, dy = -\rho \frac{u_{\infty}}{\delta_L} \int_0^{\delta_L} y \, dy = -\frac{1}{2} \rho u_{\infty} \delta_L$$

Da die Platte als massenundurchlässig angenommen wird, ergibt sich aus der Massenerhaltung

Massenstrom durch 2–4:

$$-\frac{1}{2} \rho u_{\infty} \delta_L ,$$

Für die Impulsbilanz pro Einheitstiefe gilt

Impulsstrom durch 1–2:

$$\rho u_{\infty}^2 \delta_L$$

Impulsstrom durch 3–4:

$$-\int_0^{\delta_L} \rho u^2 \, dy = -\rho \frac{u_{\infty}^2}{\delta_L^2} \int_0^{\delta_L} y^2 \, dy = -\frac{1}{3} \rho u_{\infty}^2 \delta_L$$

Impulsstrom durch 2–4:

$$-\frac{1}{2} \rho u_{\infty}^2 \delta_L$$

Damit ist die Kraft pro Einheitstiefe der Strömung auf die Platte

$$K = \rho u_{\infty}^2 \delta_L - \frac{1}{3} \rho u_{\infty}^2 \delta_L - \frac{1}{2} \rho u_{\infty}^2 \delta_L = \frac{1}{6} \rho u_{\infty}^2 \delta_L . \quad (1.10)$$

Diese Kraft muß gleich der mittleren Schubspannung im Bereich $0 > x > L$ mit der Länge L sein. Die mittlere Schubspannung ist

$$\bar{\tau} = \frac{1}{L} \int_0^L \mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} dx = \frac{1}{L} \int_0^L \mu \frac{u_\infty}{\delta(x)} dx . \quad (1.11)$$

Nimmt man für $\delta(x)$ ein Anwachsen nach einer Parabel an (s. Abschnitt 2.2)

$$\delta(x) = \delta_L \sqrt{\frac{x}{L}} , \quad (1.12)$$

so ergibt sich

$$K = \bar{\tau}L = 2\mu L \frac{u_\infty}{\delta_L} = \frac{1}{6} \rho u_\infty^2 \delta_L . \quad (1.13)$$

Dies ergibt eine Abschätzung der Grenzschichtdicke als Funktion der mit der Plattenlänge gebildeten Reynolds-Zahl

$$\text{Re}_L = \frac{\rho u_\infty L}{\mu} \quad (1.14)$$

in der Form

$$\frac{\delta_L}{L} = \sqrt{\frac{12}{\text{Re}_L}} \approx \frac{3,5}{\sqrt{\text{Re}_L}} . \quad (1.15)$$

Aus der exakten Theorie wird sich statt des Zahlenwertes 3,5 der Wert 5,0 ergeben. Dies hängt mit der stark vereinfachten Annahme eines linearen Geschwindigkeitsprofils zusammen.

Wichtig an dem Ergebnis Gl. (1.15) ist jedoch, daß das Verhältnis zwischen Grenzschichtdicke und Plattenlänge proportional zum Kehrwert der Wurzel aus der Reynolds-Zahl ist. Da nach Tabelle 1 die kinematische Zähigkeit $\nu = \mu/\rho$ für Wasser von der Größenordnung $10^{-6} \text{m}^2/\text{s}$ und für Luft von der Größenordnung $10^{-5} \text{m}^2/\text{s}$ ist, sind bei typischen Geschwindigkeiten im Bereich von mehreren Metern pro Sekunde und Längen im Bereich von einem Meter Grenzschichtdicken zu erwarten, die etwa 1mm betragen. Die Grenzschicht ist also sehr dünn im Vergleich zur Plattenlänge. An dieser Stelle sollte die in der Einführung verwendete Bezeichnung “Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung” modifiziert werden in “Flüssigkeitsbewegung bei sehr großer Reynolds-Zahl”. Die entscheidende Größe ist nämlich die auf die charakteristische Länge und Geschwindigkeit bezogene Viskosität, nicht die Viskosität selbst. Andererseits kann man die Reynolds-Zahl auch als dimensionslose reziproke Viskosität auffassen. (Bei näherem Hinsehen sind die meisten dimensionslosen Kennzahlen dimensionslose Stoffgrößen, soweit sie Parameter eines Problems sind und nicht, wie z. B. die Nusselt-Zahl, dessen Lösung beschreiben. So kann die Mach-Zahl als eine dimensionslose reziproke Schallgeschwindigkeit, die Grashof-Zahl als ein dimensionsloser Wärmeausdehnungskoeffizient, usw. aufgefaßt werden.)

Aus der Abschätzung, Gl. (1.15), kann noch ein weiterer wichtiger Schluß bezüglich der Geschwindigkeit v in y -Richtung gezogen werden. Wenn man die Länge L um die infinitesimale Größe dL verschiebt, ergibt die Massenbilanz für einen Streifen dL entsprechend

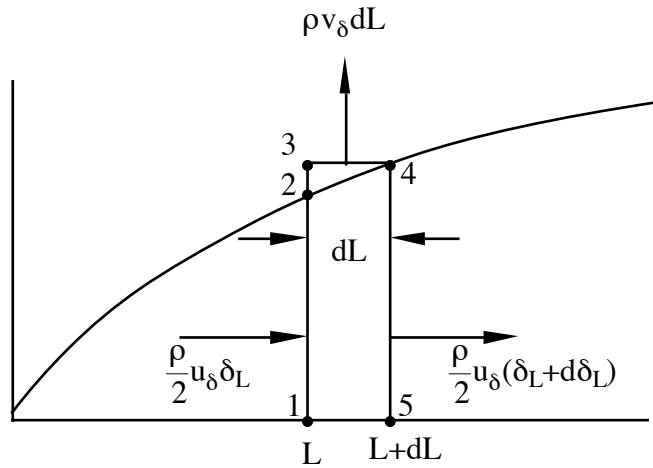


Bild 1.5:
Differenzielle Massen- und Impulsbilanz

Bild 1.5, daß der aus der Grenzschicht vertikal ausströmende Massenstrom pro Einheits-
tiefe $\rho v_\delta dL$ gleich der Differenz der horizontal ein- und ausströmenden Massenströme pro
Einheitstiefe sein muß

$$\underbrace{\frac{1}{2}\rho u_\delta \delta_L}_{1-2} + \underbrace{\rho u_\delta d\delta_L}_{2-3} - \underbrace{\rho v_\delta dL}_{3-4} - \underbrace{\frac{1}{2}\rho u_\delta (\delta_L + d\delta_L)}_{4-5} = 0. \quad (1.16)$$

Daraus folgt

$$\rho v_\delta dL = \frac{1}{2}\rho u_\delta d\delta_L. \quad (1.17)$$

Da nach Gl. (1.12) $(d\delta/dx)_L = \delta_L/2L$ ist, ist das Verhältnis der Geschwindigkeiten

$$\frac{v_\delta}{u_\delta} = \frac{3,5}{4} \frac{1}{\sqrt{\text{Re}_L}} \quad (1.18)$$

ebenfalls proportional zum Kehrwert der Wurzel aus der Reynolds-Zahl. Die Geschwin-
digkeit senkrecht zur Grenzschicht ist also um die gleiche Größenordnung kleiner als die
Tangentialgeschwindigkeit, wie das Verhältnis aus Grenzschichtdicke und Lauflänge.

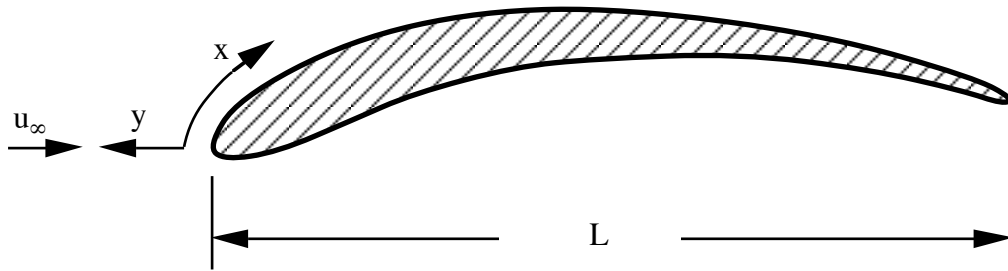


Bild 2.1 :
Umströmung eines Tragflügels

2. Die Grenzschichtgleichungen für stationäre Strömungen konstanter Dichte

2.1 Herleitung der Grenzschichtgleichungen

Um die Grenzschichtgleichungen abzuleiten, gehen wir der Einfachheit halber zunächst von den zweidimensionalen, stationären Navier-Stokesschen Gleichungen bei konstanter Dichte aus. Die Annahme konstanter Dichte gilt mit guter Näherung für alle Flüssigkeiten sowie für Gase bei niedrigen Strömungsgeschwindigkeiten, wenn isotherme Verhältnisse herrschen. Kompressibilitätseffekte auf Grund höherer Geschwindigkeit machen sich erst bemerkbar, wenn die Mach-Zahl (das Verhältnis von charakteristischer Strömungsgeschwindigkeit zur Schallgeschwindigkeit) nicht mehr klein ist. Bei Luftströmungen und Umgebungstemperatur treten nennenswerte Fehler erst bei 50–100 m/s auf.

Die zweidimensionalen, stationären Navier-Stokesschen Gleichungen lauten bei konstanter Dichte

Kontinuität:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.1)$$

Impuls in x -Richtung:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2.2)$$

Impuls in y -Richtung:

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (2.3)$$

Für ein gegebenes Problem, z. B. die Umströmung eines Körpers mit charakteristischer Abmessung L , der mit der Geschwindigkeit u_∞ angeströmt wird (s. Bild 2.1), kann das Gleichungssystem dimensionslos gemacht werden mit

$$u^* = \frac{u}{u_\infty}, \quad v^* = \frac{v}{u_\infty}, \quad p^* = \frac{p}{\rho u_\infty^2}, \quad x^* = \frac{x}{L}, \quad y^* = \frac{y}{L}, \quad (2.4)$$

so daß anstatt der Zähigkeit der Kehrwert der Reynolds-Zahl

$$\text{Re} = \frac{u_\infty L}{\nu}$$

auftritt. Das Gleichungssystem lautet dann

Kontinuität:

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0 \quad (2.5)$$

Impuls in x^* -Richtung:

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right) \quad (2.6)$$

Impuls in y^* -Richtung:

$$u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \right) \quad (2.7)$$

Wir wollen nun das Koordinatensystem so wählen, daß $y^* = 0$ eine Stromlinie entlang des betrachteten Körpers ist. Weiterhin wollen wir die in Kapitel 1 präzisierte Voraussetzung für die Existenz von Grenzschichten, nämlich die Annahme einer großen Reynolds-Zahl im asymptotischen Grenzfall $\text{Re} \rightarrow \infty$ verwenden. Setzt man diesen Grenzfall in das Gleichungssystem (2.5)–(2.7) ein, so ergeben sich zunächst die Eulerschen Gleichungen, die den Fall reibungsfreier Strömung beschreiben. Sie reduzieren sich im Spezialfall wirbelfreier Strömung auf die Potentialgleichung, man spricht von einer Potentialströmung. Reibungsfreie Strömungen können jedoch die an festen Wänden geltenden Haftbedingungen nicht erfüllen. Dies hängt damit zusammen, daß beim Grenzübergang $\text{Re} \rightarrow \infty$ die Ordnung der Differentialgleichungen erniedrigt wurde, da die höchsten Ableitungen eliminiert wurden. Daher können auch nicht sämtliche Randbedingungen, die für die Navier-Stokesschen Gleichungen galten, erfüllt werden.

Um diese Schwierigkeit zu lösen, wurde von L. Prandtl die Grenzschichttheorie entwickelt. Wir haben im 1. Kapitel gesehen, daß in der Nähe von $y^* = 0$ eine dünne Schicht von der Dicke $O(\text{Re}^{-1/2})$ existiert. Weiterhin ist die Geschwindigkeit v^* in y^* -Richtung von der Größenordnung $O(\text{Re}^{-1/2})$. Wir entwickeln daher die Geschwindigkeiten und den Druck in eine Reihe für kleine Werte von ε , definiert durch

$$\varepsilon = \text{Re}^{-1/2} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} u^* &= u_0^* + \varepsilon u_1^* + \dots \\ v^* &= \varepsilon v_0^* + \varepsilon^2 v_1^* + \dots \\ p^* &= p_0^* + \varepsilon p_1^* + \dots, \end{aligned} \quad (2.9)$$

wobei u_0^* , v_0^* , p_0^* usw. von der Ordnung $O(1)$ sind, und führen für die y^* -Koordinate eine sogenannte “Koordinatenstreckung” durch

$$\bar{y} = y^* / \varepsilon, \quad (2.10)$$

wobei \bar{y} von der Ordnung $O(1)$ ist, während die x^* -Koordinate unverändert bleibt

$$\bar{x} = x^*. \quad (2.11)$$

Die Koordinatenstreckung Gl. (2.10) ist eingeführt worden, damit innerhalb der dünnen Grenzschicht beide Koordinaten, \bar{x} und \bar{y} , von der gleichen Größenordnung sind.

Setzt man die Gln. (2.8)–(2.11) in das Gleichungssystem (2.5)–(2.7) ein, so erhält man

$$\frac{\partial u_0^*}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial v_0^*}{\partial \bar{y}} + \varepsilon \left(\frac{\partial u_1^*}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial v_1^*}{\partial \bar{y}} \right) + \dots = 0 \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} u_0^* \frac{\partial u_0^*}{\partial \bar{x}} + v_0^* \frac{\partial u_0^*}{\partial \bar{y}} + \varepsilon \left(u_1^* \frac{\partial u_0^*}{\partial \bar{x}} + u_0^* \frac{\partial u_1^*}{\partial \bar{x}} + v_1^* \frac{\partial u_0^*}{\partial \bar{y}} + v_0^* \frac{\partial u_1^*}{\partial \bar{y}} \right) + \dots \\ = -\frac{\partial p_0^*}{\partial \bar{x}} - \varepsilon \frac{\partial p_1^*}{\partial \bar{x}} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_0^*}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 u_0^*}{\partial \bar{y}^2} + \varepsilon \frac{\partial u_1^*}{\partial \bar{y}^2} + \dots \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\varepsilon u_0^* \frac{\partial v_0^*}{\partial \bar{x}} + \varepsilon v_0^* \frac{\partial v_0^*}{\partial \bar{y}} + \dots = -\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial p_0^*}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial p_1^*}{\partial \bar{y}} + \varepsilon^3 \frac{\partial^2 v_0^*}{\partial \bar{x}^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 v_0^*}{\partial \bar{y}^2} + \dots \quad (2.14)$$

Multipliziert man Gl. (2.14) mit ε , und vernachlässigt man dann in den Gln. (2.12)–(2.14) alle Terme von der Größenordnung ε oder kleiner, so erhält man als nullte Näherung

$$\frac{\partial u_0^*}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial v_0^*}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (2.15)$$

$$u_0^* \frac{\partial u_0^*}{\partial \bar{x}} + v_0^* \frac{\partial u_0^*}{\partial \bar{y}} = -\frac{\partial p_0^*}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial^2 u_0^*}{\partial \bar{y}^2} \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial p_0^*}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (2.17)$$

Dabei tritt die zweite Ableitung nach x^* in der Impulsgleichung in x^* -Richtung nicht mehr auf, sie ist von höherer Ordnung in ε und wurde deshalb vernachlässigt. Weiterhin reduziert sich die Impulsgleichung in y^* -Richtung auf die Aussage, daß der Druck innerhalb der Grenzschicht unabhängig von \bar{y} ist. Er kann deshalb nur eine Funktion von \bar{x} sein. Eine genauere Betrachtung zeigt, daß er gleich dem durch die äußere reibungsfreie Strömung aufgeprägten Druck p_δ^* ist

$$p^* = p_\delta^*(\bar{x}) . \quad (2.18)$$

Die reibungsfreie Außenströmung erfüllt auf der Stromlinie entlang der Linie $y^* = 0$ die Bernoulli-Gleichung in differentieller Form

$$u_\delta^* \frac{du_\delta^*}{d\bar{x}} = -\frac{dp_\delta^*}{d\bar{x}} , \quad (2.19)$$

die sich auch aus (2.16) bei Vernachlässigung der \bar{y} -Ableitungen ergibt. Das Anpassen der Grenzschicht an die Außenlösung führt im vorliegenden Fall zu der Bedingung, daß in nullter Näherung die Lösung der Außenströmung bei $y^* = 0$ an die Lösung der Grenzschichtgleichungen für $\bar{y} \rightarrow \infty$ angepaßt werden muß. (Wir wollen hier auf die mathematische Herleitung des Anpassungsverfahrens verzichten; vergleiche jedoch W. Schneider, Kap. 21.) Das Ergebnis des Anpassungsprozesses wurde in den Gleichungen (2.18) und (2.19) bereits dadurch berücksichtigt, daß der Index δ , der für den Außenrand der Grenzschicht steht,

eingeführt wurde. Führt man wieder dimensionsbehaftete Koordinaten ein, so ergeben sich aus den Gleichungen (2.15)–(2.19) die klassischen Gleichungen der Grenzschichttheorie

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.20)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp_\delta}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (2.21)$$

die mit den Randbedingungen

$$\begin{aligned} y = 0 : \quad & u = 0 \quad (\text{Haftbedingung}) \\ & v = 0 \\ y \rightarrow \infty : \quad & u = u_\delta(x) \end{aligned} \quad (2.22)$$

zu lösen sind. Die Bernoulli-Gleichung ist in dimensionsbehafteter Form

$$\rho u_\delta \frac{du_\delta}{dx} = -\frac{dp_\delta}{dx} . \quad (2.23)$$

Anmerkung: In gleicher Weise wie für u_0^* , v_0^* , p_0^* kann man für die nächste Ordnung u_1^* , v_1^* , p_1^* ein Gleichungssystem und Randbedingungen dazu herleiten. Dies führt auf eine Grenzschichttheorie höherer Ordnung, auf die wir hier jedoch nicht eingehen wollen. Zeigen Sie, daß die Gleichungen höherer Ordnung linear in u_1^* , v_1^* , p_1^* sind.

Eine entscheidende Vereinfachung des Gleichungssystems (2.15)–(2.18) besteht darin, daß es parabolisch ist, während die Navier-Stokesschen Gleichungen elliptisch waren. Wegen der Vernachlässigung des Terms $\partial^2 u / \partial x^2$ sind Diffusionsvorgänge nur in y -Richtung wirksam. Es gibt keinen stromaufwärts gerichteten Informationsfluß, d. h. die Strömung an irgendeiner Stelle x_1 in der Grenzschicht wird von der Strömung, die sich stromabwärts $x_2 > x_1$ entwickelt, nicht beeinflusst. Für die Berechnung von Grenzschichten bedeutet dies, daß mit einem Fortsetzungsverfahren stromab gerechnet werden kann, während bei den elliptischen Navier-Stokesschen Gleichungen eine simultane Lösung im gesamten Bereich erforderlich ist.

2.2 Exakte Lösungen der Grenzschicht-Gleichungen

Auch die Grenzschicht-Gleichungen sind auf Grund der nichtlinearen konvektiven Terme noch so kompliziert, daß eine allgemeine Lösung nicht angegeben werden kann. Es ist Aufgabe der Grenzschichttheorie, Lösungen des Gleichungssystems für spezielle Fälle zu finden.

Die erste Lösung der Grenzschicht-Gleichungen stammt von Blasius (1908) für die Strömung entlang einer ebenen Platte (Bild 2.2). Die Grenzschicht-Gleichungen lauten hierfür:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 , \quad (2.24)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} . \quad (2.25)$$

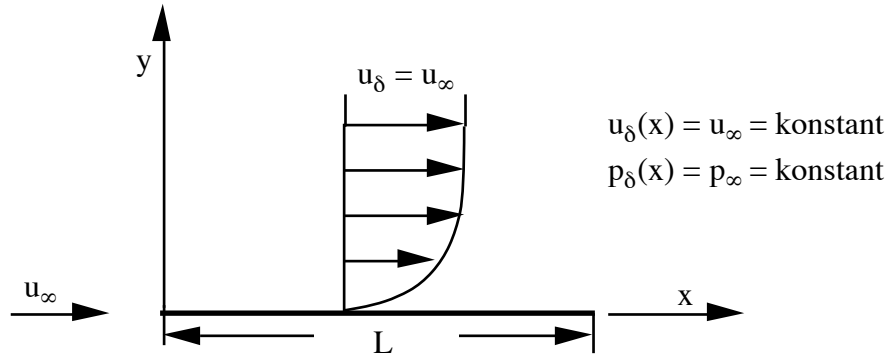


Bild 2.2:
Grenzschichtströmung entlang ebener Platte

Wie können die beiden partiellen Differentialgleichungen gelöst werden? Es existiert eine Koordinatentransformation derart, daß eine Reduktion auf eine gewöhnliche Differentialgleichung möglich ist. Auf Grund des parabolischen Charakters des Gleichungssystems liegt es nahe, eine Ähnlichkeitskoordinate der Form $\eta \sim y/\sqrt{x}$ zu suchen. Wir führen daher als neue unabhängige Variable ein:

$$\eta(x, y) = y \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}} . \quad (2.26)$$

Dabei ist $\sqrt{u_\infty/\nu}$ ein Maßfaktor, um η dimensionslos zu machen. Bevor das Gleichungssystem auf die neue Variable η umgeschrieben wird, führen wir die Stromfunktion $\psi(x, y)$ mit der Definition

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} , \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.27)$$

ein. Dadurch wird die Kontinuitätsgleichung (2.24) identisch erfüllt, und die Bewegungsgleichung geht über in eine partielle Differentialgleichung für die Stromfunktion

$$\psi_y \psi_{yx} - \psi_x \psi_{yy} = \nu \psi_{yyy} . \quad (2.28)$$

Die Stromfunktion ψ muß nun entsprechend transformiert werden. Wir setzen $u/u_\infty = f'(\eta)$, da u nur eine Funktion von η sein soll. Es folgt

$$\psi(x, y) = \int_0^y u \, dy = u_\infty \int_0^y f'(\eta) \, dy = u_\infty \sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}} \int_0^\eta f'(\eta) \, d\eta . \quad (2.29)$$

Der Ausdruck $\int_0^\eta f'(\eta) d\eta \equiv f(\eta)$ wird als dimensionslose Stromfunktion bezeichnet; damit wird

$$\psi(x, y) = \sqrt{u_\infty \nu x} f(\eta) . \quad (2.30)$$

Anstelle von $\psi(x, y)$ wird $f(\eta)$ in die partielle Differentialgleichung (2.28) eingeführt. Dazu bilden wir

$$\begin{aligned} u &= \psi_y = u_\infty f'(\eta) \\ v &= -\psi_x = -[f(\eta) \sqrt{u_\infty \nu x}]_x = -\left[f' \frac{\partial \eta}{\partial x} \sqrt{u_\infty \nu x} + \frac{f}{2} \sqrt{\frac{u_\infty \nu}{x}} \right] \end{aligned} \quad (2.31)$$

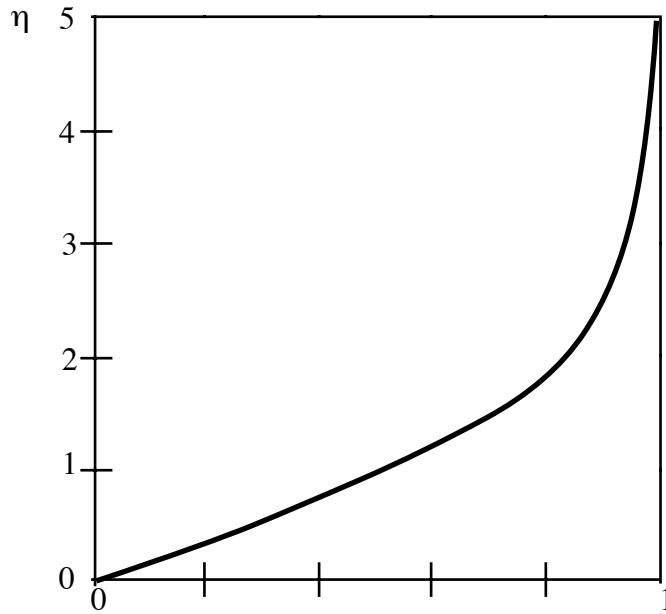


Bild 2.3:

Geschwindigkeitsprofil für die ebene Plattenströmung

mit

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{1}{2} \frac{y}{x \sqrt{\nu x / u_\infty}} = -\frac{1}{2} \frac{\eta}{x}$$

wird

$$v = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{u_\infty \nu}{x}} [\eta f' - f].$$

Analog dazu folgen

$$\begin{aligned} \psi_{yy} &= u_\infty \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}} f'' , & \psi_{yyy} &= u_\infty \frac{u_\infty}{\nu x} f''' , \\ \psi_{yx} &= -\frac{1}{2} u_\infty \sqrt{\frac{u_\infty y}{\nu x}} \frac{f''}{x} = -\frac{1}{2} \frac{u_\infty}{x} \eta f'' . \end{aligned} \quad (2.32)$$

Dies eingesetzt in Gl. (2.28) ergibt nach einer Zusammenfassung eine gewöhnliche, nichtlineare Differentialgleichung 3. Ordnung für die dimensionslose Stromfunktion $f(\eta)$:

$$f''' + \frac{1}{2} f f'' = 0 . \quad (2.33)$$

Die Randbedingungen lauten:

$$\begin{aligned} \eta = 0 : & & f &= 0 , & f' &= 0 \\ \eta \rightarrow \infty : & & f' &= 1 . \end{aligned} \quad (2.34)$$

Die Gl. (2.33) läßt sich nicht analytisch, sondern nur numerisch lösen.

Das Bild 2.3 zeigt das Geschwindigkeitsprofil $u/u_\infty = f'(\eta)$. Man spricht von einer ähnlichen Lösung, da dieses Geschwindigkeitsprofil an jeder Stelle x der Platte vorliegt, wenn man die Skalierung der y -Koordinate mit der Wurzel aus x entsprechend Gl. (2.26) berücksichtigt.

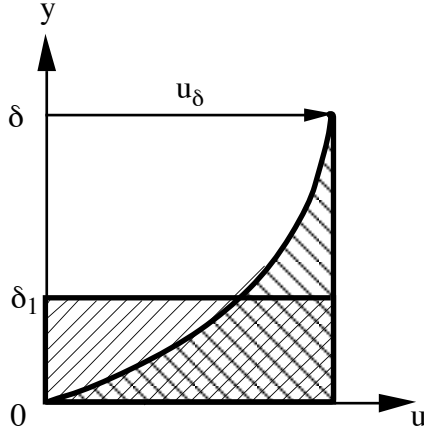


Bild 2.4:
Zur Definition der Verdrängungsdicke

Auf Grund des asymptotischen Übergangs der Geschwindigkeit u in die ungestörte Außengeschwindigkeit u_∞ bedarf es zur Festlegung der Grenzschichtdicke δ einer Definition. Man setzt z. B., wie bereits in Kapitel 1 erwähnt, $\delta = y(u/u_\delta = 0,99)$.

Dies ist für $\eta \approx 5,0$ der Fall, d. h. $\sqrt{u_\infty/\nu x} \delta \approx 5,0$. Somit ist

$$\begin{aligned} \delta(x) &\approx 5,0 \sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}} && \text{bzw.} \\ \frac{\delta(x)}{x} &\approx \frac{5,0}{\sqrt{\text{Re}_x}} && \text{oder} && \frac{\delta(x)}{L} \approx \frac{5,0}{\sqrt{\text{Re}_L}} \sqrt{\frac{x}{L}}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Dies ist mit dem Näherungsergebnis Gl. (1.15) zu vergleichen. Dabei wird die Reynolds-Zahl entweder mit der Lauflänge x oder mit der Bezugslänge L gebildet:

$$\text{Re}_x = \frac{u_\infty x}{\nu}, \quad \text{Re}_L = \frac{u_\infty L}{\nu}. \quad (2.36)$$

Die laminare Grenzschichtdicke an der ebenen Platte wächst proportional zur Wurzel aus der Lauflänge x . Sie ist weiterhin der Wurzel aus der Reynolds-Zahl umgekehrt proportional.

Infolge der Unsicherheit bei der Festlegung der Grenzschichtdicke δ wird gern die Verdrängungsdicke δ_1 als ein physikalisch sinnvolles Maß für die Dicke der Grenzschicht verwendet. Man definiert die Verdrängungsdicke δ_1 durch

$$\delta_1 u_\delta = \int_0^\infty (u_\delta - u) dy, \quad \text{d. h.} \quad \delta_1 = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{u_\delta}\right) dy. \quad (2.37)$$

Die exakte Lösung von Blasius liefert für die Plattenströmung

$$\frac{\delta_1(x)}{x} = \frac{1,7208}{\sqrt{\text{Re}_x}}. \quad (2.38)$$

Bei der Plattenströmung ist $\delta_1 \approx \delta/3$, wie ein Vergleich mit Gl. (2.35) zeigt.

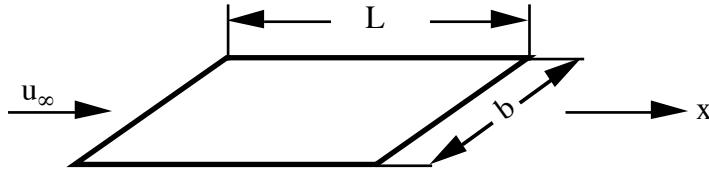


Bild 2.5 :
Zum Reibungswiderstand
der ebenen Platte

Die für die Praxis wichtigsten Größen sind der lokale Reibungswert, definiert durch

$$c_f(x) = 2 \frac{\tau_w(x)}{\rho u_\infty^2} \quad (2.39)$$

sowie der dimensionslose Widerstandsbeiwert, definiert durch

$$c_w = \frac{F_w}{\frac{1}{2} \rho u_\infty^2 A} \quad (2.40)$$

Darin ist F_w der Reibungswiderstand und $A = L \cdot b$ die Plattenoberfläche; hierzu betrachten wir in Bild 2.5 eine einseitig benetzte Platte. Der Widerstand einer Plattenseite (einseitige Benetzung) ist

$$F_w = b \int_0^L \tau_w(x) dx . \quad (2.41)$$

Für die örtliche Wandschubspannung $\tau_w(x)$ gilt

$$\tau_w(x) = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_w = \mu u_\infty \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}} f''(\eta=0) \sim \frac{1}{\sqrt{x}} . \quad (2.42)$$

Darin ist die dimensionslose Wandtangente des Geschwindigkeitsprofils $f''(\eta=0) \equiv \alpha = 0,332$ nach Blasius. Der örtliche Reibungsbeiwert c_f , Gl. (2.39), lautet damit

$$c_f(x) = \frac{0,664}{\sqrt{\text{Re}_x}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}} . \quad (2.43)$$

Bild 2.6 zeigt qualitativ den Verlauf von $c_f(x)$ bzw. $\tau_w(x)$. An der Plattenvorderkante ergibt sich eine für viele Grenzschichtströmungen typische Singularität; die Grenzschichtgleichungen sind dort nicht mehr gültig. Speziell trifft die Ungleichung $|\partial^2 u / \partial x^2| \ll |\partial^2 u / \partial y^2|$ dort nicht mehr zu. Dies wirkt sich glücklicherweise nicht aus, wenn zur Ermittlung des Gesamtwiderstandes über die Plattenlänge integriert wird. Es ist

$$F_w = b \mu u_\infty \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu}} \alpha \int_0^L \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2b\alpha \sqrt{u_\infty^3 \mu \rho L} \sim u_\infty^{3/2} L^{1/2} \quad (2.44)$$

für eine Plattenseite. Der Reibungswiderstand der Platte wächst mit $u_\infty^{3/2}$ und $L^{1/2}$. Letzteres ist so zu verstehen, daß die hinteren Plattenteile weniger zum Gesamtwiderstand

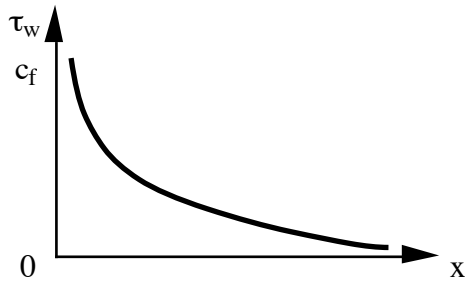


Bild 2.6 :
Qualitativer Verlauf des örtlichen
Reibungsbeiwertes

beitragen, da sie im Bereich der dickeren Reibungsschicht und somit der kleineren Wand-schubspannung liegen. Der Widerstandsbeiwert folgt damit zu

$$c_w = \frac{4\alpha}{\sqrt{\text{Re}_L}} = \frac{1,328}{\sqrt{\text{Re}_L}} . \quad (2.45)$$

Dieses Blasius'sche Plattenwiderstandsgesetz gilt nur im Bereich der laminaren Strömung, d. i. für $\text{Re} < 5 \cdot 10^5 \div 10^6$. Im Bereich der turbulenten Strömung, $\text{Re} > 10^6$, ist der Widerstand erheblich größer.

Bei hinreichend großer Reynolds-Zahl ist die Grenzschichtdicke bezogen auf eine charakteristische Körperabmessung meist von vernachlässigbarer Größenordnung. Darauf beruht die Anwendbarkeit der reibungsfreien Theorie bei vielen Strömungsproblemen. Man kann z. B. bei der Umströmung eines Tragflügelprofils in folgenden Schritten vorgehen:

- 1.) Ermittlung der Druck- und Geschwindigkeitsverteilung um den Körper aus der Potentialtheorie mit Hilfe von Singularitätenverfahren oder konformen Abbildungen. Bei komplizierter Geometrie wird die Druckverteilung in der Regel experimentell ermittelt. Hierbei kommt im Rahmen der Grenzschichttheorie der glückliche Umstand zum Tragen, daß der Druck an der Wand $p_w(x)$ gleich dem Druck $p_\delta(x)$ am Außenrand der Grenzschichtströmung ist. Aus der Druckverteilung läßt sich durch Integration der Gleichung (2.19) die Geschwindigkeitsverteilung $u_\delta(x)$ ermitteln.
- 2.) Berechnung der Grenzschichtströmung durch Lösung der Grenzschicht-Gleichungen. Dabei ist die Geschwindigkeitsverteilung $u_\delta(x)$ der Außenströmung als Randbedingung vorgegeben. Aus der Grenzschichtrechnung folgen mit $\delta(x)$, $\delta_1(x)$, $c_f(x)$, c_w die interessierenden Größen.

Anhand der Grenzschichtströmung entlang der ebenen Platte ist in charakteristischer Weise deutlich geworden, in welcher Art exakte (wenn auch numerische) Lösungen der Grenzschicht-Gleichungen gewonnen werden können.

Neben der Strömung entlang einer ebenen Platte existieren ähnliche Lösungen der Grenzschicht-Gleichungen (2.20), (2.21) auch für die sogenannten Keilströmungen. Hierbei ist die Geschwindigkeit $u_\delta(x)$ der Potentialströmung einer Potenz der vom Staupunkt aus gemessenen Lauflänge proportional:

$$u_\delta(x) = a x^m . \quad (2.46)$$

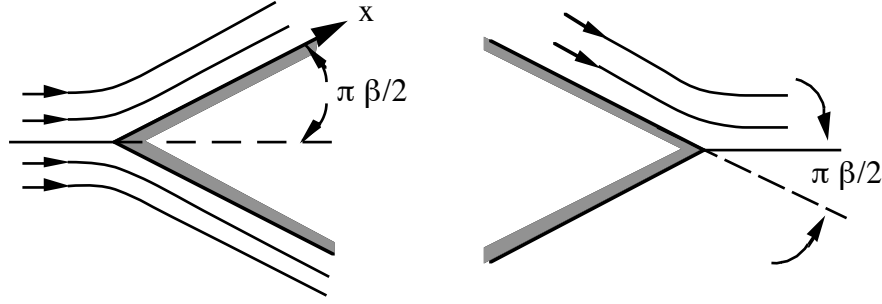


Bild 2.7 :
Zur Illustration der Keilströmungen

Die Bezeichnung Keilströmung rührt daher, daß zwischen dem (beliebigen aber konstanten) Exponenten m und dem Keilwinkel $\pi\beta$ der Zusammenhang $m = \beta/(2 - \beta)$ bzw. $\beta = 2m/(m + 1)$ besteht. Mit der Ähnlichkeitstransformation

$$\eta(x, y) = y\sqrt{\frac{u_\delta}{\nu x}}, \quad f(\eta) = \frac{\psi}{\sqrt{\nu u_\delta x}} \quad (2.47)$$

analog zu Gl. (2.26) ergibt sich auch für Strömungen vom Typ (2.46) eine gewöhnliche Differentialgleichung aus den Grenzschicht-Gleichungen. Diese lautet

$$f''' + \frac{m+1}{2} f f'' + m(1 - f'^2) = 0. \quad (2.48)$$

Sie ist zuerst von Falkner und Skan (1930) angegeben worden und von Hartree (1937) für verschiedene Werte von m bzw. β numerisch gelöst und tabelliert worden. Im Bild 2.8 sind drei dieser "Hartree-Profile" dargestellt. Der Exponent m bzw. β ist dabei ein Parameter der Lösungskurven.

Neben dem Fall der ebenen Platte mit $m = 0, \beta = 0$ ist der Spezialfall $m = 1, \beta = 1$ von praktischer Bedeutung. Es handelt sich dabei um die ebene Staupunktströmung (Bild 2.9). Der Keilwinkel ist $\pi/2 = 90^\circ$.

Auf der Symmetrieebene ist die Geschwindigkeit Null, sie wächst linear mit x . In der reibungsfreien Außenströmung gilt auf Grund der Kontinuitätsgleichung

$$u_\delta = ax, \quad v_\delta = -ay. \quad (2.49)$$

Die Anströmgeschwindigkeit v_∞ fällt daher linear bis zum Staupunkt bei $y = 0, x = 0$ ab.

Eine Schwierigkeit im Verständnis der Staupunktgrenzschicht besteht darin, daß auf der Symmetrieachse die Tangentialgeschwindigkeit $u(x = 0, y)$ Null ist, während der Quotient

$$f' = \frac{u}{u_\delta} = \frac{u}{ax} \quad (2.50)$$

endlich bleibt. Endlich ist dagegen die Normalgeschwindigkeit v , die mit der Definition, Gl. (2.27), und Gl. (2.47) sowie

$$\eta = y\sqrt{\frac{a}{\nu}} \quad (2.51)$$

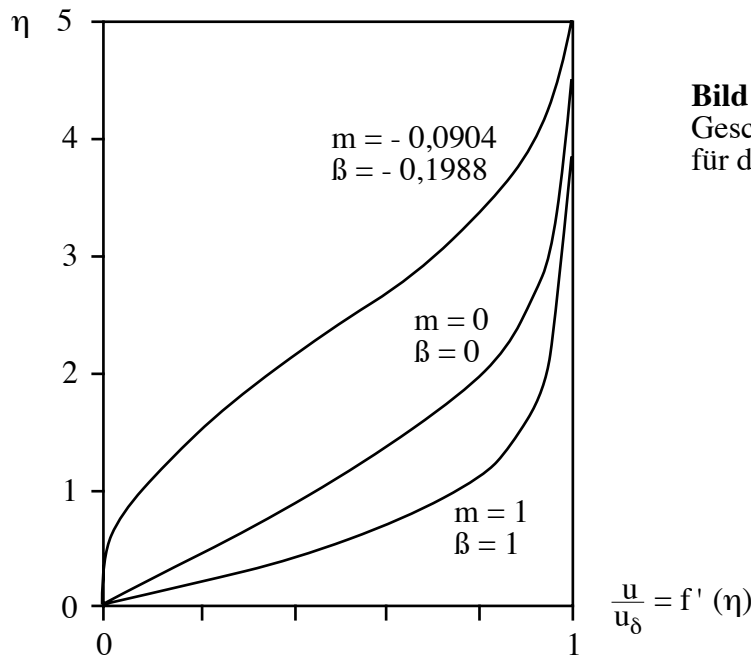


Bild 2.8 :
Geschwindigkeitsprofile
für die Keilströmungen

zu

$$v = -\frac{\partial\psi}{\partial x} = -f(\eta)\sqrt{\nu a} \quad (2.52)$$

wird. Insofern entsteht der eigenartige Sonderfall, daß auf der Symmetrielinie und in unmittelbarer Nähe davon die Tangentialgeschwindigkeit kleiner als die Normalgeschwindigkeit ist. Für größere Entfernungen von der Symmetrielinie wird bei hinreichend kleiner Zähigkeit die Normalgeschwindigkeit jedoch wieder kleiner als die Tangentialgeschwindigkeit, da letztere nach Gl. (2.50) mit x anwächst. (In diesem Zusammenhang ist es auch interessant zu bemerken, daß die Staupunktströmung eine exakte Lösung der Navier-Stokesschen Gleichungen ist, vergl. Schlichting, Kap. V, bei denen die Voraussetzung $v \ll u$ nicht notwendig ist.) Die Grenzschichtdicke ist wegen Gl. (2.50) konstant. Da $f'(2,4) = 0,99$, ergibt sich mit Gl. (2.51)

$$\delta = 2,4\sqrt{\frac{\nu}{a}}. \quad (2.53)$$

Hier ist a der in Gl. (2.49) eingeführte Geschwindigkeitsgradient der reibungsfreien Außenströmung.

Weiter ist in Bild 2.8 das Ablöseprofil dargestellt. Das ist jenes Profil mit der Wandtangente $f'' = 0$; hierfür ist $\beta = -0,1988$ bzw. $m = -0,0904$. Dieses Profil spielt bei der Beurteilung der Strömungsablösung eine besondere Rolle.

Anhand Bild 2.8 wird deutlich, daß

- bei beschleunigter Strömung ($\beta > 0$, $m > 0$) die Geschwindigkeitsprofile völliger sind als das Blasius-Profil der Plattenströmung. Die zweite Ableitung $\partial^2(u/u_\delta)/\partial\eta^2$ ist stets negativ.

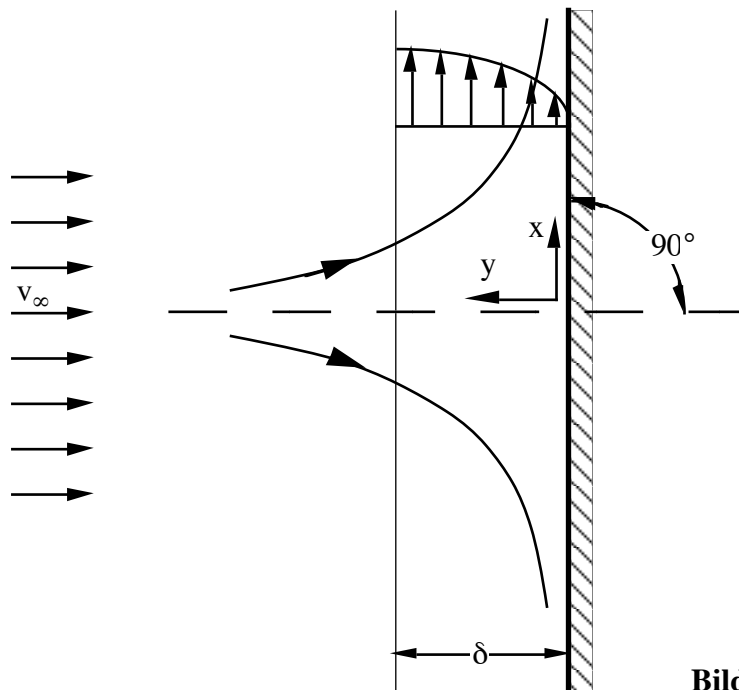


Bild 2.9 :
Die ebene Staupunktgrenzschicht

- bei verzögerter Strömung ($\beta < 0$, $m < 0$) die Geschwindigkeitsprofile weniger völlig sind als das Blasius-Profil. Die Krümmung f''' ist in Wandnähe positiv, sie wechselt im Feld das Vorzeichen und wird zum Außenrand hin wieder negativ.

Das Blasius-Profil ($\beta = 0$, $m = 0$) besitzt als Grenze zwischen beiden Fällen an der Wand die Krümmung $f''' = 0$.

Die Grenzschicht-Gleichungen können nur für bestimmte Typen von Außenströmungen $u_\delta(x)$ exakt gelöst werden, die numerische Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung wird hierbei als exakt bezeichnet. Der wichtigste Fall sind die besprochenen Keilströmungen vom Typ $u_\delta \sim x^m$ mit $m = \text{konstant}$. Man spricht allgemein von ähnlichen Lösungen, da das normierte Geschwindigkeitsprofil unabhängig von der Lauflänge x für einen beliebigen aber festen Wert von m an jeder Stelle das gleiche ist. Die Form des Profils, dargestellt durch den "Formparameter" m bzw. β , ändert sich mit der Lauflänge nicht, es ändert sich lediglich die Grenzschichtdicke $\delta(x)$ und damit natürlich auch der Reibungsbeiwert $c_f(x)$.

Es gibt einige wenige andere ähnliche Lösungen, die jedoch von geringerer Bedeutung sind; hierzu sei auf die Literatur verwiesen.

Bei beliebiger Außenströmung $u_\delta(x)$ ändert sich auch die Form des Geschwindigkeitsprofils, die Geschwindigkeitsprofile sind nicht mehr ähnlich. Die Grenzschicht-Gleichungen (2.20) und (2.21) müssen dann numerisch entweder mit Differenzenverfahren oder mit Näherungsverfahren, z. B. mit Integralmethoden gelöst werden. Im folgenden Abschnitt wird der Grundtyp der Integralmethoden behandelt.

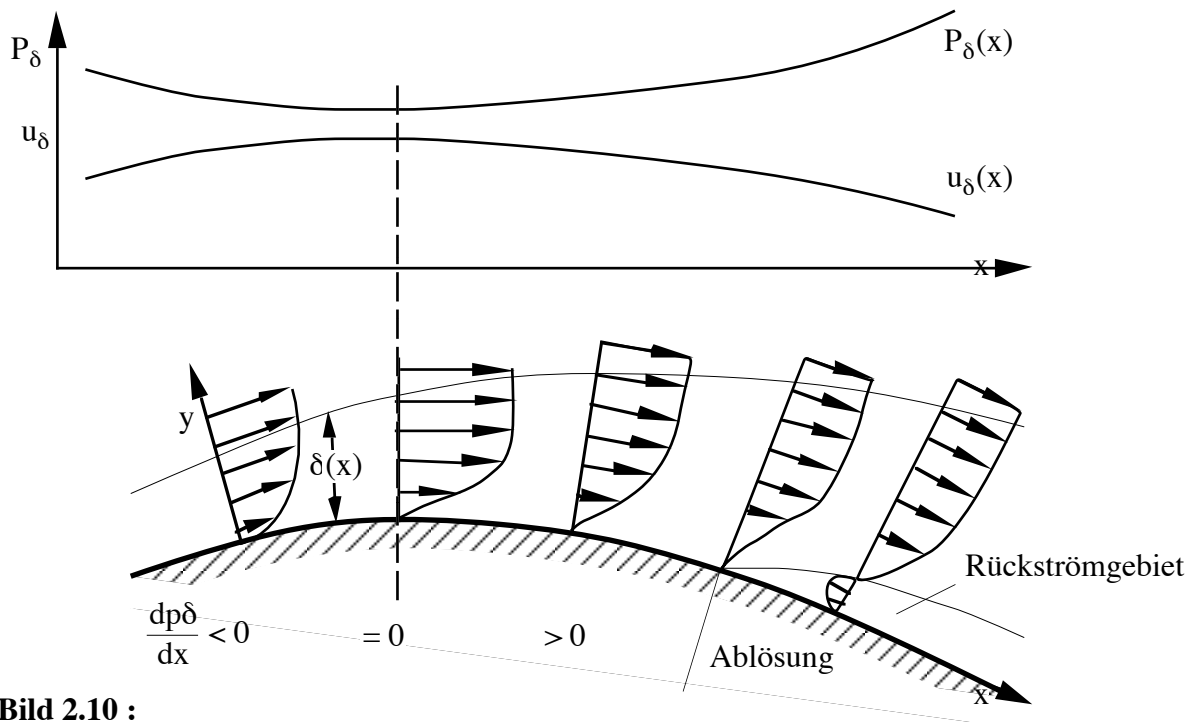


Bild 2.10 :
Zur Erläuterung der Wandbindungsgleichung

2.3 Das Integralverfahren nach von Kármán und Pohlhausen

Die Aufgabenstellung lautet, bei vorgegebener Außenströmung $u_\delta(x)$ bzw. $p_\delta(x)$ die Grenzschichtdicke und die Form des Geschwindigkeitsprofils als Funktion der Lauflänge zu ermitteln. Damit ist auch der Verlauf der Wandschubspannung und durch Integration auch der Reibungswiderstand bekannt.

Aus der Grenzschicht-Gleichung (2.21), angeschrieben an der Wand ($u = v = 0$), folgt zunächst als sehr wichtige Beziehung die sogenannte Wandbindungsgleichung

$$\mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_w = \frac{dp_\delta(x)}{dx} . \quad (2.54)$$

Sie verknüpft die Krümmung des Geschwindigkeitsprofils an der Wand mit dem aufgeprägten Druckgradienten. Bei bekanntem Druckgradienten der Außenströmung kann damit das Geschwindigkeitsprofil qualitativ "richtig" gezeichnet werden.

Bild 2.10 zeigt qualitativ den Druck- und Geschwindigkeitsverlauf entlang einer gekrümmten Kontur, diese kann z. B. der Ausschnitt aus einem Tragflügelprofil sein. Es ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_w < 0 & \quad \text{für} \quad \frac{dp_\delta}{dx} < 0 & \quad (\text{beschleunigte Strömung}) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_w = 0 & \quad \text{für} \quad \frac{dp_\delta}{dx} = 0 & \quad (\text{Plattenströmung}) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_w > 0 & \quad \text{für} \quad \frac{dp_\delta}{dx} > 0 & \quad (\text{verzögerte Strömung}) \end{aligned}$$

Aufgrund der Diskussion im Anschluß an Bild 2.8 folgt, daß nur bei verzögerter Außenströmung eine Ablösung der Grenzschichtströmung möglich ist. In verzögerter Außenströmung muß die Grenzschichtströmung gegen einen Druckanstieg anlaufen, der zur hemmenden Wirkung der Wandreibung hinzukommt. Die kinetische Energie der Grenzschichtströmung reicht schließlich nicht mehr aus, diese Widerstände zu überwinden. Das Geschwindigkeitsprofil wird immer energieärmer, bis es zur Strömungsablösung kommt. Jenseits davon tritt im Ablösegebiet Rückströmung auf.

Die Wandbindungsgleichung (2.54) dient nicht nur zur qualitativen Deutung der Geschwindigkeitsprofile, sie ist darüberhinaus eine zentrale Beziehung des klassischen Integralverfahrens, das wir ausführlich besprechen wollen.

Von Pohlhausen (1921) stammt der Vorschlag, das unbekannte Geschwindigkeitsprofil durch ein Polynom

$$\frac{u(x, y)}{u_\delta(x)} = \sum_i a_i(x) \zeta^i \quad (2.55)$$

anzunähern. Darin sind die Koeffizienten $a_i(x)$ zunächst unbekannt und $\zeta = y/\delta(x)$ ist eine dimensionlose Querkoordinate. Dieser Polynomansatz soll gewisse physikalisch sinnvolle Randbedingungen erfüllen:

$$\begin{aligned} \zeta = 0 : \quad & \frac{u}{u_\delta} = 0 \\ \zeta = 1 : \quad & \frac{u}{u_\delta} = 1, \quad \frac{d(u/u_\delta)}{d\zeta} = 0, \quad \frac{d^2(u/u_\delta)}{d\zeta^2} = 0. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Neben diesen vier geometrischen Randbedingungen wird als fünfte dynamische Randbedingung verlangt, daß die Wandbindungsgleichung (2.54) erfüllt wird. Der Grad des Polynomansatzes (2.55) wird so gewählt, daß ein freier Koeffizient als Formparameter verbleibt. Dieser ist dann die zweite Unbekannte neben der Grenzschichtdicke $\delta(x)$.

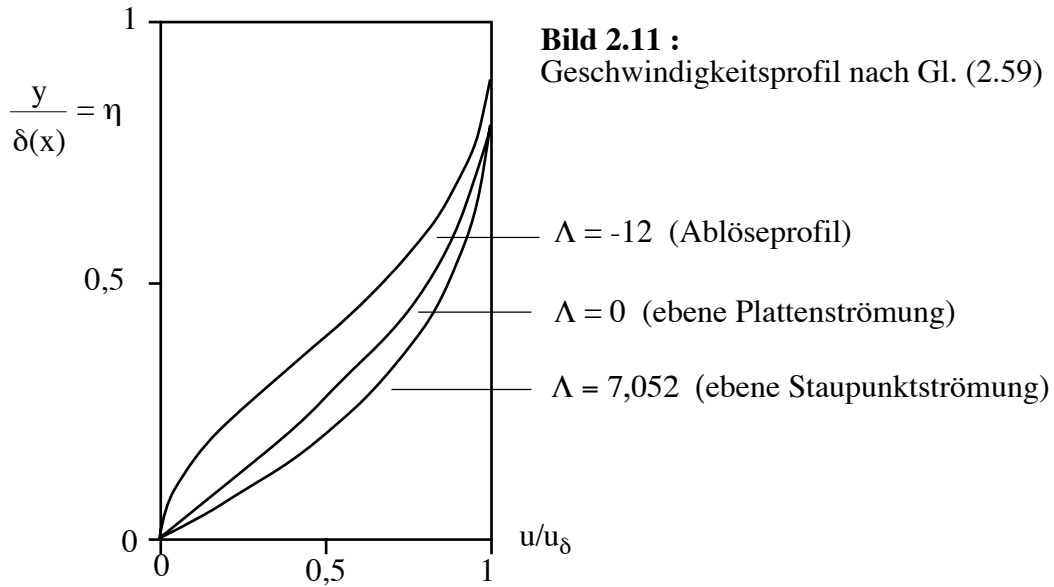
Auf Grund der Anzahl der geometrischen Randbedingungen nahm Pohlhausen ein Polynom 4. Grades ("P4-Profil") an:

$$\frac{u(x, y)}{u_\delta(x)} = \begin{cases} a\zeta + b\zeta^2 + c\zeta^3 + d\zeta^4 & \text{für } \zeta \leq 1 \\ 1 & \text{für } \zeta \geq 1 \end{cases} \quad (2.57)$$

Mit diesen Randbedingungen liegen drei Bestimmungsgleichungen für die Koeffizienten a , b , c , d vor. Diese lauten:

$$\begin{aligned} \left(\frac{u}{u_\delta} \right)_{\zeta=1} &= 1 = a + b + c + d \\ \left(\frac{du/u_\delta}{d\zeta} \right)_{\zeta=1} &= 0 = a + 2b + 3c + 4d \\ \left(\frac{d^2u/u_\delta}{d\zeta^2} \right)_{\zeta=1} &= 0 = 2b + 6c + 12d \end{aligned} \quad (2.58)$$

Die Randbedingung für $\zeta = 0$ ist durch den Ansatz (2.57) schon erfüllt. Damit bleibt ein Koeffizient des Polynomansatzes als Parameter frei. Die Wandbindungsgleichung (2.54)



liefert einen Zusammenhang zwischen der Grenzschichtdicke δ und dem noch freien Parameter. Mit Gl. (2.19) lautet Gl. (2.54)

$$\left(\frac{\partial^2(u/u_\delta)}{\partial \zeta^2} \right)_{\zeta=0} = -\frac{du_\delta}{dx} \frac{\delta^2}{\nu} \equiv -\Lambda . \quad (2.59)$$

Man nennt Λ den Pohlhausen-Parameter. Er stellt die dimensionslose, negative Krümmung des Geschwindigkeitsprofils an der Wand dar. Mit dem Geschwindigkeitsansatz (2.57) folgt dafür $-\Lambda = 2b$. Damit sowie mit Gl. (2.58) lassen sich die 4 Koeffizienten a, b, c, d durch den Pohlhausen-Parameter Λ ausdrücken. Es ist

$$a = 2 + \frac{1}{6}\Lambda, \quad b = -\frac{1}{2}\Lambda, \quad c = -2 + \frac{1}{2}\Lambda, \quad d = 1 - \frac{1}{6}\Lambda \quad (2.60)$$

und der Geschwindigkeitsansatz (2.55) lautet für $\zeta \leq 1$:

$$\frac{u}{u_\delta} = 2\zeta - 2\zeta^3 + \zeta^4 + \frac{1}{6}\Lambda(\zeta - 3\zeta^2 + 3\zeta^3 - \zeta^4) . \quad (2.61)$$

Bild 2.11 zeigt das Geschwindigkeitsprofil für charakteristische Λ -Werte, deren Bedeutung weiter unten deutlich wird.

Man nennt Λ den Formparameter und δ den Dickenparameter. Der Formparameter Λ soll noch ein wenig diskutiert werden. Für $\Lambda = 0$ ist $du_\delta/dx = 0$, das ist die Strömung entlang einer ebenen Platte. Für $\Lambda < 0$ ist $du_\delta/dx < 0$, $dp_\delta/dx > 0$, die Strömung wird verzögert, der Druck steigt an. Für $\Lambda > 0$ ist $du_\delta/dx > 0$, $dp_\delta/dx < 0$, die Strömung wird beschleunigt, der Druck fällt ab. Dies entspricht natürlich der Diskussion anhand Bild 2.10.

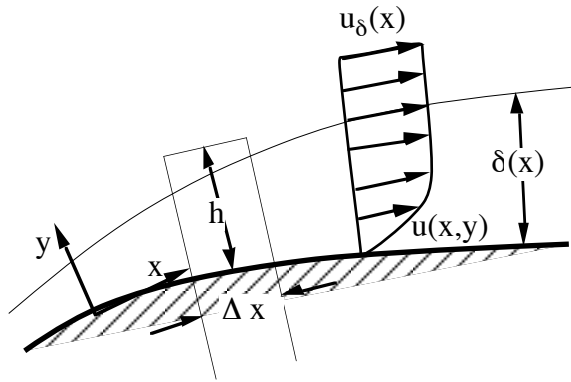


Bild 2.12 :
Zur Herleitung der Integralbedingung
für den Impuls

Für den Zusammenhang $\tau_w(\Lambda, \delta)$ gilt

$$\tau_w = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_w = \mu \left(\frac{\partial(u/u_\delta)}{\partial \zeta} \right)_w \frac{u_\delta}{\delta} = \frac{\mu u_\delta}{\delta} \left(2 + \frac{1}{6} \Lambda \right) \sim \frac{1}{\delta}. \quad (2.62)$$

Zum Ablöseprofil gehört der Formparameter $\Lambda = -12$. Bei Ablösung gilt somit

$$-\frac{1}{\nu} \frac{du_\delta}{dx} = \frac{1}{\mu u_\delta} \frac{dp_\delta}{dx} = \frac{12}{\delta^2}. \quad (2.63)$$

Was folgt aus Gl. (2.63)?

- 1.) Ablösung ist nur möglich bei Druckanstieg. Dies hatten wir schon anhand von Bild 2.10 festgestellt.
- 2.) Eine dünne Grenzschicht verträgt einen größeren Druckanstieg als eine dicke Grenzschicht. Bei großer Lauflänge und somit dicker Grenzschicht führt schon ein kleiner Druckanstieg zur Ablösung.

Die weitere Aufgabe besteht darin, den Verlauf des Formparameters $\Lambda(x)$ entlang einer gegebenen Kontur zu bestimmen. Bei bekanntem Formparameter $\Lambda(x)$ ist mit Gl. (2.59) die Grenzschichtdicke $\delta(x)$ und mit Gl. (2.62) der Verlauf der Wandschubspannung $\tau_w(x)$ bekannt.

Gesucht wird eine Bestimmungsgleichung für $\delta(x)$ oder $\Lambda(x)$. Dies muß eine gewöhnliche Differentialgleichung sein. Die Grenzschicht-Gleichung (2.21), die bisher nur an der Wand verwendet wurde (daraus folgt der Zusammenhang zwischen δ und Λ), ist jedoch eine partielle Differentialgleichung. Die gesuchte gewöhnliche Differentialgleichung ist der Impulssatz der Grenzschicht nach von Kármán (1921). Dieser entsteht nach partieller Integration der Grenzschicht-Gleichung (2.21) über y , d. h. quer zur Strömungsrichtung. Dadurch wird aus der partiellen Differentialgleichung (2.21) eine gewöhnliche Differentialgleichung in x , die auch als Integralbedingung für den Impuls bezeichnet wird. Zur Herleitung wird neben der Grenzschicht-Gleichung (2.21) die Kontinuitätsgleichung (2.20) benötigt. Die Herleitung wird kurz skizziert (Bild 2.12), aus Gl. (2.20) folgt:

$$v(x, y) = - \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy. \quad (2.64)$$

Eingesetzt in Gl. (2.21) ergibt sich:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} - \left(\int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy \right) \frac{\partial u}{\partial y} - u_\delta \frac{du_\delta}{dx} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (2.65)$$

Partielle Integration über y von 0 bis h , wobei $h > \delta(x)$ gewählt wird, liefert mit $\tau(y = h) = 0$

$$\int_0^h \left[u \frac{\partial u}{\partial x} - \left(\int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy \right) \frac{\partial u}{\partial y} - u_\delta \frac{du_\delta}{dx} \right] dy = -\frac{\tau_w}{\rho}. \quad (2.66)$$

Nach der Methode der partiellen Integration

$$\int_a^b p'(x)q(x) dx = [p(x)q(x)]_a^b - \int_a^b p(x)q'(x) dx$$

läßt sich das zweite Glied der linken Seite umformen

$$\begin{aligned} \int_0^h \underbrace{\left(\int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy \right)}_q \underbrace{\frac{\partial u}{\partial y}}_{p'} dy &= \left(u \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy \right)_0^h - \int_0^h u \frac{\partial u}{\partial x} dy \\ &= u_\delta \int_0^h \frac{\partial u}{\partial x} dy - \int_0^h u \frac{\partial u}{\partial x} dy. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Eingesetzt folgt

$$\int_0^h \left(2u \frac{\partial u}{\partial x} - u_\delta \frac{\partial u}{\partial x} - u_\delta \frac{du_\delta}{dx} \right) dy = -\frac{\tau_w}{\rho}. \quad (2.68)$$

Mit

$$2u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u^2}{\partial x}; \quad -u_\delta \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial(uu_\delta)}{\partial x} + u \frac{du_\delta}{dx}$$

folgt weiter

$$\begin{aligned} \underbrace{\int_0^h \frac{\partial}{\partial x} (u(u_\delta - u)) dy + \frac{du_\delta}{dx} \int_0^h (u_\delta - u) dy}_{=} &= \frac{\tau_w}{\rho}, \\ &= \frac{d}{dx} \int_0^h u(u_\delta - u) dy \end{aligned} \quad (2.69)$$

da h von x unabhängig ist. Es werden folgende Abkürzungen eingeführt:

$$\delta_1 = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{u_\delta}\right) dy = \text{Verdrängungsdicke, siehe schon Gl. (2.37)}, \quad (2.70)$$

$$\delta_2 = \int_0^\delta \frac{u}{u_\delta} \left(1 - \frac{u}{u_\delta}\right) dy = \text{Impulsverlustdicke}. \quad (2.71)$$

Da außerhalb der Grenzschicht, d. h. für $y > \delta$, $(1 - u/u_\delta)$ verschwindet, können die oberen Grenzen auch bis $y = h$ oder $y \rightarrow \infty$ verschoben werden. Es folgt der Impulssatz der Grenzschicht nach von Kármán

$$\frac{d}{dx} (u_\delta^2 \delta_2) + \delta_1 u_\delta \frac{du_\delta}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho}. \quad (2.72)$$

Die drei Terme in Gl. (2.72) bedeuten

- die Änderung der Trägheitskraft in Strömungsrichtung,
- die Änderung der Druckkraft in Strömungsrichtung und
- die Wandschubspannung.

Häufig wird der Impulssatz der Grenzschicht in ausdifferenzierter Form angegeben. Es ist dann ($' = d/dx$)

$$\delta_2' + \delta_2 \frac{u_\delta'}{u_\delta} \left(2 + \frac{\delta_1}{\delta_2}\right) = \frac{\tau_w}{\rho u_\delta^2}. \quad (2.73)$$

Damit sind die beiden Integralgrößen δ_1 und δ_2 sowie die Wandschubspannung τ_w unbekannt. Es ist mit Gl. (2.62) $\tau_w = \tau_w(\Lambda, \delta)$. Ebenso folgen $\delta_1 = \delta_1(\Lambda, \delta)$ und $\delta_2 = \delta_2(\Lambda, \delta)$, denn auf Grund der Definitionen (2.70) und (2.71) sowie mit dem Geschwindigkeitsansatz (2.61) wird

$$\delta_1 = \delta \int_0^1 \left(1 - \frac{u}{u_\delta}\right) d\zeta = \delta \left(\frac{3}{10} - \frac{\Lambda}{120}\right), \quad (2.74)$$

$$\delta_2 = \delta \int_0^1 \frac{u}{u_\delta} \left(1 - \frac{u}{u_\delta}\right) d\zeta = \delta \left(\frac{37}{315} - \frac{\Lambda}{945} - \frac{\Lambda^2}{9072}\right). \quad (2.75)$$

Damit stehen zur Ermittlung der beiden Unbekannten $\Lambda(x)$ und $\delta(x)$ zwei Gleichungen zur Verfügung, die aus der Wandbindungsgleichung folgende Beziehung (2.59) und der Impulssatz der Grenzschicht (2.73). Sie seien noch einmal im Zusammenhang angegeben:

$$\Lambda = \frac{u_\delta' \delta^2}{\nu}, \quad (2.76)$$

$$\delta_2' + \delta_2 \frac{u_\delta'}{u_\delta} \left(2 + \frac{\delta_1}{\delta_2}\right) = \frac{\tau_w}{\rho u_\delta^2}. \quad (2.77)$$

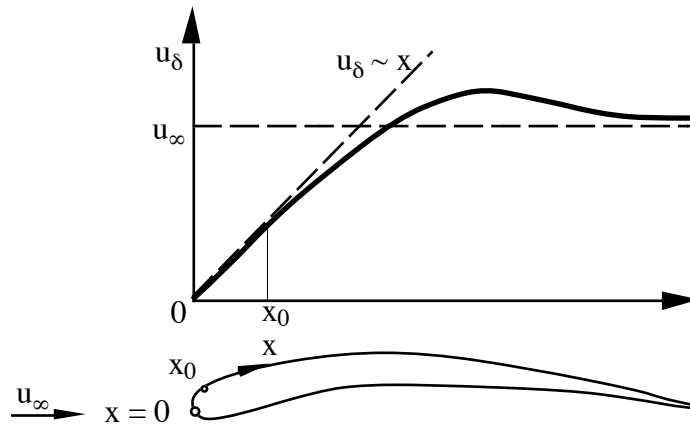


Bild 2.13 :
Zur Grenzschichtrechnung auf der Oberseite
eines Tragflügelprofils

Im allgemeinen müssen beide Gleichungen numerisch integriert werden. Dies kann mit Standard-Verfahren wie dem Runge-Kutta-Verfahren geschehen. Dabei müssen die Anfangswerte $\delta(x_0)$ und $\Lambda(x_0)$ an einer Stelle $x = x_0$ gegeben sein. In Bild 2.13 ist dies für das Beispiel der Grenzschichtrechnung um ein Tragflügelprofil skizziert.

Für den Staupunkt kann von der exakten Lösung der Grenzschicht-Gleichungen ausgegangen werden. Es ist $u_\delta = ax$ im Bereich des Staupunktes nach Gl. (2.49), d. h. es ist $m = 1$ in Gl. (2.46). Hierzu gehört der Pohlhausen-Parameter $\Lambda = 7,052$, für den das Geschwindigkeitsprofil in Bild 2.11 mit eingezeichnet wurde. Integralverfahren liefern Fehler in der Größenordnung von 10% oder kleiner. Der Fehler ist nicht darin begründet, daß etwa die Integralbedingung für den Impuls ungenau wäre. Er liegt einzig und allein in dem nicht exakten Ansatz für das Geschwindigkeitsprofil. Das Integralverfahren nach Pohlhausen und von Kármán hat sich als außerordentlich schlagkräftig und erfolgreich erwiesen. Es ist bei meist befriedigender Genauigkeit vergleichsweise einfach in der Anwendung.

3. Turbulente Strömungsgrenzschichten

Schlägt man gängige Lehrbücher auf, so wird man feststellen, daß den laminaren Strömungen in der Regel ein breiterer Raum gewidmet ist als den turbulenten Strömungen. Zur Erklärung für diesen offenkundigen Widerspruch können folgende Gründe genannt werden:

- Laminare Strömungen sind einfacher zu behandeln und zu verstehen. Das Gleichungssystem ist bekannt, und es kann für nahezu alle auftretenden Probleme zumindest numerisch gelöst werden.
- Bei der Vorausberechnung turbulenter Strömungen wird der Bereich "gesicherter Gleichungen" verlassen, wir begeben uns auf das Gebiet rein empirischer oder halbempirischer Ansätze; hinzu kommen Erfahrung und Intuition.
- Es steht außer Frage, daß man in der Lehre zunächst die laminaren Strömungen behandelt, da an ihnen sehr viel einfacher grundlegende Eigenschaften erläutert werden können. Für die turbulenten Strömungen bleibt oft kaum Zeit.
- Häufig hört man folgenden Vorwurf: Was soll die Beschäftigung mit der statistischen Turbulenztheorie oder komplizierten und ungesicherten Schließungsannahmen, wenn

man für praktische Zwecke weitgehend rein empirische Beziehungen verwendet? Dieser Vorwurf ist richtig (weil er leider oft zutrifft) und falsch zugleich. Er ist falsch, weil nur eine gute Kenntnis turbulenter Vorgänge den Benutzer vor einer falschen Anwendung einer (oft ungesicherten!) empirischen Beziehung schützt und weil wir uns mit diesem unbefriedigenden Zustand nicht abfinden sollen.

Es ist eines der Anliegen dieser Vorlesung, die turbulenten Grenzschichten nicht als Anhängsel zu betrachten, sondern ihnen den gebührenden Raum zu geben.

3.1 Einführung in die Theorie turbulenter Strömungen

Im Jahre 1883 hat Osborne Reynolds mit seinem berühmten Farbfadenversuch gezeigt, daß die laminare Rohrströmung oberhalb einer kritischen Grenze in eine turbulente Rohrströmung umschlägt. Diese kritische Grenze wird durch die nach ihm benannte Reynolds-Zahl

$$\text{Re} = \frac{u_m D}{\nu}, \quad D = \text{Rohrdurchmesser}, \quad u_m = \text{mittlere Durchflußgeschwindigkeit}$$

bezeichnet. Er ermittelte aus Experimenten den Umschlag bei $\text{Re}_{\text{krit}} \approx 2300$. Schon Reynolds äußerte die Vermutung, daß es sich bei der Turbulenz um ein Stabilitätsproblem handelt. Das bedeutet, daß die Lösungen der Navier-Stokesschen Gleichungen nur unterhalb der kritischen Grenze Re_{krit} vom Experiment bestätigt werden. Für $\text{Re} > \text{Re}_{\text{krit}}$ wird die laminare Strömung instabil und schlägt in die turbulente Strömung um.

Für die Entstehung der Turbulenz sind zwei Fragen von zentraler Bedeutung:

- Wie entsteht die Turbulenz aus einer anfänglich laminaren Strömung? Dies ist das angesprochene Stabilitätsproblem, der laminar-turbulente Übergang, den wir im folgenden Abschnitt diskutieren werden.
- Wie entsteht die Turbulenz in einer bereits turbulenten Strömung? Warum bleibt eine turbulente Strömung turbulent? Hierbei wird die Frage der Produktion von Turbulenz angesprochen. Die Behandlung dieses Problems ist das Kernstück bei der Vorausberechnung vollturbulenter Strömungen. Wir werden darauf intensiv eingehen.

Turbulente Strömungen sind stets instationär, dreidimensional, wirbelbehaftet und rein zufällig (stochastisch). Aus dem Experiment wissen wir, daß der Übergang von der laminaren zur turbulenten Strömungsform verbunden ist

- mit einer Zunahme des Druckverlustes bzw. des Reibungswiderstandes und
- mit einer Zunahme der Grenzschichtdicke.

Ursache dafür ist die turbulente Diffusion. Durch intensive makroskopische Schwankungsbewegungen wird das turbulente Geschwindigkeitsprofil dicker als im laminaren Fall.

Sämtliche Variablen in einer turbulenten Strömung sind vom Ort x, y, z und der Zeit t abhängig. In diesem Kapitel beschränken wir uns wie in Kapitel 2 auf inkompressible Einkomponentenfluide, die Unbekannten sind dann $u, v, w, p = f(x, y, z, t)$. Wir stellen uns nun vor, mit einem sehr empfindlichen Meßgerät (Hitzdraht-Anemometer, Laser-Doppler-Anemometer) sei z. B. die Geschwindigkeitskomponente u in einer vollturbulenten Strömung an einem festen Punkt als Funktion der Zeit gemessen (Bild 3.1).

Wir unterscheiden hierbei zwei Fälle:

- die Strömung ist im Mittel stationär (statistisch stationär),

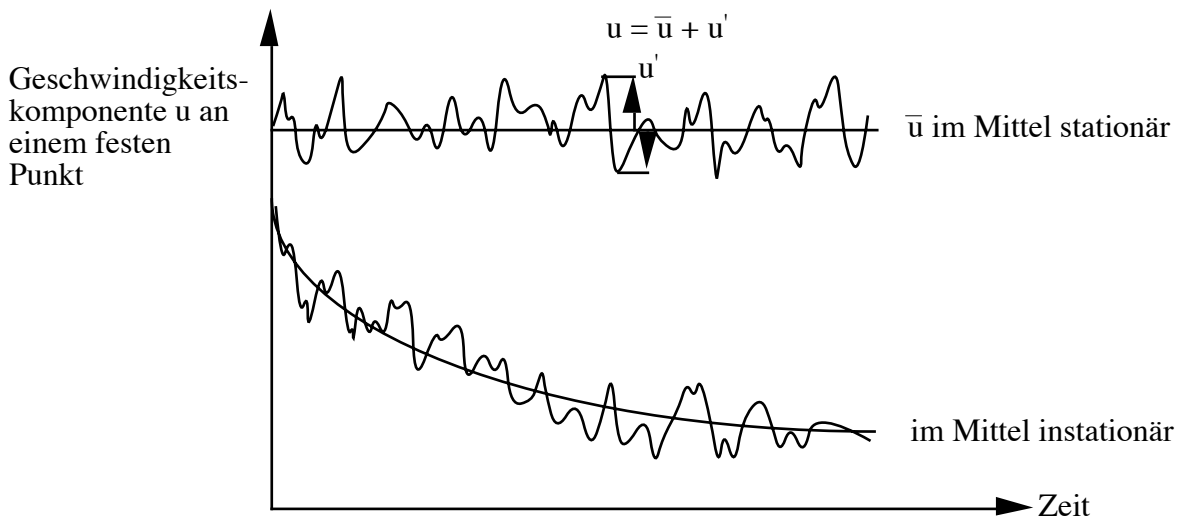


Bild 3.1: Geschwindigkeitsschrieb (der Komponente u) an einem festen Punkt

- die Strömung ist im Mittel instationär (statistisch instationär).

Nach Reynolds ist für im Mittel stationäre Strömungen die folgende Aufspaltung üblich:

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z, t) &= \bar{u}(x, y, z) + u'(x, y, z, t) \\
 \text{Momentanwert} &= \text{zeitlicher Mittelwert} + \text{Schwankungswert}
 \end{aligned}
 \tag{3.2}$$

Dabei ist der zeitliche Mittelwert definiert durch

$$\bar{u}(x, y, z) = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} u(x, y, z, t) dt .
 \tag{3.3}$$

Hierbei muß das Zeitintervall Δt , über das integriert wird, hinreichend groß sein. Bei im Mittel instationären turbulenten Strömungen muß eine andere Mittelwertbildung vorgenommen werden. So bildet man dort einen Ensemble-Mittelwert, das ist eine Mittelung über eine große Zahl von gleichen Experimenten, die alle unter gleichen Anfangs- und Randbedingungen durchgeführt werden. In dieser Vorlesung wollen wir uns nur mit dem praktisch wichtigen Fall der im Mittel stationären Strömungen befassen.

Aufgrund der Definition (3.3) ist der zeitliche Mittelwert einer Schwankungsgröße stets Null, d. h.

$$\overline{u'} = 0, \quad \overline{v'} = 0, \quad \overline{w'} = 0, \quad \overline{p'} = 0 .
 \tag{3.4}$$

Von Null verschieden sind jedoch Mittelwerte der Quadrate von Schwankungsgrößen oder auch (i. allg.) der Produkte verschiedener Schwankungsgrößen. Man bezeichnet die Größe

$$\sqrt{\overline{v'_j v'_j}} = \sqrt{\overline{v'^2_j}} = \sqrt{\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}}
 \tag{3.5}_1$$

als Intensität oder r.m.s.-Wert und

$$\bar{k} = \frac{1}{2} \overline{v_j'^2} = \frac{1}{2} (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}) \quad (3.5)_2$$

als kinetische Energie der Turbulenz oder kurz Turbulenzenergie. Die Abkürzung r.m.s. bedeutet *root-mean square* (quadratischer Mittelwert). Weiter nennt man die relative Intensität

$$Tu = \frac{\sqrt{\frac{1}{3} \overline{v_j'^2}}}{|\overline{v_j}|} \quad (3.6)$$

den Turbulenzgrad. Vereinfachend setzt man oft $Tu = \sqrt{\overline{u'^2}}/\bar{u}$, wobei \bar{u} die gemittelte Komponente in Strömungsrichtung darstellt.

Als grober Anhaltspunkt kann gelten: Der Turbulenzgrad ist etwa 1% hinter einem Turbulenzgitter, etwa 10% in der Nähe einer festen Wand und $> 10\%$ in einem turbulenten Freistrahle oder Nachlauf.

Folgende Einteilung turbulenter Strömungsformen ist üblich:

- Isotrope Turbulenz: Alle statistischen Eigenschaften sind symmetrisch ($\overline{u'^2} = \overline{v'^2} = \overline{w'^2}$), invariant bei Rotation und Spiegelung des Koordinatensystems an beliebigen Flächen. Bei dieser einfachsten Turbulenzform liegt eine ideale Unordnung vor; es ist naheliegend, daß hierfür die meisten Ergebnisse aus der statistischen Turbulenztheorie existieren. Die turbulente Strömung hinter einem Turbulenzgitter ist nahezu isotrop.
- Homogene Turbulenz: Alle statistischen Eigenschaften hängen nicht vom Ort ab, sie sind translationsinvariant.
- Anisotrope oder Scherturbulenz: Für die praktische Anwendung ist nur dieser Normalfall einer turbulenten Strömung von Interesse. Er liegt bei allen Grenzschicht-, Freistrahle-, Nachlauf-, Rohrströmungen usw. vor. Unglücklicherweise ist dieser für die Anwendung wichtigste Fall mit Abstand am schwierigsten theoretisch zu behandeln. Man ist weitgehend auf halbempirische Ansätze angewiesen.

Es ist in dieser Klassifizierung schon angeklungen, daß auf zwei Wegen die Erfassung und Behandlung turbulenter Strömungen versucht wird:

- Statistische Turbulenztheorie: Diese wurde im wesentlichen durch Arbeiten von Sir G.I. Taylor in den Jahren 1935 bis 1938 begründet. Ihr Ziel ist die Untersuchung der turbulenten Nebenbewegung in allen statistisch erfaßbaren Eigenschaften, um daraus die zeitlichen Mittelwerte der Strömung angeben zu können.
- Halbempirische Turbulenztheorien: Mit Hilfe hypothetischer Ansätze, z. B. für die scheinbare turbulente Schubspannung in Abhängigkeit von der zeitlich gemittelten Geschwindigkeit, wird jene direkt bestimmt. Als Ausgangspunkt dieser "Schließungsannahmen" ist der Mischungswegansatz von L. Prandtl aus dem Jahre 1925 anzusehen. Ziel dieser Überlegungen ist es, möglichst allgemeingültige Ansätze zu formulieren.

Die statistische Turbulenztheorie hat große Erfolge bei der Behandlung isotroper und teilweise auch homogener Turbulenz aufzuweisen, sie ist jedoch bisher wenig erfolgreich bei der Behandlung der Scherturbulenz. Wir werden uns in Abschnitt 3.5 mit einigen zentralen Begriffen aus diesem Gebiet kurz beschäftigen, weil dadurch das Verstehen turbulenter Vorgänge wesentlich gefördert wird.

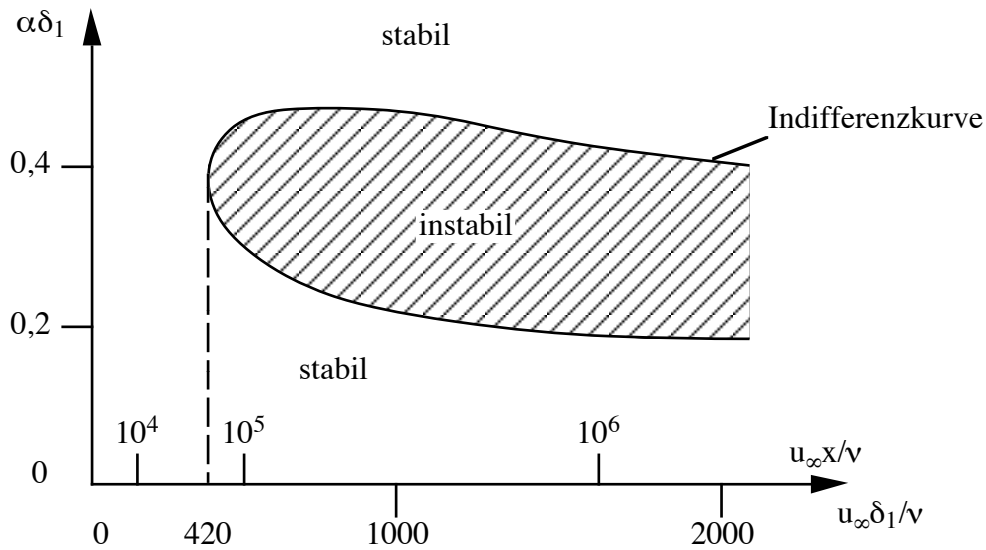


Bild 3.2: Stabilitätskarte nach Tollmien für die ebene Plattengrenzschicht

Die halbempirischen Theorien stellen nach dem derzeitigen Wissensstand die einzig brauchbare Möglichkeit dar, für Ingenieurzwecke turbulente Strömungen einschließlich des Wärme- und Stoffaustausches zu berechnen. Wir werden darauf ausführlicher eingehen.

3.2 Hydrodynamische Stabilität und laminar-turbulenter Umschlag

Vor etwa 100 Jahren sprach Reynolds die Vermutung aus, daß es sich bei der Turbulenz um ein Stabilitätsproblem handelt. Es dauerte bis zum Jahr 1929, in dem Tollmien die erste erfolgreich durchgeführte Stabilitätsrechnung vorlegte. Er untersuchte die ebene Plattenströmung, also die Stabilität des Blasius-Profiles (Abschnitt 2.2). Dabei führte er eine zweidimensionale Strömungsrechnung durch. Wir wollen das Vorgehen kurz skizzieren.

Der stationären Grundlösung v_j, p wird eine instationäre Störung v'_j, p' überlagert. Die gestörte Strömung $v_j + v'_j, p + p'$ befriedigt wieder die Kontinuitäts-Gleichung, die Navier-Stokessche Gleichung sowie die Randbedingungen. Die Störung wird als klein angenommen; die Störungsdifferentialgleichung, die Orr-Sommerfeld-Gleichung, kann dann linearisiert werden. Wachsen die Störungen mit der Zeit an, so ist die Grundlösung instabil. Klingen dagegen die aufgebrachtten Störungen mit der Zeit ab, so ist die Grundlösung stabil. Physikalisch bedeutet dies, daß die dämpfende Wirkung der Viskosität groß genug (oder zu gering) ist, um das Anwachsen der Störungen (nicht) zu verhindern. Bild 3.2 zeigt in einer Stabilitätskarte das Ergebnis der Rechnungen von Tollmien.

Dabei bedeuten $\delta_1 =$ Verdrängungsdicke, $\alpha = 2\pi/\lambda =$ Wellenzahl und $\lambda =$ Wellenlänge der Störung. Ein merkwürdiges Resultat der Rechnung ist, daß nur ein schmaler Bereich von Störungswellenlängen für die Laminarströmung gefährlich ist. Wellen zu langer oder zu kurzer Wellenlänge werden gedämpft. In der Praxis ist jedoch immer ein

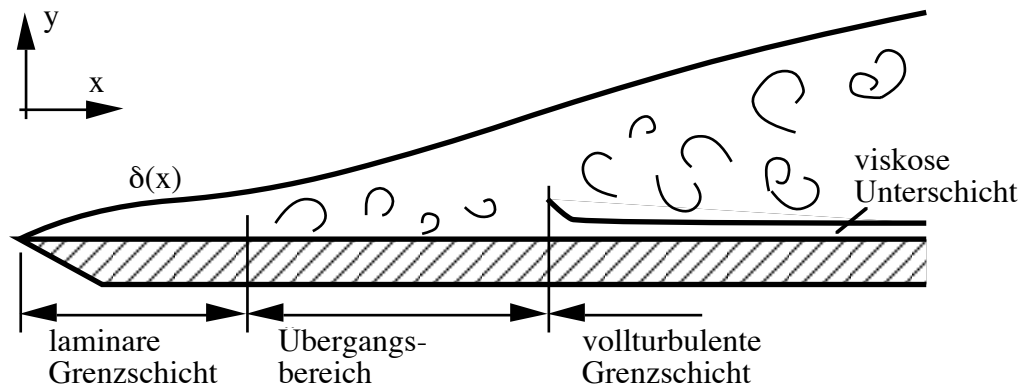


Bild 3.3: Zum laminar-turbulenten Umschlag

Spektrum von Störungswellenlängen (Geräusche, Vibrationen) vorhanden. Unterhalb einer bestimmten Grenze, Indifferenzpunkt genannt, ist die Strömung immer laminar. Die Rechnungen von Tollmien ergaben:

$$\begin{aligned} (\text{Re}_{\delta_1})_{\text{indiff.}} &\approx 420 && \text{bzw. wegen} && \delta_1 \sim \sqrt{x} \\ (\text{Re}_x)_{\text{indiff.}} &\approx 6 \cdot 10^4. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Im Experiment wird der laminar-turbulente Umschlag der ebenen Plattenströmung zu $\text{Re}_x \approx 3 \div 5 \cdot 10^5$ ermittelt. Dieser Unterschied liegt darin, daß man zwischen der möglichen Anfachung (dem Indifferenzpunkt) und dem tatsächlichen Umschlag unterscheiden muß. Man spricht von einem Übergangsbereich, vgl. hierzu Bild 3.3 weiter unten. Bei besonders störungsfreien Bedingungen kann eine Laminarströmung bis zu Reynolds-Zahlen von etwa 10^6 aufrecht erhalten werden. Derartige metastabile Zustände sind auch aus anderen Bereichen der Physik bekannt. So kann man besonders keimfreies Wasser unter 0°C abkühlen, ohne daß es gefriert. Die geringste Störung (Keim) läßt es jedoch plötzlich erstarren.

Die Rechnungen von Tollmien wurden von Schlichting in den Jahren 1932 bis 1935 auf Grenzschichtströmungen mit Druckgradient erweitert. Dabei legte Schlichting die ähnlichen Lösungen von Hartree (Abschnitt 2.2) zugrunde. Als Fazit ergab sich, daß beschleunigte Strömungen stabiler sind als verzögerte Strömungen. Dies hängt damit zusammen, daß die Geschwindigkeitsprofile in beschleunigten Strömungen völliger sind als in verzögerten Strömungen, siehe hierzu Bild 2.8.

Squire hat 1933 gezeigt, daß die Beschränkung auf ebene Störungen zulässig ist, da in einer ebenen inkompressiblen Strömung dreidimensionale Störungen erst bei höheren Reynolds-Zahlen zur Instabilität führen.

Die theoretischen Ergebnisse von Tollmien konnten erst 1943 von Schubauer und Skramstad experimentell bestätigt werden. Durch ein dünnes Metallband wurden dabei in der Plattengrenzschicht (elektromagnetisch angeregte) Schwingungen unterschiedlicher Wellenzahlen erzeugt. Deren Auswirkungen wurden mit dem Hitzdraht gemessen.

Auch in einer vollturbulenten Strömung werden in unmittelbarer Nähe fester Berandungen die turbulenten Schwankungsbewegungen durch die Wirkung der Viskosität gedämpft. Dieser Bereich wird laminare oder besser viskose Unterschicht genannt, in dieser Schicht überwiegt die Wirkung der molekularen Viskosität gegenüber der scheinbaren turbulenten Viskosität. Bild 3.3 soll dies verdeutlichen.

Die bisher diskutierte zweidimensionale Instabilität wird als Tollmien-Schlichting-Instabilität bezeichnet. Im Gegensatz dazu wird bei Grenzschichtströmungen an gekrümmten Wänden die dreidimensionale Taylor-Görtler-Instabilität wirksam. Diese Bezeichnung geht auf Untersuchungen von Taylor im Jahre 1923 und von Görtler im Jahre 1940 zurück. Taylorwirbel stellen sich in einem Ringspalt zwischen zwei konzentrischen, mit unterschiedlicher Winkelgeschwindigkeit rotierenden Zylindern ein, sobald eine kritische Grenze überschritten wird. Damit verwandt sind die Görtlerwirbel, die in einer laminaren Grenzschicht entlang einer konkav gekrümmten Wand auftreten können.

3.3 Die Reynoldsschen Gleichungen

Zu Beginn wollen wir kurz die Frage diskutieren, ob in turbulenten Strömungen möglicherweise die Voraussetzungen der Kontinuumstheorie verletzt sind. Man kann sich die Turbulenz als eine Überlagerung von Wirbeln ("eddies") unterschiedlicher Größe und Frequenz vorstellen. In realen viskosen Fluiden gibt es aufgrund der Dissipation eine untere Wirbelgröße. Zu dieser statistisch unteren Grenze für die Wirbelgröße gehört ein minimaler Längenmaßstab und korrespondierend dazu eine maximale Frequenz der Schwankungen.

Experimente zeigen, daß der kleinste Längenmaßstab bzw. die untere Wirbelgröße in der Größenordnung von 0,1 bis 1 mm liegen. Demgegenüber ist die mittlere freie Weglänge zwischen Molekülen in Luft mit ca. 10^{-4} mm bei Normalbedingungen um Größenordnungen kleiner. Die turbulenten Schwankungsgeschwindigkeiten liegen bei etwa 10% der mittleren Geschwindigkeit, sagen wir, um Werte zu nennen, bei etwa 1 bis 10 m/s. Die mittlere Geschwindigkeit der Moleküle liegt mit ca. 500 m/s für Luft bei Normalbedingungen um Größenordnungen darüber. Die turbulenten Frequenzen variieren zwischen etwa 1 und 10000 s^{-1} , während die Frequenzen der Molekülzusammenstöße für Luft bei etwa $5 \cdot 10^9\text{ s}^{-1}$ liegen. Der Größenbereich der Turbulenz liegt also genügend weit oberhalb molekularer Größenordnungen. Damit ist deutlich, daß die Bilanzgleichungen der Kontinuumstheorie auch die Basis für die Beschreibung turbulenter Austauschvorgänge darstellen.

Freilich müssen diese Bilanzgleichungen aufgrund des dreidimensionalen und instationären Charakters turbulenter Bewegungen für eben diesen Fall angeschrieben werden. Wir betrachten in diesem Kapitel ausschließlich inkompressible Einkomponentenfluide und vernachlässigen die Volumenkräfte. Also liegt folgendes Gleichungssystem vor:

$$\frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0 \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial v_j}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_k^2} \quad (j = 1, 2, 3) \quad (3.9)$$

Diese beiden Gleichungen unterscheiden sich durch den instationären Term $\partial v_j / \partial t$ und dadurch, daß j bis 3 gezählt wird von dem Gleichungssystem (2.1)–(2.3). Dabei wird über doppelt auftretende Indizes summiert. Die Gleichungen gelten für laminare und turbulente Strömungen gleichermaßen. Es liegen vier Gleichungen für die vier Unbekannten $v_1, v_2, v_3, p = f(x_1, x_2, x_3, t)$ vor. Diese Bilanzgleichungen für die Momentanwerte sind prinzipiell lösbar. Bei einer numerischen Lösung müßte jedoch das Gitternetz extrem feinmaschig angelegt sein, damit auch die kleinsten turbulenten Schwankungen erfaßt werden. Es ist jedoch einleuchtend, daß eine numerische Lösung des Gleichungssystems für die zeitabhängigen Momentanwerte bestenfalls von akademischem Interesse sein

kann und keinerlei Bedeutung für die Ingenieurpraxis hat. Von Ausnahmefällen abgesehen (z. B. Strömungsakustik, Auswirkungen von Druckschwankungen auf Bauteile) interessiert sich der Ingenieur in der Regel nur für die zeitlichen Mittelwerte turbulenter Strömungen, da aus ihnen die für die Praxis wichtigen Fragen nach dem Druckverlust bzw. dem Reibungswiderstand beantwortet werden können.

Die Bilanzgleichungen für die zeitlichen Mittelwerte werden als Reynoldssche Gleichungen bezeichnet. Wir gewinnen sie aus den Bilanzgleichungen für die Momentanwerte, indem wir die Momentanwerte dem Vorschlag von Reynolds folgend gemäß Gl. (3.2) in Mittel- und Schwankungswerte zerlegen und anschließend zeitlich mitteln. Wir setzen also in die Gln. (3.8) und (3.9) ein:

$$\begin{aligned} v_k(x_k, t) &= \bar{v}_k(x_k) + v'_k(x_k, t) , \\ p(x_k, t) &= \bar{p}(x_k) + p'(x_k, t) . \end{aligned} \quad (3.10)$$

Es folgt aus Gl. (3.8)

$$\frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{v}_k + v'_k) = \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial x_k} + \frac{\partial v'_k}{\partial x_k} = 0 .$$

Nach zeitlicher Mittelung verbleibt

$$\frac{\partial \bar{v}_k}{\partial x_k} = 0 . \quad (3.11)$$

Die Kontinuitätsgleichung (3.8) gilt somit in gleicher Weise für die Momentanwerte wie für die zeitlichen Mittelwerte. Damit gilt sie auch für die Schwankungswerte

$$\frac{\partial v'_k}{\partial x_k} = 0 . \quad (3.12)$$

Dies ist grundsätzlich anders als bei den Navier-Stokesschen Gleichungen; hier sind aufgrund der nichtlinearen konvektiven Terme turbulente Zusatzglieder zu erwarten. Der konvektive Term in Gl. (3.9) lautet mit Gl. (3.8)

$$v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} (v_k v_j) = \frac{\partial}{\partial x_k} [(\bar{v}_k + v'_k)(\bar{v}_j + v'_j)] = \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{v}_k \bar{v}_j + \bar{v}_k v'_j + v'_k \bar{v}_j + v'_k v'_j) .$$

Nach zeitlicher Mittelung verbleibt

$$\overline{v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_k}} = \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{v}_k \bar{v}_j) + \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{v'_k v'_j}) . \quad (3.13)$$

Somit liefern die nichtlinearen Terme der Bilanzgleichungen turbulente Zusatzglieder. Damit geht Gl. (3.9) nach zeitlicher Mittelung über in

$$\frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{v}_k \bar{v}_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial^2 \bar{v}_j}{\partial x_k^2} - \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{v'_k v'_j}) .$$

Hierbei haben wir eine im Mittel stationäre Strömung angenommen. Das von dem konvektiven Term herrührende Zusatzglied wird üblicherweise auf die rechte Seite der Gleichung

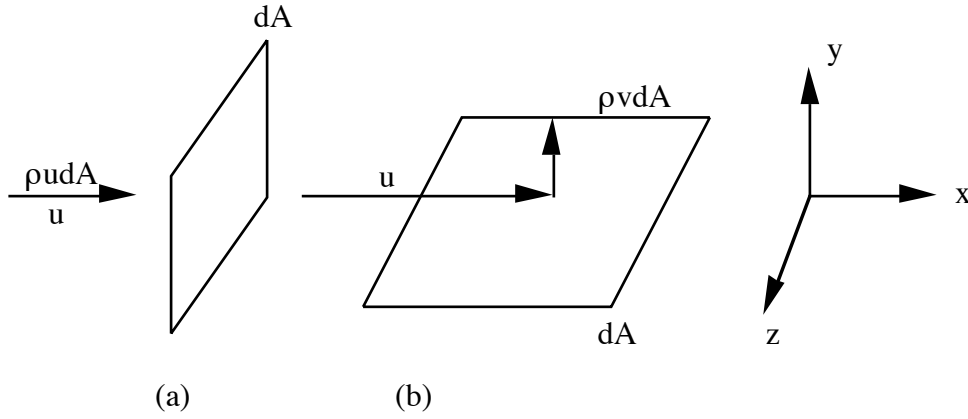


Bild 3.4:
Zur Deutung der Reynoldsschen Normal- (a) und Tangentialspannungen (b)

geschrieben, mit dessen Deutung befassen wir uns weiter unten. Obige Beziehung schreiben wir bei Beachtung von Gl. (3.11) in der Form

$$\bar{v}_k \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\nu \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_k} - \overline{v'_k v'_j} \right). \quad (3.14)$$

Das ist die Bewegungsgleichung für den zeitlichen Mittelwert der Geschwindigkeit. Man nennt

$$(\tau_{jk})_{\text{tur}} = -\overline{\rho v'_k v'_j} \quad (3.15)$$

den turbulenten oder scheinbaren oder Reynoldsschen Spannungstensor. Zur Unterscheidung dazu ist

$$(\tau_{jk})_{\text{mol}} = \mu \left(\frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial x_j} \right) \quad (3.16)$$

der molekulare Spannungstensor. Man beachte, daß bei der Differentiation $\partial/\partial x_k$ wegen Gl. (3.11) der zweite Summand entfällt. Wir schreiben den Reynoldsschen Spannungstensor in der Matrixform aus:

$$(\tau_{jk})_{\text{tur}} = -\rho \begin{bmatrix} \overline{v_1'^2} & \overline{v_1' v_2'} & \overline{v_1' v_3'} \\ \overline{v_2' v_1'} & \overline{v_2'^2} & \overline{v_2' v_3'} \\ \overline{v_3' v_1'} & \overline{v_3' v_2'} & \overline{v_3'^2} \end{bmatrix}. \quad (3.17)$$

Die Elemente der Hauptdiagonalen ($j = k$) stellen turbulente Normalspannungen dar, die Elemente $j \neq k$ lassen sich als turbulente Tangentialspannungen deuten (Bild 3.4).

Legen wir ein Flächenelement dA in die y,z -Ebene (Bild 3.4 (a)), so tritt durch dA der Massenstrom $\rho u dA$ und damit der Impulsstrom $\rho u^2 dA$. Davon bilden wir den zeitlichen Mittelwert

$$\overline{\rho u^2} dA = \overline{\rho (\bar{u} + u')^2} dA = \rho (\bar{u}^2 + \overline{u'^2}) dA. \quad (3.18)$$

Der erste Anteil ist ein Impulsstrom aus der zeitlich gemittelten Bewegung und der zweite Anteil ein Impulsstrom aus der Schwankungsbewegung. Bezogen auf die Fläche dA läßt dieser sich als scheinbare Normalspannung $\rho\overline{u'^2}$ deuten.

Durch die in der x,z -Ebene (Bild 3.4 (b)) liegende Fläche dA tritt der Massenstrom $\rho v dA$. Die x -Komponente der Geschwindigkeit ist u , so daß der durch dA transportierte x -Impulsstrom $\rho u v dA$ ist. Nach zeitlicher Mittelung folgt

$$\rho\overline{uv}dA = \rho\overline{(\bar{u} + u')(\bar{v} + v')}dA = \rho(\overline{u\bar{v}} + \overline{u'v'})dA. \quad (3.19)$$

Lassen wir die Strömungsrichtung mit der x -Achse zusammenfallen ($\bar{v} = 0$), so verbleibt mit $\rho\overline{u'v'}dA$ nur der Impulsstrom aus den Schwankungsbewegungen. Bezogen auf die Fläche dA ist dies eine Reynoldssche Tangentialspannung $\rho\overline{u'v'}$.

Es ist wichtig zu vermerken, daß die zusätzlichen Reynoldsschen Spannungen nur in Bezug auf die zeitlich gemittelte Bewegung registriert werden. Die Bewegungsgleichung (3.9) für die Momentanwerte enthält selbstverständlich keinen turbulenten Zusatzterm.

Mit dem Vorzeichen des Reynoldsschen Spannungstensors werden wir uns in Abschnitt 3.9 beschäftigen. Wir werden dort sehen, daß der Reynoldssche Spannungstensor positiv ist. Von den 9 Komponenten sind wegen $\overline{u'v'} = \overline{v'u'}$ usw. nur 6 Komponenten voneinander unabhängig. In zweidimensionalen Grenzschichtströmungen verbleibt von diesen 6 Komponenten nur $\overline{u'v'}$, siehe Abschnitt 3.6.

In diesem Abschnitt ist das Turbulenzproblem deutlich geworden. Es besteht darin, den Reynoldsschen Spannungstensor mit Hilfe geeigneter Turbulenzmodelle zu verknüpfen. Dies ist bislang nur auf der Basis halbempirischer Ansätze möglich, derartige Schließungsannahmen werden uns ausführlich beschäftigen (Abschnitte 3.9 und 3.10).

Wir haben bisher die Frage unterdrückt, warum die Reynoldsschen Tangentialspannungen von Null verschieden sind. Einleuchtend ist, daß die Reynoldsschen Normalspannungen $\overline{u'^2}, \overline{v'^2}, \overline{w'^2} \neq 0$ sind, da durch die Quadrierung des Signals die negativen Äste "nach oben" geklappt werden (Bild 3.1). Aber warum ist eigentlich $\overline{u'v'} \neq 0$? Tatsächlich verschwinden bei isotroper Turbulenz die Reynoldsschen Tangentialspannungen, sämtliche Schwankungskomponenten sind statistisch gesehen gleich und somit unabhängig voneinander. Bei der anisotropen Scherturbulenz besteht jedoch ein mehr oder weniger starker (räumlicher und zeitlicher) Zusammenhang zwischen den verschiedenen Schwankungsgrößen. Man spricht von Korrelationen, dieser Begriff spielt für das Verständnis der Turbulenz eine sehr wichtige Rolle.

Zuvor wenden wir uns dem Problem zu, für den unbekanntten Reynoldsschen Spannungstensor eine Bilanzgleichung zu formulieren. Derartige Bilanzgleichungen, die Transportgleichungen genannt werden, bilden die Grundlage für neuere Schließungsannahmen (Abschnitt 3.10).

3.4 Transportgleichungen

Subtrahiert man Gl. (3.14) von Gl. (3.9), so ergibt sich die Gleichung für v'_j

$$\left(\frac{\partial v'_j}{\partial t} + \bar{v}_k \frac{\partial v'_j}{\partial x_k} + v'_k \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_k} + v'_k \frac{\partial v'_j}{\partial x_k} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\nu \frac{\partial v'_j}{\partial x_k} + \overline{v'_j v'_k} \right). \quad (3.20)$$

Multipliziert man diese Gleichung mit v'_i und die entsprechende Gleichung für v'_i mit v'_j und addiert, so ergibt sich

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v'_j v'_i}{\partial t} + \bar{v}_k \frac{\partial v'_j v'_i}{\partial x_k} + v'_k v'_i \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_k} + v'_k v'_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} (v'_k v'_j v'_i) \\ &= -\frac{1}{\rho} \left(v'_i \frac{\partial p'}{\partial x_j} + v'_j \frac{\partial p'}{\partial x_i} \right) + \nu \left(v'_i \frac{\partial^2 v'_j}{\partial x_k^2} + v'_j \frac{\partial^2 v'_i}{\partial x_k^2} \right) + v'_i \frac{\partial \overline{v'_j v'_k}}{\partial x_k} + v'_j \frac{\partial \overline{v'_i v'_k}}{\partial x_k}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Dies ist eine Bilanzgleichung für den Reynoldsschen Spannungstensor $\overline{v'_i v'_j}$. Die viskosen Terme auf der rechten Seite lassen sich umformen

$$\begin{aligned} v'_i \frac{\partial^2 v'_j}{\partial x_k^2} + v'_j \frac{\partial^2 v'_i}{\partial x_k^2} &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left(v'_i \frac{\partial v'_j}{\partial x_k} \right) - 2 \frac{\partial v'_i}{\partial x_k} \frac{\partial v'_j}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(v'_j \frac{\partial v'_i}{\partial x_k} \right) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} (v'_i v'_j) - 2 \frac{\partial v'_i}{\partial x_k} \frac{\partial v'_j}{\partial x_k}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Die Aufspaltung der Druckterme ergibt

$$\begin{aligned} v'_i \frac{\partial p'}{\partial x_j} + v'_j \frac{\partial p'}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_j} (v'_i p') - p' \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} (v'_j p') - p' \frac{\partial v'_j}{\partial x_i} \\ &= -p' \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v'_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} [p' (\delta_{kj} v'_i + \delta_{ki} v'_j)]. \end{aligned}$$

Mit diesen Beziehungen lautet die Bilanzgleichung für $\overline{v'_i v'_j}$ nach der Zeitmittelung

$$\begin{aligned} & \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} (\overline{v'_i v'_j})}_{\text{L}} + \underbrace{\bar{v}_k \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{v'_i v'_j})}_{\text{K}} = \underbrace{-\overline{v'_i v'_k} \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_k} - \overline{v'_j v'_k} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k}}_{\text{P}} - \underbrace{2\nu \frac{\partial \overline{v'_i}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{v'_j}}{\partial x_k}}_{\text{DS}} \\ & + \underbrace{\frac{p'}{\rho} \left(\frac{\partial \overline{v'_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{v'_j}}{\partial x_i} \right)}_{\text{DSK}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} \left(-\overline{v'_i v'_j v'_k} + \nu \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{v'_i v'_j}) - \frac{p'}{\rho} (\delta_{kj} v'_i + \delta_{ki} v'_j) \right)}_{\text{DF}} \end{aligned} \quad (3.23)$$

Die einzelnen Terme können dabei folgendermaßen gedeutet werden:

L = lokale Änderung (= 0 für statistisch stationäre Strömungen)

K = konvektive Änderung

P = Produktion, gebildet als Produkt aus dem Reynoldsschen Spannungstensor

- und dem Gradienten der zeitlich gemittelten Geschwindigkeit
- DS = Dissipation (dieser Term enthält neben Anteilen der Dissipation noch weitere Anteile, die eigentliche turbulente Dissipation werden wir in der Transportgleichung für die Turbulenzenergie kennenlernen)
- DSK = Druck-Scher-Korrelation, diese trägt ähnlich wie die Diffusion zur Umverteilung bei
- DF = Diffusion, darin werden die Terme erfaßt, die sich unter ein Divergenzzeichen schreiben lassen

Der Produktionsterm spielt eine entscheidende Rolle. Er ist für das Erzeugen der Turbulenz verantwortlich. Offenbar kann nur in Strömungen mit Gradienten der zeitlich gemittelten Geschwindigkeit, also in Scherströmungen, die Turbulenz aufrecht erhalten werden. Der Geschwindigkeitsgradient ist der Motor der Turbulenz. Die dafür erforderliche Energie wird der Hauptbewegung entzogen. Wir werden im nächsten Abschnitt unter dem Stichwort Energiekaskade in anschaulicher Weise darauf zurückkommen.

Einen wichtigen Sonderfall der Transportgleichung (3.23) gewinnt man formal durch Kontraktion, d. h. man setzt $i = j$. Aus $\overline{v'_i v'_j}$ folgt für $i = j$ der Ausdruck $\overline{v'_i v'_j} = \overline{v'^2}$, den wir in Gl. (3.5) als Turbulenzenergie kennengelernt haben:

$$\bar{k} = \frac{1}{2} \overline{v'^2} = \frac{1}{2} (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}) , \quad k = \frac{1}{2} v'^2 . \quad (3.24)$$

Für $i = j$ geht Gl. (3.23) in eine Transportgleichung für die Turbulenzenergie \bar{k} über:

$$\underbrace{\frac{\partial \bar{k}}{\partial t}}_L + \underbrace{\bar{v}_k \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_k}}_K = - \underbrace{\overline{v'_j v'_k} \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_k}}_P - \underbrace{\bar{\varepsilon}}_{DS} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} \left[- \left(k + \frac{p'}{\rho} \right) v'_k + \nu \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_k} + \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{v'_j v'_k} \right) \right]}_{DF} . \quad (3.25)$$

Dabei ist zwischen dem momentanen Wert k und dem Mittelwert \bar{k} unterschieden und von der Umformung

$$\frac{\partial v'_j}{\partial x_k} \frac{\partial v'_j}{\partial x_k} = \frac{\partial v'_j}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v'_j}{\partial x_k} + \frac{\partial v'_k}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \left(\overline{v'_j v'_k} \right)$$

Gebrauch gemacht worden. Dadurch erscheint ein Teil der zuvor als Dissipation bezeichneten Größe hier im Diffusionsterm, denn nur die Größe

$$\bar{\varepsilon} = \nu \frac{\partial v'_j}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v'_j}{\partial x_k} + \frac{\partial v'_k}{\partial x_j} \right) \quad (3.26)$$

wird als turbulente Dissipation bezeichnet. Diese Bezeichnung stützt sich auf die Dissipationsfunktion in der Energiegleichung, die für konstante Stoffwerte

$$\tau_{jk} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} = \mu \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right)$$

gegeben ist. Nach zeitlicher Mittelung folgt

$$\overline{\tau_{jk} \frac{\partial v_j}{\partial x_k}} = \mu \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial x_j} \right) + \mu \overline{\frac{\partial v'_j}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v'_j}{\partial x_k} + \frac{\partial v'_k}{\partial x_j} \right)}. \quad (3.27)$$

Der erste Anteil der Dissipationsfunktion wird als direkte Dissipation bezeichnet; in dem zweiten Anteil erkennen wir die durch Gl. (3.26) definierte turbulente Dissipation $\rho \bar{\epsilon}$, auch indirekte Dissipation genannt.

Die Transportgleichung (3.25) für die Turbulenzenergie wird in ähnlicher Weise gedeutet wie die Transportgleichung (3.23): Die lokale und konvektive Änderung von k ist gleich der Produktion + Dissipation + Diffusion von \bar{k} . Die experimentell schwer zu erfassende Druck-Scher-Korrelation in Gl. (3.23) tritt in Gl. (3.25) nicht auf.

Transportgleichungen der hier besprochenen Art spielen bei der Entwicklung moderner halbempirischer Berechnungsmethoden eine zentrale Rolle. So beschreibt Gl. (3.23) die lokale und konvektive Änderung des unbekanntes Reynoldsschen Spannungstensors. Das Schließungsproblem läßt sich auf diesem Weg jedoch nicht lösen, da die Transportgleichungen ihrerseits neue unbekanntes Korrelationsfunktionen enthalten. Für jede dieser unbekanntes Korrelationsfunktionen läßt sich wiederum eine Transportgleichung herleiten, die jedoch erneut neue unbekanntes Korrelationen enthält. Die Ordnung dieser Tensoren wird jeweils um Eins erhöht. So erhält die Transportgleichung (3.23) eine Trippelkorrelation $\overline{v'_i v'_j v'_k}$, also einen Tensor dritter Stufe. Eine Bilanzgleichung dafür würde einen Tensor vierter Stufe enthalten.

Fazit: Das Schließungsproblem läßt sich derart nicht lösen. Es existieren immer mehr Unbekannte als Gleichungen zur Verfügung stehen. Der einzig gangbare Weg führt über halbempirische Schließungsannahmen.

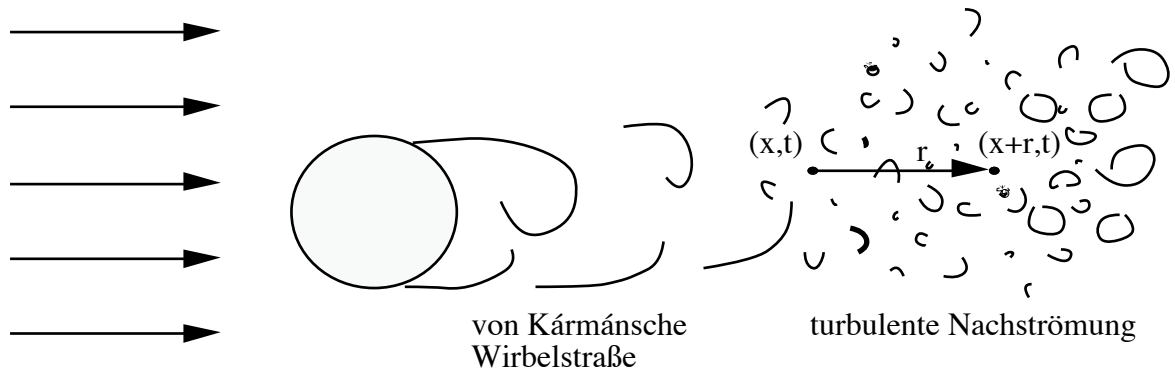


Bild 3.5: Turbulente Nachströmung hinter einem quer angeströmten Zylinder

3.5 Turbulente Längenmaße und die Energiekaskade

In einer turbulenten Strömung treten Turbulenz- oder Wirbelelemente (auch Wirbelballen genannt) sehr unterschiedlicher Größe auf. Betrachtet man z. B. die Nachlaufströmung hinter einem quer angeströmten Zylinder, so erkennt man in unmittelbarer Nähe hinter dem Zylinder große Wirbelelemente, die aus der von Kármánschen Wirbelstraße herrühren und von der Größenordnung des Zylinderdurchmessers L sind. Diese zerfallen anschließend in kleinere Elemente, deren charakteristische Abmessungen statistisch stark variieren: Ihre Längen sind bei Strömungen mit großen Reynolds-Zahlen über mehrere Größenordnungen verteilt. Man kann in einer turbulenten Strömung charakteristische Längenmaße dadurch definieren, daß man die Geschwindigkeiten gleichzeitig an zwei verschiedenen Orten x und $x + r$ mißt und das gemittelte Produkt der Geschwindigkeitsschwankung bestimmt. Normiert man diese Größe, so erhält man die Raum- oder Zwei-Punkt-Korrelation

$$R(x, r) = \frac{\overline{u'(x, t)u'(x + r, t)}}{\sqrt{\overline{u'^2(x, t)}}\sqrt{\overline{u'^2(x + r, t)}}}. \quad (3.28)$$

Wegen der Normierung wird diese Größe bei $r = 0$ identisch Eins. Mit wachsendem r fällt sie ab, um schließlich für $r \rightarrow \infty$ gegen Null zu streben. Dabei sind auch Werte $R < 0$ möglich.

Der Begriff Korrelation wurde von Sir G.I. Taylor 1935 in die Turbulenztheorie eingeführt. Er ist ein Maß für die Übereinstimmung zweier Signale und beschreibt damit, in welchem Maße sich die Turbulenzeigenschaften an zwei Orten wechselseitig beeinflussen. Hätte man z. B. ein reines Sinussignal, das mit der mittleren Geschwindigkeit \bar{u} von x zu $x + r$ transportiert wird, so ergäbe sich mit $u'(x, t) = \sin \omega t$, $u'(x + r, t) = u'(x, \omega(t - r/\bar{u}))$ mit der Zeitmittelung

$$\overline{u'(x, t)u'(x + r, t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sin \omega t \sin(\omega(t - r/\bar{u})) dt$$

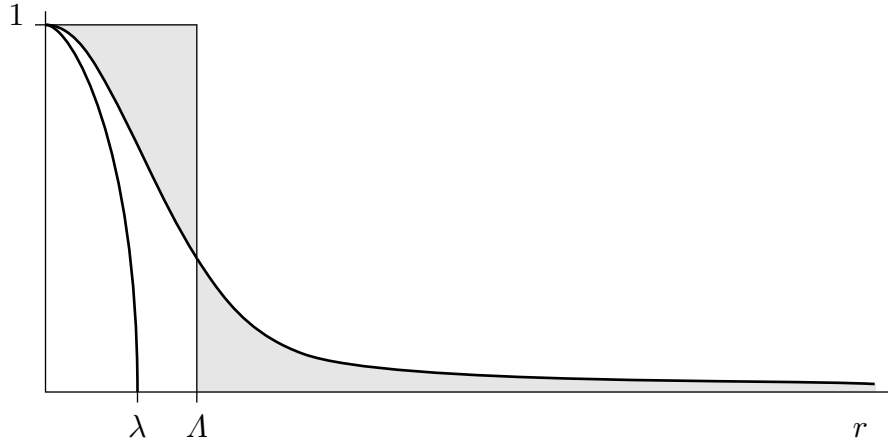


Bild 3.6: Zur Definition des Integrallängenmaßes

die Raumkorrelation $R = \cos \omega(r/\bar{u})$, die bei $r = 2\pi n\bar{u}/\omega$ (n ganzzahlig, > 0) den Wert 1 und bei $r = 2\pi(n + 1/2)\bar{u}/\omega$ den Wert -1 annimmt. Im Fall eines turbulenten Signals wird im allgemeinen eine auf Null monoton abfallende Korrelation gemessen. Ausgeprägte negative Korrelationen mit Zwischenmaxima weisen auf geordnete Strukturen hin. (Derartige sogenannte "kohärente Strukturen" sind in neuester Zeit Gegenstand zahlreicher experimenteller Untersuchungen.)

Aus der Raumkorrelation lassen sich zwei turbulente Längenmaße ableiten, das Makrolängenmaß oder Integrallängenmaß Λ

$$\Lambda = \int_0^{\infty} R(x, r) dr \quad (3.29)$$

und das Mikrolängenmaß λ , definiert durch

$$\frac{1}{\lambda^2} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} \right)_{r=0} . \quad (3.30)$$

Diese Größen sind in Bild 3.6 schematisch dargestellt. Anschaulich ergibt sich Λ derart, daß die Flächen oberhalb und unterhalb der Kurve $R(r)$ in Bild 3.6 gerade gleich sind. Das Mikrolängenmaß erhält man aus dem Schnittpunkt der Parabel, die die Krümmung bei $r = 0$ annähert, mit der Achse. Dabei charakterisiert das Makrolängenmaß diejenige Länge, bei der die Geschwindigkeitsschwankungen im wesentlichen unkorreliert werden, es entspricht damit der Größe der turbulenten Wirbelelemente. Später wird gezeigt werden, daß sie gleichbedeutend mit dem Prandtlschen Mischungsweg ℓ_m ist. Somit stehen neben der charakteristischen Abmessung L des Körpers bereits zwei weitere Längenmaße zur Verfügung. Daneben gibt es noch ein weiteres Längenmaß, die Kolmogorov-Länge ℓ_k . Sie beschreibt die charakteristische Länge der kleinsten Wirbel in der Strömung. Es ist diejenige Länge, bei der die kinetische Energie der Turbulenz durch die Wirkung der Zähigkeitskräfte in thermische Energie umgewandelt wird. Auf den Energiehaushalt bei turbulenten Strömungen soll im folgenden eingegangen werden.

A.N. Kolmogorov hat (1941) die Vorstellung einer Energiekaskade für voll entwickelte turbulente Strömungen eingeführt. Daraus konnte er ein sehr wichtiges, für beliebige turbulente Strömungen universell gültiges Gesetz, die sogenannten Ähnlichkeitshypothesen, ableiten. Sie gelten unter der Annahme, daß die Strömung lokal als homogen und isotrop angesehen werden kann. Diese Annahme ist gültig, wenn die Reynolds-Zahl sehr groß ist.

Man geht nun davon aus, daß man sich die Turbulenzbewegung aus Elementen (Turbulenzballen) vieler verschiedener Größenordnungen vorstellt. In die großen Turbulenzelemente der charakteristischen Länge ℓ_t und der Geschwindigkeitsdifferenz u' (Differenz von u über die Länge ℓ_t) wird von den außen angreifenden Geschwindigkeitsgradienten Turbulenzenergie eingespeist. Dabei ist ℓ_t von der Größenordnung des integralen Längenmaßes Λ . Die pro Zeit- und Masseneinheit zugeführte Energie ist von der Größenordnung

$$\bar{\varepsilon} \sim O\left(\frac{u'^3}{\ell_t}\right). \quad (3.31)$$

Die Vorstellung einer Energiekaskade besteht nach Kolmogorov darin, daß die großen Elemente diese Energie abbauen, indem sie sie auf die Turbulenzebene der nächst kleineren Ordnung übertragen; diese geben sie ihrerseits weiter und so fort. Mit immer kleiner werdenden Abmessungen wachsen die Zähigkeitskräfte, bis die Elemente so klein werden, daß sie die zugeführte mechanische Energie in Wärme dissipieren können. Diese kleinste Länge von Turbulenzelementen wird als Kolmogorov-Länge ℓ_k bezeichnet. Statt der Längenskalen wird in der statistischen Turbulenztheorie der Kehrwert einer Länge, die Wellenzahl k verwendet. Man spricht daher auch von der Energiekaskade im Wellenzahlraum.

Die drei wesentlichen Annahmen von Kolmogorov (1941) sind:

- Es gibt einen stationären Energietransport in Form einer Energiekaskade von großen zu kleinen Längenskalen (d. h. von kleinen zu großen Wellenzahlen).
- Die Energiekaskade ist bezüglich der Längenskalen lokal, d. h. die Energie wird nur zum nächst kleineren Turbulenzelement übertragen.
- Bei der Energiekaskade werden Fluktuationen vernachlässigt. Es wird nur die mittlere Turbulenzenergie und ihr Transport betrachtet. Diese Annahme wurde von Landau (1944) kritisiert und später von Kolmogorov (1962) und Obukhov (1962) revidiert.

Die Energiekaskade findet in einem sogenannten Inertialbereich statt, d. h. es gibt im Wellenzahlraum einen Bereich zwischen den kleinen und den sehr großen Wellenzahlen, in dem der Energietransport nur durch die Trägheitskräfte der Bewegungsgleichungen bestimmt ist. Die Lokalität der Energiekaskade hat zur Folge, daß für alle Wellenzahlen im Inertialbereich eine Energietransferrate $\bar{\varepsilon}$ existiert, welche unabhängig von der Wellenzahl ist. Sie entspricht der Dissipation $\bar{\varepsilon}$ und beschreibt die Energie pro Masseneinheit, die pro Zeiteinheit von einer zu der nächsthöheren Wellenzahl transportiert wird.

Wir betrachten nun ein Wirbelelement der Größe

$$\ell_n = \frac{\ell_t}{2^n} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (3.32)$$

wobei n eine beliebige ganze Zahl > 0 ist. Die Geschwindigkeitsdifferenz über das Wirbelelement sei v'_n . Dann ist seine kinetische Energie proportional zu $v_n'^2$

$$E_n \sim v_n'^2. \quad (3.33)$$

Die charakteristische Zeit t_n einer Umdrehung ist proportional zu ℓ_n/v'_n

$$t_n \sim \frac{\ell_n}{v'_n} . \quad (3.34)$$

Da die Energietransferrate eine im Wellenzahlraum lokale Größe ist, muß sie sich auch durch Größen ausdrücken lassen, die sich nur auf jeweils eine Schale im Wellenraum beziehen. Dabei ist n beliebig, solange ℓ_n im Inertialbereich liegt. Es gilt also aus Dimensionsgründen

$$\bar{\varepsilon} \sim \frac{E_n}{t_n} \sim \frac{v_n'^3}{\ell_n} . \quad (3.35)$$

Daraus erhält man

$$v_n' \sim (\bar{\varepsilon}\ell_n)^{1/3} , \quad E_n \sim (\bar{\varepsilon}\ell_n)^{2/3} , \quad t_n \sim \left(\frac{\bar{\varepsilon}}{\ell_n^2} \right)^{-1/3} . \quad (3.36)$$

Das *Energiespektrum im Wellenzahlraum* $E(k)$ beschreibt die Verteilung der Energie auf die Wellenzahlen. Die Energie E_n ergibt sich daher durch Integration zwischen $k = 1/\ell_n$ und $2/\ell_n$

$$E_n = \int_{1/\ell_n}^{2/\ell_n} E(k) dk . \quad (3.37)$$

Daraus folgt

$$E(k) = \frac{dE_n}{dk} . \quad (3.38)$$

Differenziert man Gl. (3.36) nach $k \sim \ell_n^{-1}$, so ergibt sich

$$E(k) \sim \bar{\varepsilon}^{2/3} k^{-5/3} . \quad (3.39)$$

In Turbulenzmessungen wird statt des Wellenzahlspektrums vielfach das Frequenzspektrum gemessen. Wenn der Turbulenzgrad klein genug ist, kann man die sogenannte *Taylor-Hypothese* benutzen, um das Energiespektrum zu bestimmen. Diese Hypothese geht davon aus, daß die Wirbelelemente sich mit der mittleren Geschwindigkeit \bar{u} durch den Meßpunkt bewegen und daß Fluktuationen vernachlässigt werden können. Dann gilt für die gemessene Frequenz

$$f = k\bar{u} \quad (3.40)$$

und damit für das Energiespektrum

$$E(f) \sim \bar{\varepsilon}^{2/3} f^{-5/3} . \quad (3.41)$$

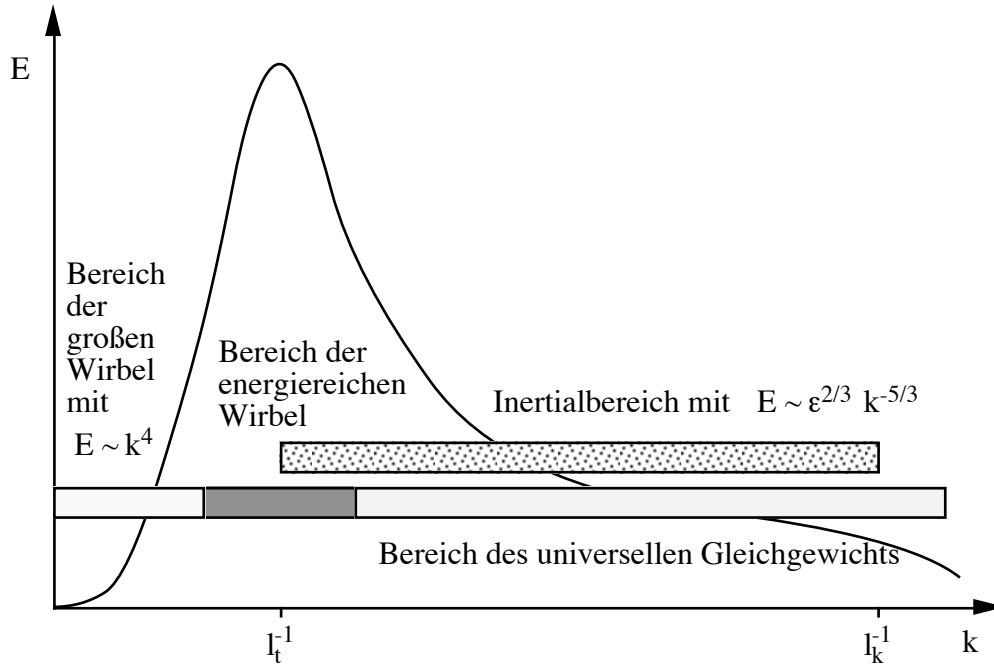


Bild 3.7: Schematische Darstellung des Energiespektrums homogener isotroper Turbulenz

Dieses Ergebnis ist experimentell vielfach bestätigt worden. Das Energiespektrum ist in Bild 3.7 dargestellt.

Mit der Dissipation ε und der Zähigkeit ν läßt sich nun die Kolmogorov-Länge sowie eine Kolmogorov-Zeit definieren. Aus Dimensionsgründen ergibt sich

$$\ell_k = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{1/4}, \quad t_k = \left(\frac{\nu}{\varepsilon} \right)^{1/2}. \quad (3.42)$$

Die Feststellung, daß $\bar{\varepsilon}$ von der Längenskala unabhängig ist, erlaubt es, aus \bar{k} und $\bar{\varepsilon}$ noch das turbulente Längenmaß ℓ_t und das turbulente Zeitmaß t_t zu bilden. Aus Dimensionsgründen gilt

$$\ell_t = c \frac{\bar{k}^{-3/2}}{\bar{\varepsilon}}, \quad t_t = c' \frac{\bar{k}}{\bar{\varepsilon}}. \quad (3.43)$$

Da ℓ_t die Abmessung der energiereichen Wirbel beschreibt, entspricht t_t deren Umdrehungszeit mit der Geschwindigkeit u' . Somit sind die drei Längenmaße Λ , ℓ_t und der Prandtl'sche Mischungsweg ℓ_m von der gleichen Größenordnung und physikalisch von der gleichen Natur. Für isotrope Turbulenz läßt sich zeigen, daß zwischen $\bar{\varepsilon}$ und dem Mikrolängenmaß die Beziehung

$$\bar{\varepsilon} = 15\nu \frac{\overline{u'^2}}{\lambda^2} \quad (3.44)$$

besteht (vergl. J.C. Rotta, *Turbulente Strömungen*, Teubner-Verlag Stuttgart, 1972, S. 84). Da \bar{k} von der Größenordnung $\overline{u'^2}$ ist, erhält man zwischen ℓ_t und λ die Beziehung

$$\frac{\lambda^2}{\ell_t} \sim O \left[\frac{15\nu}{\sqrt{\overline{u'^2}}} \right]. \quad (3.45)$$

Führt man die turbulente Reynolds-Zahl

$$\text{Re}_t = \frac{\sqrt{u'^2} \ell_t}{\nu} \quad (3.46)$$

ein, so ergibt sich zwischen dem turbulenten Mikro- und Makrolängenmaß die Größenordnungsabschätzung

$$\frac{\lambda}{\Lambda} \approx \frac{\lambda}{\ell_t} \sim O\left(\text{Re}_t^{-1/2}\right). \quad (3.47)$$

Zwischen ℓ_k und ℓ besteht die Größenordnungsabschätzung

$$\frac{\ell_k}{\ell_t} \sim O\left(\text{Re}_t^{-3/4}\right). \quad (3.48)$$

Da die turbulente Reynolds-Zahl Re_t für hinreichend große Reynolds-Zahlen Re_L größer als eins ist (aber kleiner als die mit L gebildete Reynolds-Zahl Re_L), ist das Mikrolängenmaß größer als das Kolmogorov'sche Längenmaß ℓ_k und kleiner als das Makrolängenmaß. Insgesamt ergibt sich die folgende Ordnung der Längenmaße

$$\ell_k < \lambda < \ell_t \approx \ell_m \approx \Lambda < L. \quad (3.49)$$

3.6 Grenzschnittabschätzung der Transportgleichungen

Wie schon in Kapitel 2, so beschränken wir uns auch hier im weiteren auf Strömungen mit Grenzschnittcharakter und verwenden dabei die Überlegungen aus Abschnitt 2.1.

Es wäre nicht richtig, wollte man von den für laminare Grenzschnittströmungen hergeleiteten Bewegungsgleichungen ausgehen, um daraus die Reynoldsschen und die Transportgleichungen zu gewinnen. Das hat folgenden Grund: Die Schwankungsgeschwindigkeiten v'_k sind rasch bezüglich Zeit und Raum, so daß deren Ableitungen gegenüber anderen Termen nicht als klein vernachlässigt werden können, obwohl v'_k selbst um etwa eine Größenordnung kleiner ist als \bar{v}_k . Die Grenzschnittabschätzungen müssen direkt in den Reynoldsschen und den Transportgleichungen vorgenommen werden. Dies soll hier für eine im Mittel zweidimensionale und stationäre Strömung erfolgen. Das bedeutet neben $\bar{w} = 0$ weiter, daß alle statistischen Mittelwerte nur von zwei Koordinaten (x und y) abhängen. Die Ableitungen $\partial/\partial t$ und $\partial/\partial z$ der Mittelwerte verschwinden daher erst in den Transportgleichungen.

Aus Abschnitt 2.1 ist bekannt, daß Strömungen mit Grenzschnittcharakter durch

$$\frac{\delta}{L} = O(\varepsilon)$$

gekennzeichnet sind. Dabei ist δ die Schichtdicke und L die charakteristische Länge von der Ordnung $O(1)$. Mit $\bar{u} = O(u_0)$ und $x = O(L)$, wobei u_0 und L Bezugsgrößen von der Ordnung $O(1)$ sind, folgt

$$\frac{\partial}{\partial x} \sim O(1), \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \sim O(1), \quad \frac{\partial}{\partial y} \sim O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right), \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} \sim O\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right). \quad (3.50)$$

Damit können die Abschätzungen vorgenommen werden. Die Kontinuitätsgleichung lautet

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} &= 0 \\ \text{O}(1) \quad \text{O}\left(\frac{\bar{v}}{\varepsilon}\right) & \end{aligned} \quad (3.51)$$

Es folgt wie in Abschnitt 2.1 die Aussage

$$\bar{v} = \text{O}(\varepsilon) . \quad (3.52)$$

Die Schwankungsgeschwindigkeiten werden durch die charakteristische Turbulenzgeschwindigkeit u_t gekennzeichnet:

$$\overline{u'^2} \sim \overline{v'^2} \sim \overline{u'v'} = \text{O}(u_t^2) . \quad (3.53)$$

Die Impulsgleichung (3.14) in x -Richtung lautet

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (\overline{u^2}) + \frac{\partial}{\partial y} (\overline{uv}) &= - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right) \\ \text{O}(1) \quad \text{O}(1) \quad \text{O}(1) & \quad \text{O}\left(\nu + \frac{\nu}{\varepsilon^2}\right) \\ & - \frac{\partial}{\partial x} (\overline{u'^2}) - \frac{\partial}{\partial y} (\overline{u'v'}) \\ & \quad \text{O}(u_t^2) \quad \text{O}\left(\frac{u_t^2}{\varepsilon}\right) . \end{aligned} \quad (3.54)$$

Einen Vergleich zwischen den konvektiven Gliedern und den größten Termen auf der rechten Seite liefert die Aussage

$$u_t = \text{O}(\varepsilon^{1/2}) . \quad (3.55)$$

Bei Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung und der Annahme $\nu = \text{O}(\varepsilon^2)$ geht Gl. (3.54) über in

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial y} (\overline{u'v'}) . \quad (3.56)$$

Wenn $\nu \ll \text{O}(\varepsilon^2)$ ist, würde darüber hinaus der zweitletzte Term entfallen. Der Einfluß des viskosen Transports ist dann gegenüber dem turbulenten Transport (letzter Term) zu vernachlässigen. Die Impulsgleichung in y -Richtung lautet

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (\overline{uv}) + \frac{\partial}{\partial y} (\overline{v^2}) &= - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} \right) \\ \text{O}(\varepsilon) \quad \text{O}(\varepsilon) \quad \text{O}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) & \quad \text{O}\left(\nu\varepsilon + \frac{\nu}{\varepsilon}\right) \end{aligned} \quad (3.57)$$

$$- \frac{\partial}{\partial x} (\overline{u'v'}) - \frac{\partial}{\partial y} (\overline{v'^2}) .$$

$\text{O}(\varepsilon) \qquad \text{O}(1)$

Nach Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung folgt

$$0 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} . \quad (3.58)$$

Der zeitliche Mittelwert des Druckes ist wie bei laminaren Grenzschichten quer zur Grenzschicht konstant. Von dem unbekanntem Reynoldsschen Spannungstensor (3.17) ist nur die Koordinate $\overline{u'v'}$ verblieben. Schreibt man

$$\tau_{\text{res}} = \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \overline{\rho u'v'} = \tau_{\text{mol}} + \tau_{\text{tur}} , \quad (3.59)$$

so besteht formal kein Unterschied zwischen der Prandtlschen Grenzschichtgleichung für laminare und für turbulente Strömungen. Abgesehen von Bereichen in der Nähe fester Wände ist der turbulente Anteil der Schubspannung i. allg. wesentlich größer als der molekulare Anteil.

Wir kommen nun zur Grenzschichtabschätzung der Transportgleichung (3.25). Für stationäre Grenzschichtströmungen ergibt sich, da \bar{k} von der Ordnung $\overline{u'^2} \sim \text{O}(\varepsilon)$ ist

$$\begin{aligned}
\frac{\bar{u}}{\bar{u}} \frac{\partial \bar{k}}{\partial x} + \frac{\bar{v}}{\bar{v}} \frac{\partial \bar{k}}{\partial y} &= - \frac{\overline{u'^2}}{\bar{u}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \frac{\overline{u'v'}}{\bar{v}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \frac{\overline{u'v'}}{\bar{u}} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - \frac{\overline{v'^2}}{\bar{v}} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} - \bar{\varepsilon} \\
\text{O}(\varepsilon) \quad \text{O}(\varepsilon) &\quad \text{O}(\varepsilon) \quad \text{O}(1) \quad \text{O}(\varepsilon^2) \quad \text{O}(\varepsilon) \quad ? \\
+ \frac{\partial}{\partial x} \left[\begin{array}{c} - \overline{\left(k + \frac{p'}{\rho}\right) u'} + \nu \frac{\partial \bar{k}}{\partial x} + \nu \frac{\partial}{\partial x} (\overline{u'^2}) + \nu \frac{\partial}{\partial y} (\overline{u'v'}) \\ \text{O}(\varepsilon^{3/2}) \quad \text{O}(\nu \varepsilon^2) \quad \text{O}(\nu \varepsilon^2) \quad \text{O}(\nu \varepsilon) \end{array} \right] \\
+ \frac{\partial}{\partial y} \left[\begin{array}{c} - \overline{\left(k + \frac{p'}{\rho}\right) v'} + \nu \frac{\partial^2 \bar{k}}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\overline{u'v'}) + \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\overline{v'^2}) \\ \text{O}(\varepsilon^{1/2}) \quad \text{O}\left(\frac{\nu}{\varepsilon}\right) \quad \text{O}(\nu) \quad \text{O}\left(\frac{\nu}{\varepsilon}\right) \end{array} \right]
\end{aligned} \quad (3.60)$$

Hierin wurde der Dissipationsterm $\bar{\varepsilon}$, der Ableitungen von Schwankungsgrößen enthält, nicht abgeschätzt. Wir haben jedoch im letzten Abschnitt gesehen, daß die Dissipation für die Bilanz der Turbulenzenergie bestimmend ist. Um den Produktionsterm $\overline{u'v'} \partial \bar{u} / \partial y$ aufzuwiegen, muß mindestens ein anderer Term von der Ordnung $\text{O}(1)$ sein. Dies ist der Dissipationsterm. In nullter Näherung gilt also

$$\frac{\overline{u'v'}}{\bar{v}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \bar{\varepsilon} , \quad (3.61)$$

d. h. Produktion = Dissipation. Es wird gezeigt werden, daß aus dieser Gleichung der Prandtl'sche Mischungswegansatz hergeleitet werden kann. Wenn man alle Terme bis zur Ordnung ε berücksichtigt, ergibt sich für die \bar{k} -Gleichung:

$$\underbrace{\bar{u} \frac{\partial \bar{k}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{k}}{\partial y}}_{\text{K}} = - \underbrace{\bar{u}'^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \bar{v}'^2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} - \overline{u'v'}}_{\text{P}} - \underbrace{\bar{\varepsilon}}_{\text{DS}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \left[- \left(k + \frac{p'}{\rho} \right) v' + \nu \frac{\partial \bar{k}}{\partial y} + \nu \frac{\partial}{\partial y} (\overline{v'^2}) \right]}_{\text{DF}} \quad (3.61)$$

Davon werden meist auch die ersten beiden Terme der Produktion, die die Normalspannungen $\overline{u'^2}$ und $\overline{v'^2}$ enthalten, gegenüber dem dritten Term, der die turbulente Schubspannung enthält, vernachlässigt. Bei starken Druckgradienten in Strömungsrichtung kann der erste Term jedoch wichtig werden.

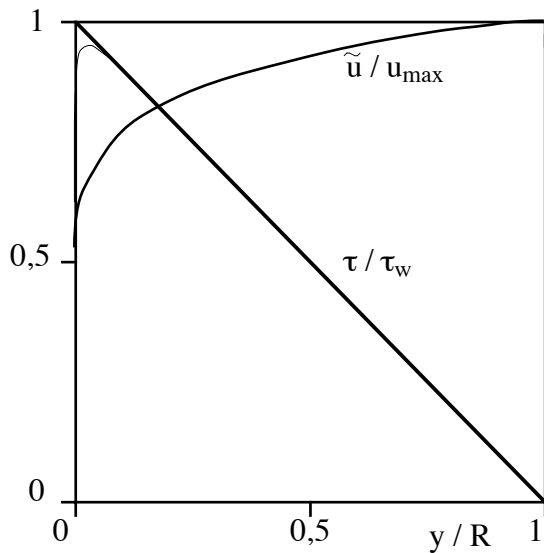
Die meisten Glieder in der Transportgleichung für \bar{k} lassen sich experimentell bestimmen. Eine Ausnahme bilden die Terme, die Druckschwankungen enthalten. Es gibt bisher keine zuverlässige Methode, Druckschwankungen im Feld direkt zu messen. Glücklicherweise entfallen in Gl. (3.61) die unangenehmen Druck-Scher-Korrelationen, die in der Transportgleichung für $\overline{u'v'}$ auftreten. Nicht meßbare Terme können nur indirekt als Differenzen aus gemessenen Korrelationen ermittelt werden. Im Bild 3.8 sind typische experimentell ermittelte Daten bezüglich der einzelnen Glieder der Gl. (3.61) für eine Rohrströmung, eine Plattengrenzschicht und einen ebenen Freistrahler skizziert.

Im linken Bild ist jeweils die Geschwindigkeits- und die Schubspannungsverteilung dargestellt. Die Abhängigkeit von der Reynolds-Zahl ist dabei unterdrückt worden. Die resultierende Schubspannung τ ist mit dem turbulenten Anteil τ_{tur} bis auf wandnahe Bereiche praktisch identisch. In Wandnähe ist τ_{tur} gestrichelt eingezeichnet.

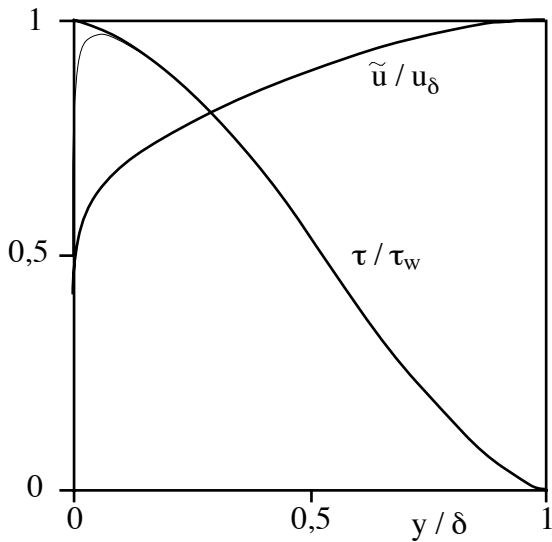
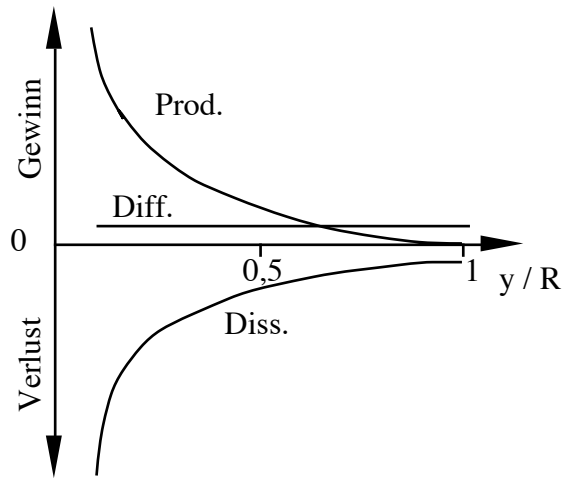
- (a) Rohrströmung: Bei ausgebildeter Rohrströmung verschwinden die konvektiven Terme. Man sieht, daß die Diffusion von \bar{k} in Wandnähe unbedeutend ist, während sie jedoch im Kernbereich gegenüber Produktion und Dissipation von gleicher Größenordnung ist. Die beiden die Viskosität ν enthaltenden Glieder des Diffusionsterms sind in der Regel vernachlässigbar gegenüber dem verbleibenden Term.
- (b) Grenzschichtströmung an einer ebenen Platte: Das Bild ähnelt dem Bild der Rohrströmung, Konvektion und Diffusion sind von geringerer Bedeutung als Produktion und Dissipation. Die Konvektion kann jedoch bei Nichtgleichgewichts-Grenzschichten (dieser Begriff wird später erläutert werden) von erheblicher Bedeutung sein.
- (c) Ebener Freistrahler: Die Verhältnisse sind bei freier Turbulenz offenbar anders als bei der Wandturbulenz. Während bei letzterer in grober Näherung Produktion = Dissipation gesetzt werden kann, trifft dies bei Freistrahlen (und Nachlaufströmungen) nicht zu. Hier sind offenbar sämtliche vier Glieder der Gl. (3.61) von vergleichbarer Größenordnung.

Zusammenfassend können wir feststellen:

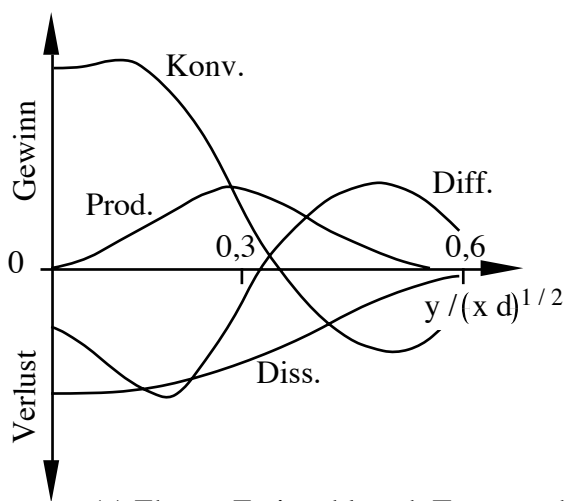
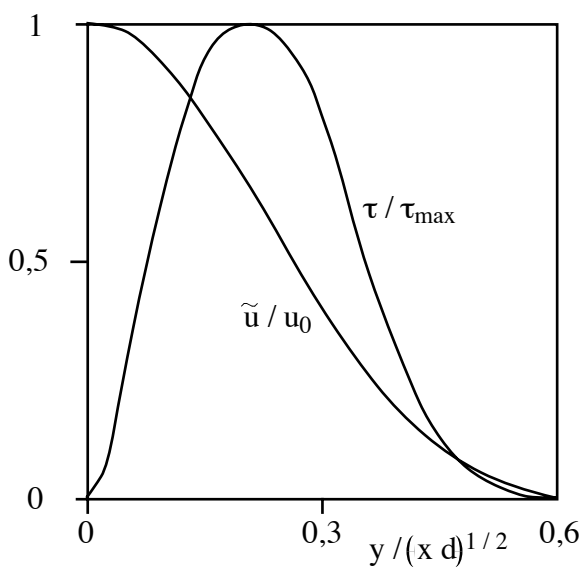
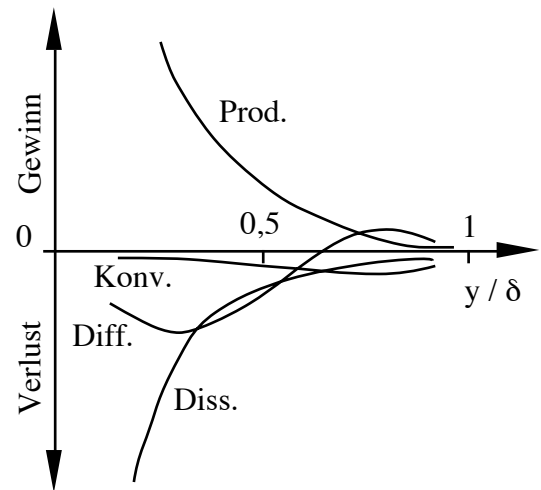
- Die Produktion ist nahe der Position maximaler Schubspannung am größten. Sie steigt im Fall (a) und (b) zur Wand hin stark an, um nach Erreichen eines (hier nicht dargestellten) Maximums für $y = 0$ auf Null abzufallen.



(a) Rohrströmung nach Laufer



(b) Grenzschichtströmung an einer ebenen Platte; nach Townsend



(c) Ebener Freistrahle nach Townsend

Bild 3.8:
Typische experimentell ermittelte Verläufe bezüglich der Bilanz der Turbulenzenergie nach Gl. (3.61)

- Dissipation und Produktion haben entgegengesetzte Vorzeichen. Bei Wandturbulenz ist an Orten hoher Produktion auch die Dissipation groß.
- Konvektion und Diffusion können das Vorzeichen wechseln.

3.7 Die Strömung in der Nähe fester Wände

Turbulente Strömungsfelder sind entweder von festen Wänden (Kanal- und Rohrströmung) oder von nichtturbulenten Strömungsfeldern (Freistrah) begrenzt. Bei einer Grenzschichtströmung liegen beide Begrenzungsarten vor. Es ist offenkundig, daß die Art der Begrenzung das Turbulenzfeld beeinflusst; wir haben dies schon anhand von Bild 3.8 diskutiert.

Mit Annäherung an eine feste Wand fallen die Geschwindigkeitsschwankungen und damit auch die Reynoldssche Schubspannung auf Null ab, d. h.

$$\lim_{y \rightarrow 0} \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \tau_w . \quad (3.62)$$

Wir können in einfacher Weise eine Aussage über die Geschwindigkeitsverteilung in Wandnähe erhalten, wenn wir eine Schichtenströmung mit $dp_\delta/dx = 0$ zugrundelegen. Es sind dann alle statistischen Eigenschaften nur von der Querkoordinate y abhängig. Wegen $\partial \bar{u}/\partial x = 0$ liefert die Kontinuitätsgleichung $\bar{v} = 0$, wenn $v_w = 0$ angenommen wird. Damit entfallen in der Reynoldsschen Gleichung die konvektiven Terme und das Druckglied, es verbleibt

$$0 = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \rho \overline{u'v'} \right) . \quad (3.63)$$

Mit der Randbedingung (3.62) für $y = 0$ folgt nach Integration

$$\nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \overline{u'v'} = \frac{\tau_w}{\rho} . \quad (3.64)$$

Offensichtlich treten nur die beiden Parameter ν sowie τ_w/ρ auf. Man bezeichnet

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad (3.65)$$

als Schubspannungsgeschwindigkeit. Mit u_τ und ν können nur die beiden folgenden dimensionslosen Größen gebildet werden

$$u^+ = \frac{\bar{u}}{u_\tau} , \quad y^+ = \frac{y u_\tau}{\nu} . \quad (3.66)$$

In unmittelbarer Wandnähe kann $\overline{u'v'}$ vernachlässigt werden. Dann liefert Gl. (3.64) nach Integration und Beachtung der Haftbedingung $u(y=0) = 0$

$$u^+ = y^+ . \quad (3.67)$$

Dies ist die universelle Geschwindigkeitsverteilung innerhalb der viskosen Unterschicht; damit wird jene Schicht bezeichnet, in der die molekulare Schubspannung die Reynoldssche Schubspannung bei weitem übersteigt. Mit wachsendem Wandabstand y^+ nimmt der

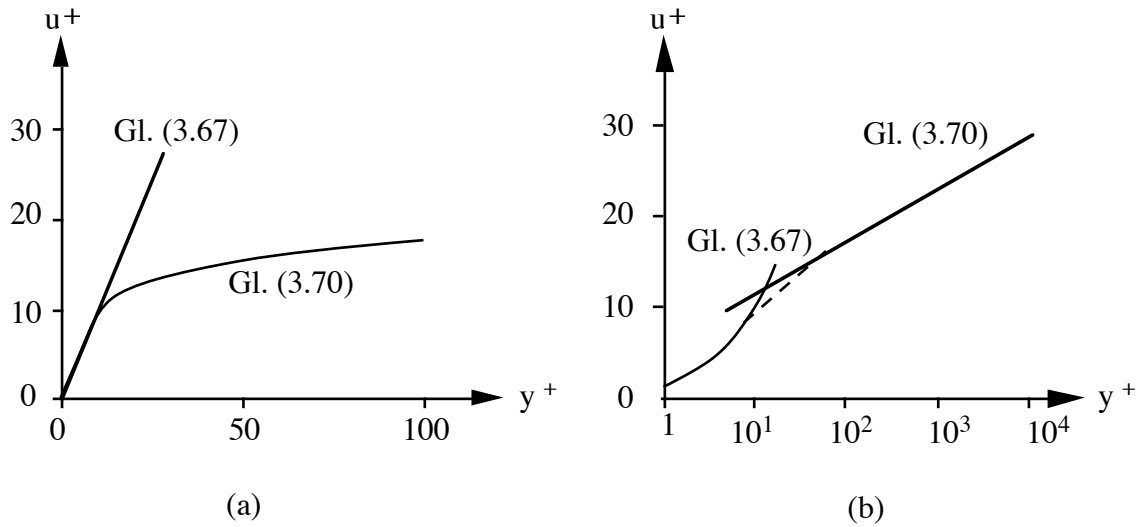


Bild 3.9 :
Universelle Geschwindigkeitsverteilung

Anteil von $-\overline{u'v'}$ an der Schubspannung rasch zu, während gleichzeitig der molekulare Anteil vernachlässigbar wird. Für hinreichend große y^+ liegt der andere Grenzfall

$$-\overline{u'v'} = \frac{\tau_w}{\rho} = u_\tau^2 \quad (3.68)$$

vor. Die unabhängigen Größen des Problems sind u_τ und der Wandabstand y . Da y gleichzeitig als Koordinate in den Erhaltungsgleichungen auftritt, existiert keine konstante Bezugslänge. Die einzig mögliche dimensionsrichtige Gleichung für den Geschwindigkeitsgradienten $d\bar{u}/dy$ lautet daher

$$\frac{d\bar{u}}{dy} = \frac{1}{\kappa} \frac{u_\tau}{y} .$$

Nach Integration folgt

$$\bar{u} = u_\tau \left(\frac{1}{\kappa} \ln y + C_1 \right) \quad (3.69)$$

und nach Einführung der dimensionslosen Variablen das logarithmische Wandgesetz

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + C . \quad (3.70)$$

Auch für den vollturbulenten Bereich liegt somit eine universelle Geschwindigkeitsverteilung der Form (3.70) vor. Dieses logarithmische Wandgesetz wurde zuerst 1932 von Prandtl angegeben; es ist in Bild 3.9 dargestellt. Die Konstanten wurden experimentell zu $\kappa \sim 0,40$ und $C \sim 5,5$ ermittelt. Um die Vorgänge in der viskosen Unterschicht deutlicher hervorzuheben, wird i. allg. die halb-logarithmische Darstellung (b) bevorzugt.

Das universelle Wandgesetz wird in nahezu allen Strömungen entlang fester Wände experimentell bestätigt (der Übergang zwischen beiden Gesetzen folgt dem gestrichelten Verlauf), auch wenn die getroffenen Voraussetzungen nicht alle erfüllt sind. Die dargestellte Geschwindigkeitsverteilung ist universell, der Einfluß der Reynolds-Zahl wird über die

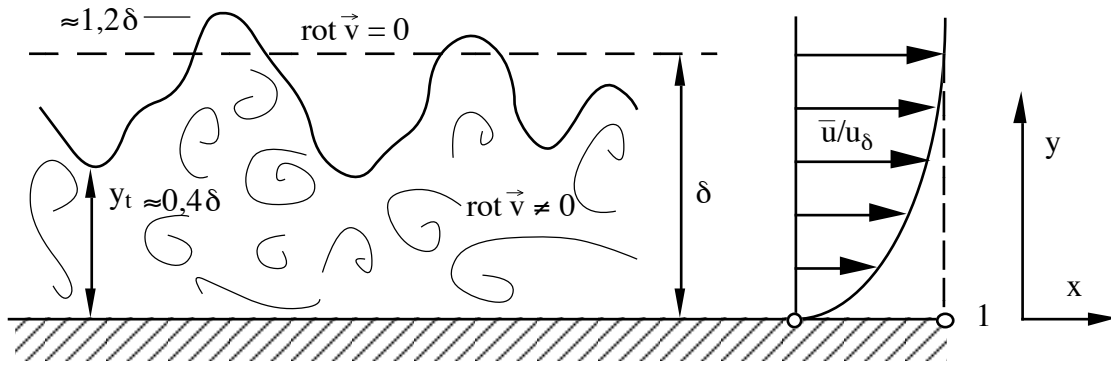


Bild 3.10: Momentaufnahme einer turbulenten Grenzschicht

Bezugsgröße u_τ berücksichtigt. Wir werden dies in Abschnitt 3.9 näher diskutieren. Die Geschwindigkeitsverteilung läßt sich in drei Bereiche einteilen, deren Übergänge fließend sind:

$$\begin{array}{lll}
 0 < y^+ < 5 : & \text{viskose Unterschicht,} & \tau_{\text{mol}} \gg \tau_{\text{tur}} \\
 5 < y^+ < 60 : & \text{Übergangsschicht,} & \tau_{\text{mol}} \sim \tau_{\text{tur}} \\
 y^+ > 60 : & \text{vollturbulente Schicht,} & \tau_{\text{mol}} \ll \tau_{\text{tur}}
 \end{array}$$

Die bisherigen Betrachtungen galten nur für glatte Oberflächen; für rauhe Oberflächen hängt die Konstante C von der Rauigkeit ab. Das bedeutet eine Parallelverschiebung der Geraden in Bild 3.9.

3.8 Freie Grenzen der Turbulenzfelder

In Bild 3.10 ist die Momentaufnahme eines Längsschnitts durch eine turbulente Grenzschicht skizziert. Wie unterscheiden sich turbulente und nichtturbulente Bereiche in einer Strömung voneinander? Turbulente Strömungen sind stets wirbelbehaftet ($\text{rot } \vec{v} \neq 0$), nichtturbulente reibungsfreie Bereiche sind i. allg. wirbelfrei ($\text{rot } \vec{v} = 0$). Am Außenrand einer Grenzschicht bildet sich eine ausgeprägte Grenzfläche aus, die beide Bereiche voneinander trennt. Für einen Schnitt $z = \text{konstant}$ ist die Grenze darstellbar als $y_t(x, t)$, die Skizze stellt eine Momentaufnahme dar.

Fahren wir mit einem geeigneten Meßgerät von der Wand herkommend in y -Richtung, so werden wir irgendwann feststellen, daß zeitweise nichtturbulente Bereiche vorliegen. Man definiert einen Intermittenzfaktor γ , der anschaulich als Verhältnis zweier charakteristischer Zeiten gedeutet werden kann:

$$\gamma(x, y, z = \text{konst.}) = \frac{t_{\text{tur}}}{t_{\text{ges}}} . \quad (3.71)$$

Dabei ist t_{tur} die Zeit, in der eine turbulente Strömung registriert wird und t_{ges} die Gesamtzeit. Der Intermittenzfaktor gibt die Wahrscheinlichkeit für das Vorhandensein einer turbulenten Strömung am Meßpunkt an.

Man sieht anhand von Bild 3.11, daß die rotationsfreie Außenströmung zeitweise bis in Bereiche $y/\delta \approx 0,4$ hineinreicht. Bild 3.11 verlangt eine Definition der Grenzschichtdicke δ , es ist $\delta = y$ für $\bar{u}/u_\delta = 0,99$ gewählt.

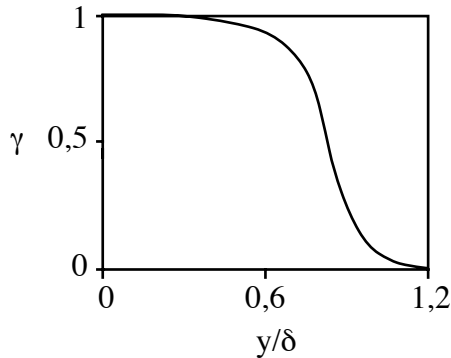


Bild 3.11 :
Typischer experimentell ermittelter Verlauf
des Intermittenzfaktors an einer ebenen Platte

3.9 Halbempirische Berechnungsmethoden auf der Basis des Austauschansatzes

Wir knüpfen an das Problem an, Ansätze für die turbulente Schubspannung $-\overline{\rho u'v'}$ zu finden. In Analogie zum Newtonschen Ansatz, der in Strömungen mit Grenzschichtcharakter

$$\tau_{\text{mol}} = \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \rho \nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (3.72)$$

lautet, definierte Boussinesq 1877 durch den Ansatz

$$\tau_{\text{tur}} = -\overline{\rho u'v'} = \rho \nu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (3.73)$$

eine scheinbare Zähigkeit $\rho \nu_t$, auch turbulente Austauschgröße oder Wirbelviskosität oder scheinbare Zähigkeit genannt. Korrekterweise muß angemerkt werden, daß die Überlegungen von Boussinesq für eine Parallelströmung $\bar{u}(y)$ gemacht wurden, die dann auf Grenzschichtströmungen übertragen wurden. Im Gegensatz zur molekularen Viskosität $\mu = \rho \nu$ ist ν_t kein Stoffwert, sondern eine Ortsfunktion, die sich im Strömungsfeld ändert.

Um auf dem von Boussinesq vorgeschlagenen Weg weiter zu kommen, muß ein Zusammenhang zwischen der Wirbelviskosität und dem Feld der gemittelten Geschwindigkeit gefunden werden. Ein erster erfolgreicher Versuch dieser Art wurde 1925 von Prandtl mit dem Mischungswegkonzept unternommen (Bild 3.12).

Prandtl machte sich dabei folgendes Bild: In einer turbulenten Strömung entstehen "Fluidballen", die eine Eigenbewegung aufweisen und die sich auf einer gewissen Strecke in Längs- und Querrichtung als zusammengehörige Gebilde unter Beibehaltung ihres x -Impulses bewegen. Ein solcher Fluidballen legt relativ zum umgebenden Fluid einen seinem Durchmesser proportionalen Weg l_m , genannt Mischungsweg, zurück, bevor er sich mit seiner Umgebung vermischt und seine Individualität verliert. Wird ein solcher Fluidballen durch eine Querbewegung v' von der Stelle y in einen Nachbarbereich $y \pm l_m$ befördert, so besitzt er gegenüber seiner neuen Umgebung einen Geschwindigkeitsunterschub oder -überschuß von der Größenordnung

$$\Delta u \sim u' \sim \pm l_m \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} .$$

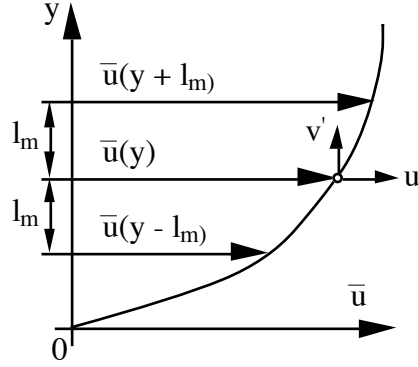


Bild 3.12: Mischungswegkonzept von Prandtl

Durch die Verdrängungswirkung der Turbulenzballen werden Schwankungen v' in y -Richtung hervorgerufen, die aus Kontinuitätsgründen von gleicher Größenordnung sind. Dies führt zu dem Prandtlschen Mischungswegansatz

$$\tau_{\text{tur}} = -\overline{\rho u'v'} = \rho l_m^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} . \quad (3.74)$$

Alle Proportionalitätskonstanten sind in dem ohnehin unbekanntem Mischungsweg l_m enthalten. Die Betragsstriche werden gesetzt, damit τ_{tur} und $\partial \bar{u} / \partial y$ das gleiche Vorzeichen besitzen.

Man sieht anhand von Bild 3.12, daß für $\partial \bar{u} / \partial y > 0$ ein positives v' ein negatives u' induziert und umgekehrt. Für $\partial \bar{u} / \partial y < 0$ wird analog argumentiert. Die Reynoldssche Schubspannung $-\overline{\rho u'v'}$ ist also (meist) positiv.

Ein Vergleich von Gl. (3.74) mit Gl. (3.73) liefert für die Wirbelviskosität

$$\nu_t = l_m^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| . \quad (3.75)$$

Nicht nur die Schubspannung, sondern auch die Wirbelviskosität selbst hängt vom Geschwindigkeitsgradienten ab.

Prandtls Überlegungen lag die Annahme zugrunde, daß die turbulenten "Fluidballen" bei ihrer zufälligen Querbewegung Impulse austauschen. Im Gegensatz dazu ging Taylor 1932 von der Vorstellung aus, daß bei der turbulenten Mischungsbewegung die Wirbelstärke der "Fluidballen" die übertragbare Größe ist. Man spricht von einer Wirbeltransporttheorie im Gegensatz zur Impulsaustauschtheorie von Prandtl. Unter gewissen Voraussetzungen führt die Taylorsche Vorstellung zu dem gleichen Ergebnis.

Für wandnahe Bereiche wird l_m aufgrund von Gl. (3.70)

$$l_m = \kappa y \quad (\kappa = 0,4) . \quad (3.76)$$

Dies ist gleichbedeutend mit

$$\nu_t = \kappa u_{ty} . \quad (3.77)$$

Ein anderer Ansatz im Bereich des universellen Wandgesetzes ist derjenige von van Driest

$$\frac{\nu_t}{\nu} = \kappa^2 y^{+2} \left[1 - \exp \left(-\frac{y^+}{A} \right)^2 \right]^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| \quad (3.78)$$

mit $\kappa = 0,4$ und $A = 26$.

Bei Freistrahelströmungen werden Approximationen der Form

$$l_m \sim b; \quad \nu_t \sim u_0 b \quad (3.79)$$

verwendet, b ist eine die Strahlbreite charakterisierende Größe und u_0 die Maximalgeschwindigkeit auf der Strahlachse. Die Konstanten unterscheiden sich im ebenen und rotationssymmetrischen Fall voneinander.

Dieser Abschnitt soll mit einigen kritischen Bemerkungen abgeschlossen werden. Der entscheidende Nachteil der hier angegebenen Ansätze liegt darin, daß die Reynoldssche Schubspannung nur zu dem örtlichen Geschwindigkeitsgradienten in Beziehung gesetzt wird. Tatsächlich beeinflussen benachbarte, i. w. stromaufwärts liegende Gebiete die Größe $-\overline{\rho u'v'}$ in entscheidender Weise.

Bei praktischen Vorausberechnungen geht man von zweckmäßig erscheinenden Ansätzen für l_m oder ν_t aus und variiert diese so lange, bis die Rechenergebnisse mit Versuchsdaten möglichst gut übereinstimmen. Trotz der genannten Mängel werden die Mischungswegansätze auch weiterhin häufig verwendet, da sie außerordentlich einfach sind und darüberhinaus erlauben, daß für laminare Grenzschichten entwickelte Rechenverfahren auch auf turbulente Grenzschichten angewendet werden können.

In vielen einfachen Fällen sind die vorausberechneten Ergebnisse für die Praxis ausreichend genau. Es besteht jedoch das Bedürfnis nach verbesserten Rechenverfahren, die die Physik des Turbulenzmechanismus besser erfassen. Damit kommen wir zur Besprechung halbempirischer Methoden höherer Ordnung.

3.10 Halbempirische Berechnungsmethoden auf der Basis der Transportgleichungen

Bei den halbempirischen Methoden erster Ordnung werden die Schließungsannahmen direkt in der Impulsgleichung (3.56) vorgenommen. Die halbempirischen Methoden höherer Ordnung bedienen sich der Transportgleichung (3.60) oder ähnlicher Beziehungen, in denen die Schließungsannahmen vorgenommen werden.

Ausgangspunkt dieser Methoden sind die Arbeiten von Kolmogorov (1942) und von Prandtl (1945). Kolmogorov schlug eine Transportgleichung für $\sqrt{\bar{k}}/L$, eine "Frequenz" vor, während Prandtl die Transportgleichung für \bar{k} modellierte. Die Arbeit von Prandtl ist der Ausgangspunkt sämtlicher moderner Schließungsansätze, wir gehen daher in Anlehnung an die Originalarbeit ausführlicher darauf ein.

Zu Anfang sei die Transportgleichung für \bar{k} nach Gl. (3.61), jedoch ohne die Terme, die die laminare Zähigkeit enthalten, und die Produktionsterme von der Ordnung $O(\varepsilon)$ und kleiner, noch einmal angeschrieben:

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{k}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{k}}{\partial y} = -\overline{u'v'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \bar{\varepsilon} - \frac{\partial}{\partial y} \left[\overline{\left(k + \frac{p'}{\rho} \right) v'} \right]. \quad (3.80)$$

Die Produktion von Turbulenzenergie wird durch den Term $-\overline{u'v'}\partial\bar{u}/\partial y$ beschrieben. Wir hatten festgestellt, daß $-\overline{u'v'}$ i. allg. positiv ist. Prandtl setzt in Anlehnung an den Vorschlag von Boussinesq

$$-\overline{u'v'} = \nu_t \frac{\partial\bar{u}}{\partial y} . \quad (3.81)$$

Die Austauschgröße ν_t für den Impulstransport kann im Hinblick auf ihre Dimension (Länge · Geschwindigkeit) als

$$\nu_t = c_1 \sqrt{\bar{k}l} , \quad c_1 = 0,548 \quad (3.82)$$

geschrieben werden. Es folgt für die Produktion

$$-\overline{u'v'} \frac{\partial\bar{u}}{\partial y} = c_1 \sqrt{\bar{k}l} \left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial y} \right)^2 . \quad (3.83)$$

Darin ist c_1 eine experimentell zu bestimmende Zahl, von der man (wie Prandtl schreibt) hoffen kann, daß sie konstant ist. Unter dem Längenmaß l kann man sich eine dem Mischungsweg l_m oder der integralen Korrelationslänge Λ proportionale Größe vorstellen.

Die Dissipation ε beschreibt den Abbau der Turbulenzenergie. In Abschnitt 3.5 hatten wir gesehen, daß dies durch einen Energietransport durch den Wellenzahlraum erfolgt, wobei die Transferrate gleich der Dissipation $\bar{\varepsilon}$ ist. Die Existenz einer von der Längenskala unabhängigen Dissipation $\bar{\varepsilon}$ hat nun weitreichende Konsequenzen für die Modellierung der Transportgleichung für die Turbulenzenergie. Auf Grund der Definition, Gl. (3.26), kann man $\bar{\varepsilon}$ natürlich dadurch bestimmen, daß man die Produkte von Geschwindigkeitsgradienten mißt und diese mit der molekularen Zähigkeit multipliziert. Dies bedeutet, daß man die Gradienten durch Messung der Geschwindigkeitsdifferenz zwischen zwei Punkten, die um weniger als die Kolmogorov-Länge voneinander entfernt sind, ermitteln würde. Dies läuft darauf hinaus, $\bar{\varepsilon}$ dort zu bestimmen, wo die Energie durch molekulare Zähigkeit dissipiert wird.

Da $\bar{\varepsilon}$ jedoch unabhängig von der Längenskala ist, kann sie mit der gleichen Berechtigung auch beim Längenmaß l ermittelt werden. Aus Gl. (3.43) folgt für die Dissipation

$$\bar{\varepsilon} = c \frac{\bar{k}^{3/2}}{l} , \quad c = 0,1643 . \quad (3.84)$$

Damit wird $\bar{\varepsilon}$ von der laminaren Zähigkeit unabhängig.

Die Diffusion, der letzte Term auf der rechten Seite der Gl. (3.80), beschreibt die Ausbreitung der Turbulenzenergie in Richtung ihres Gefälles. In Analogie zu molekularen Transportvorgängen (der Wärmestrom ist dem negativen Temperaturgradienten proportional usw.) setzt Prandtl die Diffusion von \bar{k} proportional $\sqrt{\bar{k}l}\partial\bar{k}/\partial y$. Dabei wird die Proportionalitätskonstante k_q eingeführt, sie soll hier durch $\text{Pr}_k = c_1/k_q$, die Prandtl-Zahl des Transportes von \bar{k} ersetzt werden. Es folgt für den Diffusionsterm mit Gl. (3.82)

$$-\frac{\partial}{\partial y} \left[\left(k + \frac{p'}{\rho} \right) v' \right] = k_q \frac{\partial}{\partial y} \left(\sqrt{\bar{k}l} \frac{\partial\bar{k}}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\nu_t}{\text{Pr}_k} \frac{\partial\bar{k}}{\partial y} \right) . \quad (3.85)$$

Damit ist alles bereitgestellt, um die nach Prandtl modellierte Transportgleichung für die Turbulenzenergie \bar{k} anschreiben zu können. Prandtl hat in seiner Originalarbeit die Länge l als zweite Variable gewählt, hier soll stattdessen ε genommen werden

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{k}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{k}}{\partial y} = \nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 - \bar{\varepsilon} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\nu_t}{\text{Pr}_k} \frac{\partial \bar{k}}{\partial y} \right). \quad (3.86)$$

Hinzu kommt aus Gl. (3.82) und (3.84) der Zusammenhang zwischen turbulenter Zähigkeit, Turbulenzenergie und Dissipation

$$\nu_t = c_D \frac{\bar{k}^2}{\bar{\varepsilon}}, \quad c_D = c_1 c = 0,09. \quad (3.87)$$

Mit der Prandtlschen Modellierung ist die Ermittlung der turbulenten Zähigkeit auf die Bestimmung der Turbulenzenergie zurückgeführt. Zusammen mit der Kontinuitäts- und der Impulsgleichung liegt damit ein Gleichungssystem zur Ermittlung der Unbekannten \bar{u} , \bar{v} , \bar{k} , $\overline{u'v'}$ vor. Offen ist noch die Frage der Modellierungskonstanten. Weiterhin ist ein Ansatz für l oder ε erforderlich.

Ein interessanter Sonderfall folgt aus der Annahme Produktion = Dissipation, d. h.

$$c_1 \sqrt{\bar{k}l} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 = c \frac{\bar{k}^{3/2}}{l} \quad \longrightarrow \quad \bar{k} = \frac{c_1}{c} l^2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2. \quad (3.88)$$

Eingesetzt in Gl. (3.82) ist

$$\nu_t = \sqrt{\frac{c_1^3}{c}} l^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|. \quad (3.89)$$

Das ist identisch mit dem Prandtlschen Mischungswegansatz (3.75), wenn $\sqrt{c_1^3/c} l^2 = l_m^2$ gesetzt wird. Da die Konstanten c_1 und c von der Ordnung $O(1)$ sind, sind l und l_m von der gleichen Größenordnung.

Anhand von Bild 3.8 wurde gezeigt, daß die Annahme Produktion = Dissipation bei Rohr- und Kanalströmungen eine recht gute und bei Grenzschichtströmungen oft brauchbare Näherung darstellt. Das ist ein ganz wesentlicher Grund für den Erfolg des Mischungswegansatzes. Wir sehen auch hier unmittelbar ein, wann Mischungswegansätze offenbar versagen. Dies ist der Fall, wenn die Konvektion und/oder die Diffusion in der Transportgleichung eine nicht zu vernachlässigende Rolle spielen (bei Grenzschichtströmungen mit starken Druckänderungen oder plötzlichen Konturänderungen). In der Theorie turbulenter Grenzschichten spielt der Begriff Equilibriums-Grenzschichten eine wichtige Rolle. Man kann diese durch Produktion = Dissipation charakterisieren. Dies liegt näherungsweise vor, wenn sich die Zustände in Strömungsrichtung nicht (Rohr- und Kanalströmung) oder nur unwesentlich (Grenzschichtströmung mit $dp_\delta/dx = 0$ oder schwachen Druckgradienten) ändern. Obwohl die an einer bestimmten Stelle in der Strömung produzierte Turbulenzenergie entlang einer gewissen Wegstrecke dissipiert wird, ist die lokale Aussage Produktion = Dissipation dann eine sinnvolle Annahme. Bei Freistrahlen ist diese Annahme sehr problematisch, wie Bild 3.8 (c) zeigt.

In den letzten Jahren haben sich die sogenannten Zwei-Gleichungsverfahren durchgesetzt. Dabei wird neben der Gleichung für die Turbulenzenergie eine weitere Differentialgleichung für l oder $\bar{\varepsilon}$ verwendet. Von Rotta wurde schon sehr früh eine Gleichung

für l vorgeschlagen. In der internationalen Literatur hat sich jedoch eine von Jones und Lauder vorgeschlagene Gleichung für $\bar{\varepsilon}$ durchgesetzt, da sie bessere Übereinstimmung mit Meßdaten liefert. Sie lautet für stationäre Grenzschichtströmungen

$$\underbrace{\bar{u} \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial y}}_{\text{K}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\nu_t}{\text{Pr}_\varepsilon} \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial y} \right)}_{\text{DF}} + \frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{k}} \left[\underbrace{c_{\varepsilon 1} \nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2}_{\text{P}} - \underbrace{c_{\varepsilon 2} \bar{\varepsilon}}_{\text{DS}} \right]. \quad (3.90)$$

Hier treten wiederum ein Diffusions-, ein Produktions- und ein Dissipationsterm auf. Weiterhin ergeben sich drei Konstanten Pr_ε , $c_{\varepsilon 1}$, $c_{\varepsilon 2}$, die aus Experimenten bestimmt werden müssen. Relativ gute Ergebnisse ergeben sich für den Datensatz

$$c_D = 0,09, \quad c_{\varepsilon 1} = 1,44, \quad c_{\varepsilon 2} = 1,9, \quad \text{Pr}_\varepsilon = 1,3, \quad \text{Pr}_k = 1,0. \quad (3.91)$$

Neben dem sogenannten \bar{k} - $\bar{\varepsilon}$ -Modell sind auch Modelle für die Reynoldsschen Spannungen $\overline{v'_i v'_j}$ vorgeschlagen worden. Weitere Modifikationen betreffen den Einfluß der laminaren Zähigkeit in Fällen, in denen die turbulente Zähigkeit bis auf die Größenordnung der laminaren abfällt (z. B. in Wandgrenzschichten in Wandnähe).

4. Laminare Temperaturgrenzschichten

Bei Strömungen mit nicht konstanter Temperatur und Dichte sind zwei Fälle zu unterscheiden:

- (a) dem Fluid wird Wärme zugeführt bzw. entzogen,
- (b) die kinetische Energie der Strömung ist von der Größenordnung der inneren Energie, so daß es infolge Kompression oder Dissipation zu einer Temperaturerhöhung kommt.

Im Fall (a) unterscheidet man zwischen erzwungener und freier Konvektionsströmung. Bei erzwungener Konvektionsströmung ist ein äußerer Antrieb (anliegendes Druckgefälle, aufgeprägte Außenströmung) vorhanden, während bei der freien oder natürlichen Konvektionsströmung durch Dichteunterschiede (die ihrerseits auf Temperaturunterschieden beruhen) hervorgerufene Auftriebskräfte die Ursache der Strömung sind, siehe dazu die Abschnitte 3.5 und 3.6.

Wir beschränken uns weiterhin auf Einkomponentenfluide, außerdem setzen wir stationäre Strömungen voraus. Das zu lösende Gleichungssystem besteht aus

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(\rho v_k) = 0, \quad (4.1)$$

$$\rho v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_k} = -\frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{\partial \tau_{jk}}{\partial x_k} + \rho g_j, \quad (4.2)$$

$$\rho c_p v_k \frac{\partial T}{\partial x_k} = v_k \frac{\partial p}{\partial x_k} - \frac{\partial q_k}{\partial x_k} + \tau_{jk} \frac{\partial v_j}{\partial x_k}. \quad (4.3)$$

Dabei ist die Energiegleichung (4.3) in der Temperaturform angegeben; man kann zeigen, daß die drei Terme der rechten Seite die Druckerarbeit, die von außen zu- oder abgeführte Wärme sowie die Dissipation beschreiben. In der Kräftegleichung wird im Unterschied zu den vorangegangenen Kapiteln die Volumenkraft ρg_j berücksichtigt; diese spielt bei der natürlichen Konvektion eine wesentliche Rolle.

Das Gleichungssystem muß durch phänomenologische Gleichungen für den Wärmestrom q_k und die Schubspannung τ_{jk} ergänzt werden:

$$q_k = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_k}, \quad (4.4)$$

$$\tau_{jk} = \mu \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \delta_{jk} \right). \quad (4.5)$$

Hinzu kommen die thermische Zustandsgleichung

$$\rho = \rho(p, T) \quad (4.6)$$

sowie Ansätze für die Transportgrößen λ , μ als Funktionen thermodynamischer Zustandsgrößen. Damit liegt ein vollständiges Gleichungssystem zur Ermittlung der Unbekannten v_k , ρ , p , $T = f(x_k)$ vor.

Das Gleichungssystem (4.1)–(4.3) mit (4.4) und (4.5) wird komponentenweise ausgeschrieben, wobei wir uns wie im vorangegangenen Kapitel auf ebene Strömungen beschränken. Mit $x_1 = x$, $x_2 = y$, $v_1 = u$, $v_2 = v$ haben wir

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0, \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = & -\frac{\partial p}{\partial x} + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \\ & - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] + \rho g_x, \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = & -\frac{\partial p}{\partial y} + 2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \\ & - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] + \rho g_y, \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\rho c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + \Phi. \quad (4.10)$$

Darin ist Φ die Dissipationsfunktion

$$\Phi = \tau_{jk} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} = 2\mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \frac{2}{3} \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2, \quad (4.11)$$

die Größe, die die irreversible Umwandlung von kinetischer Energie in thermische Energie beschreibt.

4.1 Die Grenzschicht-Gleichungen bei erzwungener Konvektion

Wir führen dimensionslose Variablen ein:

$$\begin{aligned} x^* = \frac{x}{L}, \quad u^* = \frac{u}{u_0}, \quad \rho^* = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad p^* = \frac{p - p_0}{\rho_0 u_0^2}, \\ \mu^* = \frac{\mu}{\mu_0}, \quad y^* = \frac{y}{L}, \quad v^* = \frac{v}{u_0}, \quad \text{Re} = \frac{\rho_0 u_0 L}{\mu_0} = \frac{1}{\varepsilon^2}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Die Bezugsgrößen mit dem Index 0 sind so gewählt, daß x^* bis $\mu^* = O(1)$ sind. Wir führen wieder die Koordinatenstreckung $\bar{y} = y^*/\varepsilon$ durch, während $\bar{x} = x^*$ bleibt. Weiterhin gelten die Entwicklungen der Gl. (2.9), insbesondere $v^* = \varepsilon v_0^*$, Gl. (3.13). Verzichtet man nun auf den Index 0 der nullten Ordnung der Entwicklung, so geht die Kontinuitätsgleichung (4.7) über in

$$\frac{\partial(\rho^* u^*)}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial(\rho^* v^*)}{\partial \bar{y}} = 0. \quad (4.13)$$

Die x -Komponente der Bewegungsgleichung lautet in nullter Ordnung

$$\rho^* \left(u^* \frac{\partial u^*}{\partial \bar{x}} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial \bar{y}} \right) = -\frac{\partial p^*}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left(\mu^* \frac{\partial u^*}{\partial \bar{y}} \right). \quad (4.14)$$

Eine analoge Abschätzung der y -Komponente der Bewegungsgleichung liefert

$$\frac{\partial p^*}{\partial y} = 0. \quad (4.15)$$

Wir kommen zu der an dieser Stelle eigentlich interessierenden Abschätzung der Energiegleichung. Zusätzlich zu den dimensionslosen Größen (4.12) führen wir ein:

$$T^* = \frac{T}{\Delta T_0}, \quad \lambda^* = \frac{\lambda}{\lambda_0}, \quad c_p^* = \frac{c_p}{c_{p0}}. \quad (4.16)$$

Die Temperaturdifferenz, auf die die Temperatur bezogen wird, kann z. B. die Differenz zwischen Anströmtemperatur und Wandtemperatur sein. Gl. (4.10) geht in nullter Ordnung über in

$$\rho^* c_p^* \left(u^* \frac{\partial T^*}{\partial x} + v^* \frac{\partial T^*}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\lambda^*}{\text{Pr}} \frac{\partial T^*}{\partial y} \right) + \text{Ec} \left[u^* \frac{\partial p^*}{\partial x} + \mu^* \left(\frac{\partial u^*}{\partial y} \right)^2 \right]. \quad (4.17)$$

Neben der Reynolds-Zahl treten zwei neue dimensionslose Kennzahlen, die Prandtl-Zahl

$$\text{Pr} = \frac{\mu_0 c_p}{\lambda_0} = \frac{\nu_0}{a_0}, \quad a = \frac{\lambda}{\rho c_p}, \quad (4.18)$$

und die Eckert-Zahl

$$\text{Ec} = \frac{u_0^2}{c_{p0} \Delta T_0} \quad (4.19)$$

auf. Die Prandtl-Zahl ist eine reine Stoffgröße. Sie beschreibt das Verhältnis von Impulsdiffusion zu Wärmetransport in einem Fluid. Man bezeichnet a als Temperaturleitfähigkeit. Die Eckert-Zahl ist als Verhältnis von kinetischer Energie zu Enthalpie(-differenz) ein Maß für die Kompressibilität eines Fluids. Sie ist dem Quadrat der Mach-Zahl proportional. Für ideale Gase gilt:

$$\text{Ec} = \frac{u_0^2}{c_{p0} \Delta T_0} = (\kappa - 1) \frac{T_0}{\Delta T_0} \text{Ma}^2. \quad (4.20)$$

Teilweise ist es zweckmäßig, in der Eckert-Zahl eine charakteristische Temperatur an Stelle einer Differenz einzuführen; dann ist $\text{Ec} = (\kappa - 1) \text{Ma}^2$. Die Mach-Zahl

$$\text{Ma} = \frac{u_0}{c_0} \quad (4.21)$$

ist das Verhältnis von Strömungsgeschwindigkeit zur Schallgeschwindigkeit im Referenzzustand. Letztere ist definiert durch

$$c_0^2 = \left(\frac{dp}{d\rho} \right)_0 = \left(\frac{\partial p_0}{\partial \rho_0} \right)_s. \quad (4.22)$$

Für ideale Gase folgt

$$c_0 = \sqrt{\kappa R T_0} = \sqrt{\kappa p_0 / \rho_0}. \quad (4.23)$$

Darin ist $R = \mathcal{R}/M$ die individuelle Gaskonstante, $\mathcal{R} = 8,315 \text{ J}/(\text{K mol})$ ist die absolute Gaskonstante und M die Molmasse.

Die Prandtl-Zahl modifiziert die Dicke der Temperaturgrenzschicht im Vergleich zur Strömungsgrenzschicht im Grenzfall $\text{Re} \rightarrow \infty$. An der Stelle, wo in der Impulsgleichung die Reynolds-Zahl auftaucht, tritt das Produkt RePr auf. Wenn die Strömungsgrenzschicht von der Dicke

$$\delta_S \sim \text{Re}^{-1/2} \quad (4.24)$$

ist, ist daher die Temperaturgrenzschicht von der Dicke

$$\delta_T \sim (\text{RePr})^{-1/2} . \quad (4.25)$$

Somit ist das Verhältnis der Grenzschichtdicken

$$\frac{\delta_T}{\delta_S} \sim \text{Pr}^{-1/2} . \quad (4.26)$$

In Bild 4.1 sind einige Grenzschichtprofile schematisch dargestellt. Fall (a) liegt bei flüssigen Metallen vor, diese besitzen bei sehr guter Wärmeleitfähigkeit eine geringe Viskosität, es ist $\text{Pr} \ll 1$. Gase besitzen eine vergleichsweise geringe Viskosität und eine geringe Wärmeleitfähigkeit, sie isolieren gut; es ist $\text{Pr} \approx 1$, Fall (b). Flüssigkeiten wie Wasser und besonders Öle leiten die Wärme außerordentlich schlecht, andererseits ist ihre Viskosität hoch; es ist $\text{Pr} > 1$ für Wasser und $\text{Pr} \gg 1$ bei Ölen, Fall (c).

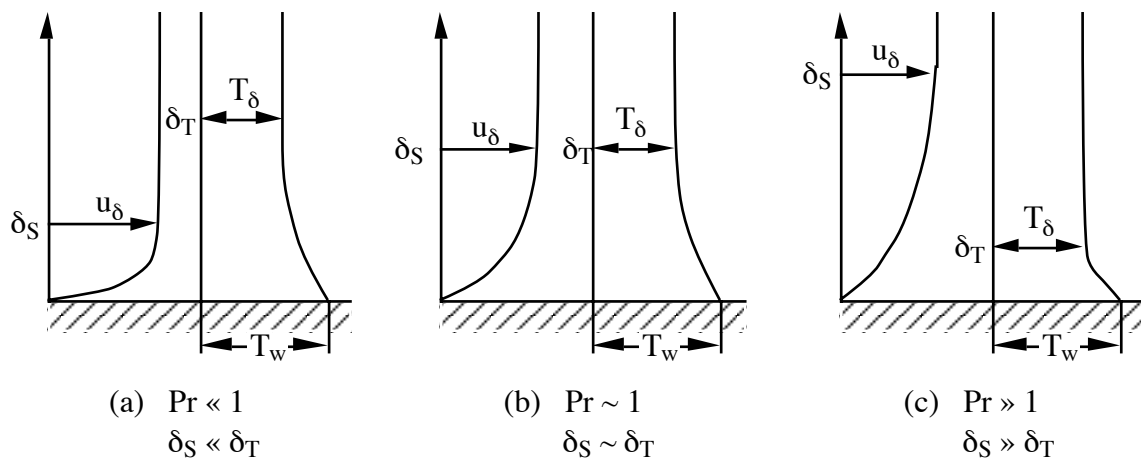


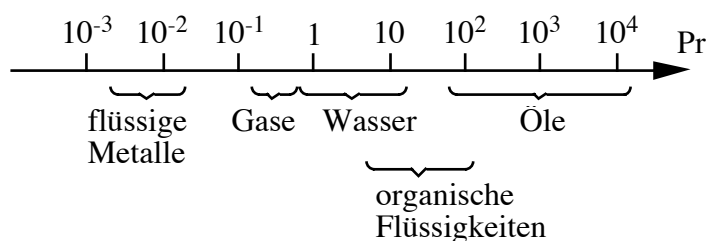
Bild 4.1: Zur Deutung des Einflusses der Prandtl-Zahl auf die Grenzschichtdicke

Für praktische Rechnungen ergeben sich daraus interessante Konsequenzen:

- Bei flüssigen Metallen ist die Strömungsgrenzschicht vernachlässigbar, zur Ermittlung der Temperaturgrenzschicht kann das Geschwindigkeitsprofil näherungsweise durch $u_\delta(x)$ ersetzt werden.
- Bei Gasströmungen sind die Dicke der Temperatur- und Strömungsgrenzschicht von gleicher Größenordnung (für $Pr = 1$ ist $\delta_T = \delta_S$ wie exakte Rechnungen zeigen, siehe später). Zur Anschauung seien charakteristische Prandtl-Zahlen angegeben:

Temperatur	Quecksilber	Luft	Wasser	Motoröl
0° C	0,0288	0,72	13,6	47 100
20° C	0,0249	0,71	7,02	10 400
100° C	0,0162	0,69	1,74	276

Die folgende Skala zeigt das Prandtl-Zahl-Spektrum von Fluiden:



In dem Bereich zwischen den flüssigen Metallen und den Gasen (etwa $0,05 < Pr < 0,5$) gibt es keine Fluide. Bei Luft ist die Temperaturabhängigkeit nahezu vernachlässigbar, da sich die Viskosität und die Wärmeleitfähigkeit in etwa gleicher Weise mit der Temperatur ändern und die Wärmekapazität praktisch konstant ist. Bei Flüssigkeiten ist, wie die Tabelle zeigt, die Temperaturabhängigkeit erheblich.

Das Gleichungssystem (4.13), (4.14), (4.17) stellt die Grenzschichtgleichungen für kompressible Strömungen dar. Es kann in dimensionsbehafteten Größen geschrieben werden

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) &= 0, \\
 \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= -\frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right), \\
 \rho c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) &= u \frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2.
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

Hinzu kommen die thermische Zustandsgleichung $\rho = \rho(T, p)$ sowie Ansätze für die Transportgrößen μ und $\lambda = f(T, p)$, wobei die Druckabhängigkeit meist unbedeutend ist. Damit liegt ein geschlossenes Gleichungssystem zur Ermittlung der Unbekannten u, v, T, ρ vor.

Sowohl die Druckerarbeit als auch die Dissipation enthalten in der dimensionslosen Schreibweise die Eckert-Zahl als Faktor. Für $Ec \rightarrow 0$, d. h. für konstante Dichte, verschwinden beide Ausdrücke. Nehmen wir darüber hinaus noch die Transportgrößen als konstant an, so folgen die Grenzschicht-Gleichungen für inkompressible Strömungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \\ \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= -\frac{dp}{dx} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ \rho c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) &= \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Als Unbekannte verbleiben u , v , $T = f(x, y)$. Mitunter wird jedoch auch bei inkompressiblen Strömungen mit konstanten Stoffwerten der Dissipationsterm $\mu(\partial u/\partial y)^2$ in der Energiegleichung berücksichtigt.

Der kompressible und der inkompressible Fall unterscheiden sich in charakteristischer Weise voneinander. Für $\rho = \text{konstant}$ sind die Kontinuitäts- und die Kräftegleichung von der Energiegleichung entkoppelt, die Temperatur tritt in den Gln. (4.28) nicht auf. Die Strömungsgrenzschicht kann daher unabhängig von der Temperaturgrenzschicht behandelt werden. Bei bekannter Geschwindigkeitsverteilung stellt die Energiegleichung (4.28)₃ eine lineare partielle Differentialgleichung für das Temperaturfeld dar.

Für $\rho \neq \text{konstant}$ sind die drei Gleichungen (4.27) gekoppelt und können nur simultan gelöst werden. Das ist eine ungleich schwierigere Aufgabe.

Neben der Prandtl- und der Eckert-Zahl sind für Temperaturgrenzschichten weitere dimensionslose Kennzahlen von Bedeutung. Man definiert einen Wärmeübergangskoeffizienten α durch

$$q_w = \alpha \Delta T = - \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right)_w. \quad (4.29)$$

Darin ist ΔT eine geeignete Temperaturdifferenz, z. B. mit $\Delta T = T_w - T_\delta$ die Differenz zwischen der Temperatur an der Wand und am Außenrand der Grenzschicht. Die rechte Seite der Gleichung drückt aus, daß der Wärmeübergang an der Wand allein durch Wärmeleitung erfolgt. Der Wärmeübergangskoeffizient hat die Dimension $J/(m^2 s K)$. Er ist selbstverständlich keine Stoffgröße, er hängt vom Temperatur- und vom Geschwindigkeitsfeld ab, seine Ermittlung ist das zentrale Problem dieses Kapitels.

Der Wärmeübergangskoeffizient kann in unterschiedlicher Weise dimensionslos gemacht werden. Gebräuchlich sind die folgenden Kennzahlen:

$$\text{Nusselt-Zahl} \quad \text{Nu} = \frac{\alpha L}{\lambda} = \frac{q_w L}{\lambda \Delta T} \quad (4.30)$$

$$\text{Stanton-Zahl} \quad \text{St} = \frac{\alpha}{\rho c_p u_\infty} = \frac{q_w}{\rho c_p \Delta T u_\infty} = \frac{\text{Nu}}{\text{RePr}} \quad (4.31)$$

Diese Kennzahlen sind wie der Wärmeübergangskoeffizient örtliche Größen. Die Nusselt-Zahl ist nichts anderes als der dimensionslose negative Temperaturgradient an der Wand, denn für $T^* = T/\Delta T$ und $y^* = y/L$ folgt

$$\text{Nu} = - \left(\frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right)_w. \quad (4.32)$$

Die Stanton-Zahl ist das Verhältnis von an der Wand übergehender Wärmestromdichte zur Enthalpiestromdichte(-differenz) der Außenströmung.

4.2 Der Wärmeübergang an der ebenen Platte

Für $u_\delta(x) = u_\infty = \text{konstant}$ haben die Bewegungs- und die Energiegleichung bei inkompressiblen Fluiden die gleiche Form. Es ist

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} &= a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Die Energiegleichung ist eine lineare partielle Differentialgleichung für das Temperaturprofil $T(x, y)$, die bei bekanntem Geschwindigkeitsprofil und speziellen Randbedingungen gelöst werden kann. Wir besprechen zunächst eine exakte Lösung und anschließend Näherungslösungen auf der Basis einer Integralbedingung.

4.2.1 Exakte Lösung für $\text{Pr} = 1$ und konstante Wandtemperatur

Mit den Randbedingungen

$$\begin{aligned} y = 0 : \quad & u = v = 0, & T = T_w = \text{konstant} \\ y = \delta : \quad & u = u_\delta = u_\infty = u_0, & T = T_\delta = T_\infty \end{aligned} \quad (4.34)$$

und der Annahme $\text{Pr} = 1$, d. h. $\nu = a$, ist durch die Blasius-Lösung nach Abschnitt 2.2 zugleich die Lösung der Energiegleichung gegeben. Man sieht das sofort, denn der Ansatz

$$\frac{T}{T_\infty} = A \frac{u}{u_\infty} + B, \quad \text{mit} \quad A = \frac{T_\infty - T_w}{T_\infty} \quad \text{und} \quad B = \frac{T_w}{T_\infty} \quad (4.35)$$

aufgrund der Randbedingungen, führt die Energiegleichung auf die Impulsgleichung zurück. Damit ist

$$\frac{T - T_w}{T_\infty - T_w} = \frac{u}{u_\infty} \quad \text{oder} \quad \frac{T}{T_w} = \frac{u}{u_\infty} + \frac{T_w}{T_\infty} \left(1 - \frac{u}{u_\infty}\right) \quad (4.36)$$

die Lösung der Energiegleichung unter den getroffenen Voraussetzungen. Temperatur- und Strömungsgrenzschicht sind gleich dick, es ist $\delta_T = \delta_S$.

In Bild 4.2 ist die Temperaturverteilung skizziert; durch die beliebig vorgebbare konstante Wandtemperatur wird der Wandwärmestrom reguliert. Da das Temperatur- und das Geschwindigkeitsprofil identisch sind, besteht eine direkte Proportionalität zwischen dem Wärmeübergang und der Wandschubspannung. Es ist

$$q_w = -\lambda_0 \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_w = -\frac{\lambda_0 (T_\infty - T_w)}{u_\infty} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_w. \quad (4.37)$$

Führen wir die Stanton-Zahl

$$\text{St} = \frac{q_w}{\rho_0 c_{p0} (T_w - T_\infty) u_\infty} = \frac{\lambda_0}{\mu_0 c_{p0}} \frac{\mu_0}{\rho_0 u_\infty L} \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right)_w = \frac{1}{\text{Pr}} \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \quad (4.38)$$

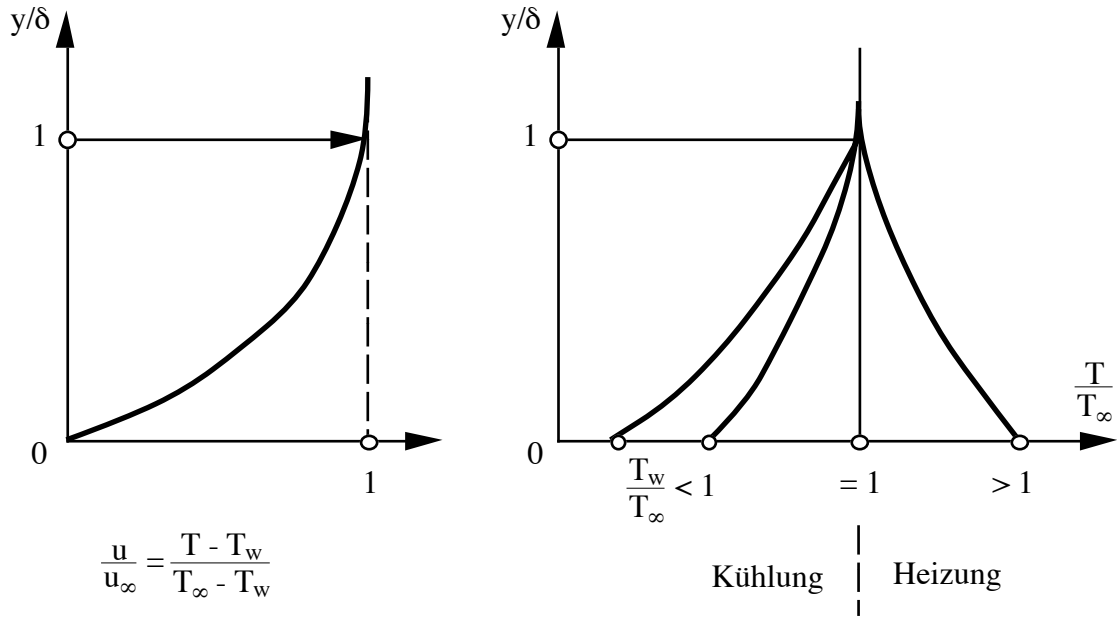


Bild 4.2: Temperaturprofil bei ebener Plattenströmung sowie $Pr = 1$ und $T_w = \text{konstant}$

und den Reibungsbeiwert

$$c_f = 2 \frac{\tau_w}{\rho_0 u_\infty^2} = \frac{2}{Re} \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right) \quad (4.39)$$

ein, so folgt die als Reynolds-Analogie zwischen Impuls- und Wärmeaustausch bekannte Beziehung

$$St = \frac{c_f}{2} . \quad (4.40)$$

Es sei daran erinnert, daß die Reynolds-Analogie in dieser einfachen Form nur unter den Voraussetzungen $p_\delta(x) = \text{konstant}$, $T_w(x) = \text{konstant}$ sowie $Pr = 1$ gilt. Setzen wir das Resultat (2.43) für den Reibungsbeiwert ein, so folgt als exakte Lösung für den Wärmeübergang

$$St = \frac{0,332}{\sqrt{Re_x}} = \frac{Nu_x}{Re_x} , \quad \text{d. h.} \quad Nu_x = 0,332 \sqrt{Re_x} . \quad (4.41)$$

Darin sind die Nusselt- und die Reynolds-Zahl mit der Ortskoordinate x gebildet

$$Re_x = \frac{u_\infty x}{\nu} , \quad Nu_x = \frac{\alpha x}{\lambda} . \quad (4.42)$$

Es gelten die Proportionalitäten $c_f \sim \tau_w \sim St \sim q_w \sim \alpha = C/\sqrt{x}$ mit der Proportionalitätskonstante C . Somit gilt Bild 2.6 in analoger Weise auch hier.

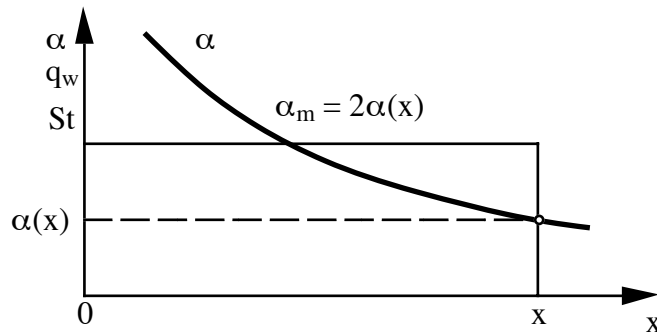


Bild 4.3: Verlauf des Wärmeübergangskoeffizienten $\alpha(x) \sim q_w(x) \sim St(x)$ und mittlerer Wärmeübergangskoeffizient α_m

Bei technischen Problemen interessiert häufig nicht so sehr der örtliche Wärmeübergangskoeffizient sondern sein Mittelwert α_m vom Plattenanfang bis zur Stelle x . Es ist

$$\alpha_m = \frac{1}{x} \int_0^x \alpha(x) dx = \frac{C}{x} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{C}{x} 2\sqrt{x} = 2\alpha(x). \quad (4.43)$$

In C sind alle von x unabhängigen Größen zusammengefaßt.

Fazit: Der mittlere Wärmeübergangskoeffizient einer Platte mit der Länge x ist gerade doppelt so groß wie der örtliche Wärmeübergangskoeffizient an jener Stelle. Ausgedrückt durch die Nusselt-Zahl ist

$$Nu_m = \frac{\alpha_m L}{\lambda} = 0,664 \sqrt{Re_L} = 2Nu_x \quad \text{bei} \quad x = L. \quad (4.44)$$

Nu_m wird mittlere Nusselt-Zahl genannt.

4.2.2 Näherungslösungen mit Integralbedingung für $Pr \neq 1$

Aus der Energiegleichung der Grenzschicht läßt sich eine Integralbedingung angeben. Wir formulieren diese zunächst für den inkompressiblen Fall, gehen also vom Gleichungssystem (4.28) aus. Multipliziert man die Kontinuitätsgleichung mit $T - T_\delta$ und ersetzt in der Temperaturgleichung T durch $T - T_\delta$, so ergibt die Addition

$$\rho c_p \left(\frac{\partial u(T - T_\delta)}{\partial x} + \frac{\partial v(T - T_\delta)}{\partial y} \right) = \lambda \frac{\partial^2 (T - T_\delta)}{\partial y^2}. \quad (4.45)$$

Nach partieller Integration über y folgt die Integralbedingung für die Energie, auch Wärmestromgleichung der Temperaturgrenzschicht genannt:

$$\rho c_p \frac{d}{dx} \left[\int_0^{\delta_T} u(T - T_\delta) dy \right] = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_w = q_w. \quad (4.46)$$

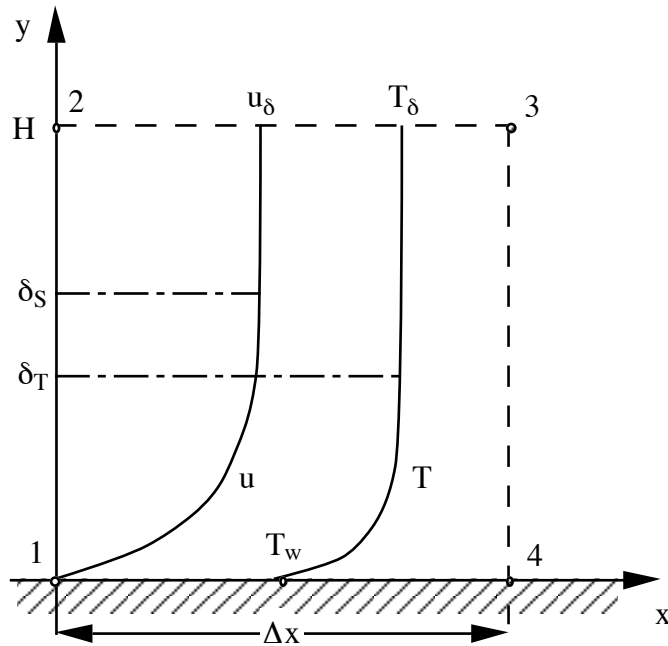


Bild 4.4: Kontrollvolumen zur Herleitung der Integralbedingung für die Energie

Die obere Integrationsgrenze ist die Dicke der Temperaturgrenzschicht, da für $y > \delta_T$ der Integrand verschwindet.

Die Integralbedingung für die Energie läßt sich auch in einfacher Weise durch eine Energiebilanz an dem in Bild 4.4 skizzierten Kontrollvolumen gewinnen. Es ist $\delta_S > \delta_T$ eingezeichnet, d. h. $Pr > 1$. Der durch die Kontrollflächen strömende resultierende Enthalpiestrom ist gleich der dem Kontrollvolumen zugeführten Wärme

$$\frac{d}{dx} \left[\int_0^H \rho u c_p T dy \right] dx + \rho v_\delta c_p T_\delta dx = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_w dx . \quad (4.47)$$

Der erste Term ist die Differenz zwischen dem durch 3–4 ausströmenden und dem durch 1–2 einströmenden Enthalpiestrom. Der zweite Term ist der durch 2–3 tretende Enthalpiestrom. Mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung ist

$$\rho v_\delta dx = -\frac{d}{dx} \left[\int_0^H \rho u dy \right] dx . \quad (4.48)$$

Oben eingesetzt erhält man Gl. (4.46). Der Term auf der rechten Seite ist der durch die Wand hindurch tretende Enthalpiestrom.

Die Integralbedingung ist die Basis für Näherungslösungen nach Art des von Kármán-Pohlhausen-Verfahrens. Wir werden zwei Lösungen für eine ebene Platte mit $dp_\delta/dx = 0$ besprechen, da wir unterscheiden müssen, ob die Prandtl-Zahl größer oder kleiner als eins ist.

Das Temperaturprofil sei durch

$$\theta(x, y) = \frac{T(x, y) - T_w}{T_\infty - T_w} \quad (4.49)$$

dimensionslos gemacht; es werde durch ein P3-Polynom

$$\theta(x, y) = a + by + cy^2 + dy^3 \quad (4.50)$$

dargestellt. Die vier Koeffizienten folgen aus den Randbedingungen

$$\begin{aligned} y = 0 : \quad & \theta = 0, \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0, \\ y = \delta_T : \quad & \theta = 1, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Die Randbedingung $(\partial^2 \theta / \partial y^2)_w = 0$ folgt direkt aus der Energiegleichung (4.28)₃, wenn diese an der Wand ($u = v = 0$) angeschrieben wird. Damit wird

$$\theta(x, y) = \frac{3}{2} \left(\frac{y}{\delta_T} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta_T} \right)^3. \quad (4.52)$$

Für das Geschwindigkeitsprofil wird ebenfalls ein P3-Polynom gewählt; es ergibt sich die analoge Beziehung

$$\frac{u(x, y)}{u_\infty} = \frac{3}{2} \left(\frac{y}{\delta_S} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta_S} \right)^3. \quad (4.53)$$

Mit beiden Ansätzen kann die Integralbedingung (4.46), die mit θ anstelle von T geschrieben

$$\frac{d}{dx} \left[\int_0^H u(1 - \theta) dy \right] = a \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)_w \quad (4.54)$$

lautet, ausgewertet werden. An dieser Stelle machen wir zur Vereinfachung die Voraussetzung $Pr > 1$; dafür ist $\delta_T < \delta_S$. Es folgt

$$\frac{d}{dx} \left[\delta_S \left(\frac{3}{20} \Delta^2 - \frac{3}{280} \Delta^4 \right) \right] = \frac{3a}{2\delta_S \Delta u_\infty}. \quad (4.55)$$

Darin ist mit

$$\Delta(x) = \frac{\delta_T(x)}{\delta_S(x)} \quad (4.56)$$

als Verhältnis von Temperatur- zu Strömungsgrenzschichtdicke eine neue Variable eingeführt worden. Wegen $\Delta < 1$ ist $\Delta^4 \ll \Delta^2$ und Gl.(4.55) geht näherungsweise über in

$$\delta_S \Delta \frac{d}{dx} (\delta_S \Delta^2) = \frac{10a}{u_\infty}. \quad (4.57)$$

Ausdifferenziert folgt

$$2\delta_S^2 \Delta^2 \frac{d\Delta}{dx} + \Delta^3 \delta_S \frac{d\delta_S}{dx} = \frac{2}{3} \delta_S^2 \frac{d\Delta^3}{dx} + \Delta^3 \delta_S \frac{d\delta_S}{dx} = \frac{10a}{u_\infty}. \quad (4.58)$$

Aus der zu Gl. (4.54) analogen Integralgleichung für den Impuls ergibt sich δ_S . Man kann dies auch unmittelbar aus Gl. (4.55) herleiten, indem man $\Delta = 1$ setzt und a durch ν ersetzt. Nach Integration folgt

$$\delta_S^2 = \frac{280}{13} \frac{\nu x}{u_\infty} \quad \text{bzw.} \quad \delta_S \frac{d\delta_S}{dx} = \frac{140}{13} \frac{\nu}{u_\infty}. \quad (4.59)$$

Dies eingesetzt in Gl. (4.58) führt auf eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung für Δ^3 :

$$\frac{4}{3} x \frac{d\Delta^3}{dx} + \Delta^3 = \frac{13}{14 \text{Pr}}. \quad (4.60)$$

Sie hat die allgemeine Lösung

$$\Delta^3(x) = Cx^{-3/4} + \frac{13}{14 \text{Pr}}. \quad (4.61)$$

Wir wollen den Fall betrachten, daß die Temperatur der Platte bis zur Stelle $x = x_0$ gleich der Außentemperatur T_∞ ist. Danach soll die Kühlung (oder Heizung) der Wand einsetzen. Die Integrationskonstante C folgt dann aus der Bedingung $\delta_T = 0$ für $x = x_0$, was gleichbedeutend mit $\Delta(x = x_0) = 0$ ist.

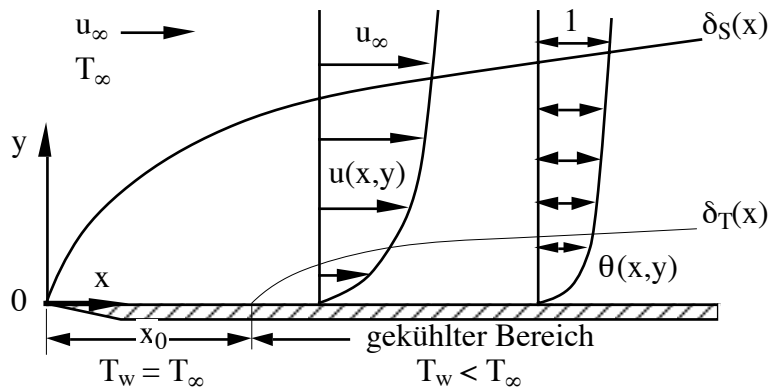


Bild 4.5: Ebene Plattenströmung mit Kühlung

Es folgt die Lösung

$$\Delta^3(x) = \frac{13}{14} \text{Pr}^{-1} \left[1 - \left(\frac{x_0}{x} \right)^{3/4} \right]. \quad (4.62)$$

Wird mit der Kühlung (oder Heizung) an der Vorderkante begonnen, so folgt

$$\Delta(x) = \frac{\delta_T(x)}{\delta_S(x)} = \left(\frac{13}{14} \right)^{1/3} \text{Pr}^{-1/3} = \frac{0,975}{\text{Pr}^{1/3}}. \quad (4.63)$$

Dieses Ergebnis ist bemerkenswert; für Fluide mit Prandtl-Zahlen größer eins ist das Verhältnis $\delta_T/\delta_S \sim \text{Pr}^{-1/3}$, während die Grenzschichtabschätzung die Proportionalität $\delta_T/\delta_S \sim \text{Pr}^{-1/2}$ ergab, Gl. (4.26). Letzteres ist bei kleinen Prandtl-Zahlen jedoch erfüllt, wie wir weiter unten sehen werden. Für $\text{Pr} = 1$ folgt aus Gl. (4.63) nicht exakt $\delta_T = \delta_S$. Dies liegt an dem Fehler, der beim Übergang von Gl. (4.55) nach Gl. (4.57) gemacht wurde.

Setzen wir $\delta_S(x)$ nach Gl. (4.59) ein, so folgt

$$\frac{\delta_T(x)}{x} = \frac{4,51}{\text{Re}_x^{1/2} \text{Pr}^{1/3}}, \quad \text{Re}_x = \frac{u_\infty x}{\nu}. \quad (4.64)$$

Abschließend interessiert der Wärmeübergang

$$q_w = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_w = \lambda (T_w - T_\infty) \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)_w. \quad (4.65)$$

Nach dem Ansatz (4.51) ist

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)_w = \frac{3}{2\delta_T} \quad (4.66)$$

und der Wärmeübergangskoeffizient α wird

$$\alpha(x) = \frac{q_w}{T_w - T_\infty} = \lambda \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)_w = \frac{3}{2} \frac{\lambda}{\delta_T(x)}. \quad (4.67)$$

Führen wir $\delta_T(x)$ nach Gl. (4.64) ein, so folgt für die örtliche Nusselt-Zahl

$$\text{Nu}_x = \frac{\alpha x}{\lambda} = 0,331 \text{Re}_x^{1/2} \text{Pr}^{1/3}. \quad (4.68)$$

Man vergleiche dies mit Gl. (4.41) für den Fall $\text{Pr} = 1$. Der Fehler gegenüber dem genauen Wert 0,332 ist bemerkenswert gering. In Abschnitt 4.3 werden wir die exakte Lösung für beliebige Prandtl-Zahlen kennenlernen und die Beziehung (4.68) bestätigt sehen.

Es muß daran erinnert werden, daß zu Beginn der Herleitung die Voraussetzung $\text{Pr} > 1$ gemacht wurde. Die Beziehung (4.68) ist jedoch auch noch für $\text{Pr} \approx 0,7$ (Luft) gültig, wie Abschnitt 4.3 zeigen wird.

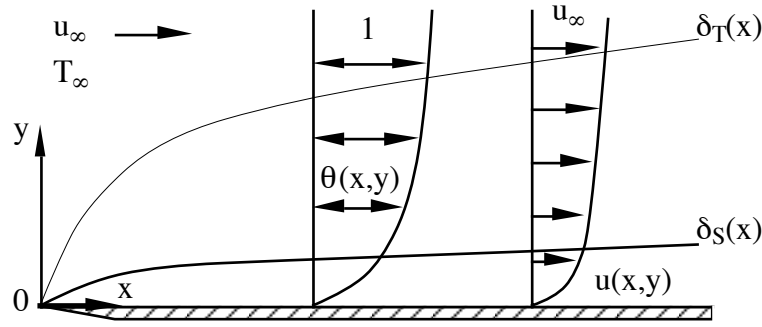


Bild 4.6: Ebene Plattenströmung mit Kühlung bei flüssigen Metallen ($\delta_S \ll \delta_T$)

Für flüssige Metalle mit $Pr \ll 1$ müssen getrennte Überlegungen angestellt werden, denen wir uns nunmehr zuwenden. Bild 4.6 zeigt die veränderten Verhältnisse, es ist $\delta_S \ll \delta_T$.

Die Integralbedingung (4.54) kann für $\delta_S \ll \delta_T$ unter der Annahme $u(x,y) = u_\infty$ ausgewertet werden, da die Geschwindigkeit u über den größten Teil der Temperaturgrenzschicht konstant ist. Es wird der Ansatz (4.52) für das Temperaturprofil verwendet und Gl. (4.54) geht über in

$$\frac{d}{dx} \left(u_\infty \int_0^{\delta_T} \left[1 - \frac{3}{2} \frac{y}{\delta_T} + \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta_T} \right)^3 \right] dy \right) = \frac{3a}{2\delta_t} . \quad (4.69)$$

Nach Integration folgt eine gewöhnliche Differentialgleichung für $\delta_T(x)$

$$2\delta_T d\delta_T = d\delta_T^2 = \frac{8a}{u_\infty} dx . \quad (4.70)$$

Mit der Anfangsbedingung $\delta_T = 0$ für $x = 0$ folgt für die Dicke der Temperaturgrenzschicht die Lösung

$$\delta_T(x) = \sqrt{\frac{8ax}{u_\infty}} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\delta_T(x)}{x} = \frac{2,81}{Re_x^{1/2} Pr^{1/2}} . \quad (4.71)$$

Man vergleiche dies mit Gl. (4.64), der Exponent der Prandtl-Zahl ist $-1/2$ an Stelle von $-1/3$ für $Pr > 1$. Setzen wir $\delta_T(x)$ in den Wärmeübergangskoeffizienten (4.67)

$$\alpha(x) = \frac{q_w}{T_w - T_\infty} = \lambda \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)_w = \frac{3}{2} \frac{\lambda}{\delta_T(x)} \quad (4.72)$$

ein, so erhalten wir für die örtliche Nusselt-Zahl

$$Nu_x = \frac{\alpha x}{\lambda} = 0,530 Re_x^{1/2} Pr^{1/2} . \quad (4.73)$$

Man vergleiche dies mit Gl. (4.68) für $Pr > 1$; der Exponent in der Prandtl-Zahl ist $1/2$ an Stelle von $1/3$, weiterhin hat die Konstante einen anderen Wert. Auch Gl. (4.73) wird

durch die exakte Lösung, die wir im nächsten Abschnitt besprechen werden, bestätigt. Die Konstante hat für den Grenzfall $\text{Pr} \rightarrow 0$ den exakten Wert 0,564 an Stelle von 0,530. Auch hier ist der Fehler bemerkenswert gering.

Für das Verhältnis der Grenzschichtdicken folgt mit Gl. (4.71) und Gl. (4.59)

$$\frac{\delta_T(x)}{\delta_S(x)} = \sqrt{\frac{26}{70}} \text{Pr}^{-1/2} = 0,61 \text{Pr}^{-1/2} . \quad (4.74)$$

Die Proportionalität, die die Grenzschichtabschätzung mit Gl. (4.26) ergab, finden wir für $\text{Pr} \ll 1$ bestätigt.

4.3 Ähnliche Lösungen

In Abschnitt 2.2 hatten wir besprochen, daß für Strömungen vom Typ $u_\delta(x) \sim x^m$, den sogenannten Keilströmungen, ähnliche Lösungen der Strömungsgrenzschicht existieren. Der Exponent m bzw. der Keilwinkel β , Bild 2.7, ist ein Parameter der Lösungskurven für die Geschwindigkeitsprofile, Bild 2.8.

In analoger Weise gibt es ähnliche Lösungen der Energiegleichung

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} , \quad (4.75)$$

wenn sich die Wandtemperatur in bestimmter Art mit der Lauflänge x ändert:

$$T_w(x) - T_\delta = Kx^\gamma . \quad (4.76)$$

Auch für variable Außengeschwindigkeiten $u_\delta(x)$ ist $T_\delta = \text{konstant} = T_\infty$, da in einer inkompressiblen Strömung ($\text{Ma} \rightarrow 0$) die kinetische Energie nicht in innere Energie umgewandelt werden kann. Die Temperatur wird durch

$$\theta(x, y) = \frac{T(x, y) - T_\infty}{T_w(x) - T_\infty} \quad (4.77)$$

dimensionslos gemacht. Weiter führen wir die in Abschnitt 2.2 beschriebene Ähnlichkeits-transformation ein:

$$\eta(x, y) = y \sqrt{\frac{u_\delta}{\nu x}} , \quad f(\eta) = \frac{\psi}{\sqrt{u_\delta \nu x}} . \quad (4.78)$$

Dabei ist $f(\eta) = \int_0^\eta (u/u_\delta) d\eta$ die dimensionslose Stromfunktion. Schreibt man die Energiegleichung (4.75) auf die Ähnlichkeitskoordinaten um, so folgt eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung für das Temperaturprofil:

$$\theta'' + \frac{m+1}{2} \text{Pr} f \theta' - \gamma \text{Pr} f' \theta = 0 , \quad ' = d/d\eta . \quad (4.79)$$

Die Variable x tritt explizit nicht mehr auf. Das Geschwindigkeitsprofil $f' = u/u_\delta$ sowie die dimensionslose Stromfunktion f sind durch die Hartree-Lösungen bekannt, Abschnitt 2.2. Die Randbedingungen lauten:

$$\begin{aligned} \eta = 0 : & \quad \theta = 1 , \\ \eta \rightarrow \infty : & \quad \theta = 0 . \end{aligned} \quad (4.80)$$

Das dimensionslose Temperaturprofil hängt von drei Parametern ab:

- der Prandtl-Zahl Pr ,
- dem Parameter m bzw. β , der die Variation der Außengeschwindigkeit $u_\delta(x)$ beschreibt, und
- dem Parameter γ , der die Variation der Wandtemperatur $T_w(x)$ beschreibt.

Gleichung (4.79) ist von verschiedenen Autoren für unterschiedliche Parameterkombinationen numerisch gelöst worden. Als erster hat Pohlhausen 1921 den Sonderfall der ebenen Platte ($m = 0$) mit konstanter Wandtemperatur ($\gamma = 0$) behandelt; Gl. (4.79) geht dafür über in

$$\theta'' + \frac{1}{2}\text{Pr}f\theta' = 0, \quad (4.81)$$

wobei f aus Gl. (2.33)

$$f''' + \frac{1}{2}ff'' = 0 \quad (4.82)$$

folgt. Somit kann man schreiben

$$\frac{\theta''}{\theta'} = \text{Pr} \frac{f'''}{f''}, \quad \text{d. h.} \quad \frac{d \ln \theta'}{d\eta} = \text{Pr} \frac{d \ln f''}{d\eta}. \quad (4.83)$$

Nach Integration ergibt sich mit den Randbedingungen die formale Lösung

$$\theta = 1 - \frac{\int_0^\eta (f'')^{\text{Pr}} d\eta}{\int_0^\infty (f'')^{\text{Pr}} d\eta} = \theta(\eta, \text{Pr}). \quad (4.84)$$

Mit der aus der Lösung der Blasius-Gleichung (2.40) bekannten Funktion $f''(\eta)$ kann Gl. (4.84) numerisch gelöst werden.

Die folgenden drei Bilder aus dem Buch von Eckert und Drake zeigen das Temperaturprofil für die verschiedenen Fälle, wobei jeweils zwei Parameter konstant bleiben und der dritte variiert wird. Die Ähnlichkeitskoordinate η ist dabei mit $\sqrt{(m+1)/2}$ multipliziert worden.

Bild 4.7 (a) zeigt den Einfluß der Prandtl-Zahl auf das Temperaturprofil für die ebene Platte mit konstanter Wandtemperatur, also die Lösung (4.84) nach Pohlhausen. Man sieht sehr deutlich den starken Einfluß der Prandtl-Zahl auf die Dicke der Temperaturgrenzschicht. Für $\text{Pr} = 1$ sind das Temperatur- und das Geschwindigkeitsprofil identisch, man vergleiche die entsprechenden Kurven in Bild 4.7 (a) und Bild 2.3 miteinander.

Bild 4.7 (b) zeigt für zwei verschiedene Prandtl-Zahlen sowie konstante Wandtemperatur, daß der Einfluß der veränderlichen Außengeschwindigkeit nicht sehr groß ist.

Bild 4.7 (c) zeigt für die Luftströmung ($\text{Pr} = 0,7$) entlang einer ebenen Platte, in welcher Weise sich das Temperaturprofil bei veränderlicher Wandtemperatur $T_w(x)$ verhält. Für $\gamma = -0,5$ werden der Temperaturgradient an der Wand und damit der Wandwärmestrom null, obwohl eine Differenz zwischen Wand- und Außentemperatur vorliegt.

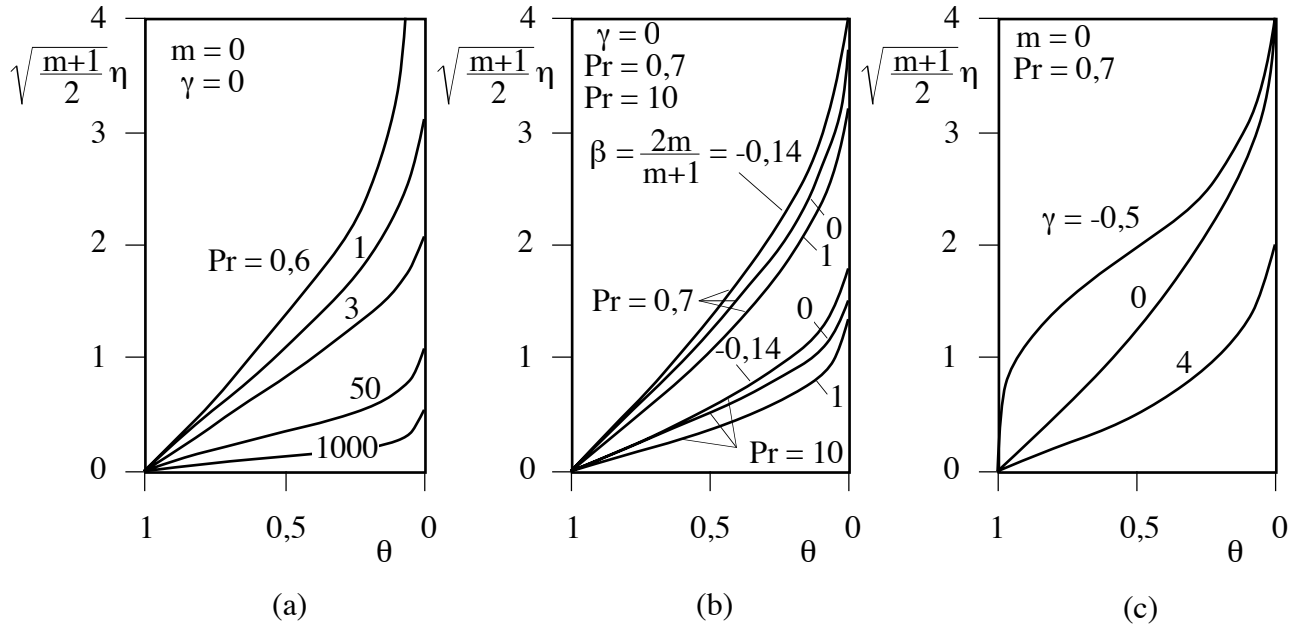


Bild 4.7: Ähnliche Lösungen der Energiegleichung der Grenzschicht

Um dies diskutieren zu können, müssen wir zwei Fälle unterscheiden:

1. Heizung der Wand, $T_w > T_\delta$:
Für $\gamma > 0$ nimmt T_w mit x zu, für $\gamma < 0$ nimmt T_w ab.
2. Kühlung der Wand, $T_w < T_\delta$:
Für $\gamma > 0$ nimmt T_w mit x ab, für $\gamma < 0$ nimmt T_w zu.

Betrachten wir den Fall der Heizung, so nimmt für $\gamma < 0$ die Wandtemperatur in x -Richtung ab. In Wandnähe strömen die Fluidteilchen stets aus Gebieten höherer Temperatur in Bereiche niedriger Temperatur. Sie tragen daher eine größere Energie als deren Umgebung und schützen somit die Wand vor den kälteren Fluidteilchen der Außenbereiche. Für Werte $\gamma < -0,5$ hat das Temperaturprofil in Wandnähe ein Extremum und Wärme fließt zur Wand hin, obwohl $T_w > T_\delta$ ist. Der Wärmeübergang folgt aus

$$q_w = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_w = -\lambda(T_w - T) \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)_w = -\lambda(T_w - T) \sqrt{\frac{u_\delta}{\nu x}} \left(\frac{d\theta}{d\eta} \right)_w, \quad (4.85)$$

d. h.
$$\alpha = \frac{q_w}{(T_w - T_\delta)} = -\lambda \sqrt{\frac{u_\delta}{\nu x}} \left(\frac{d\theta}{d\eta} \right)_w$$

nach Einsetzen in die Nusselt-Zahl zu

$$\text{Nu}_x = \frac{\alpha x}{\lambda} = -\sqrt{\text{Re}_x} \left(\frac{d\theta}{d\eta} \right)_w \quad \text{bzw.} \quad \frac{\text{Nu}_x}{\text{Re}_x^{1/2}} = - \left(\frac{d\theta}{d\eta} \right)_w = f(\text{Pr}, m, \gamma). \quad (4.86)$$

Die dimensionslose Wandtangente $(d\theta/d\eta)_w$ ist durch die numerische Lösung als Funktion von Pr , m und γ gegeben. Es lassen sich analog zu Bild 4.7 verschiedene Diagramme erstellen, siehe Eckert und Drake. Hier sei mit Bild 4.8 nur das Resultat für die ebene

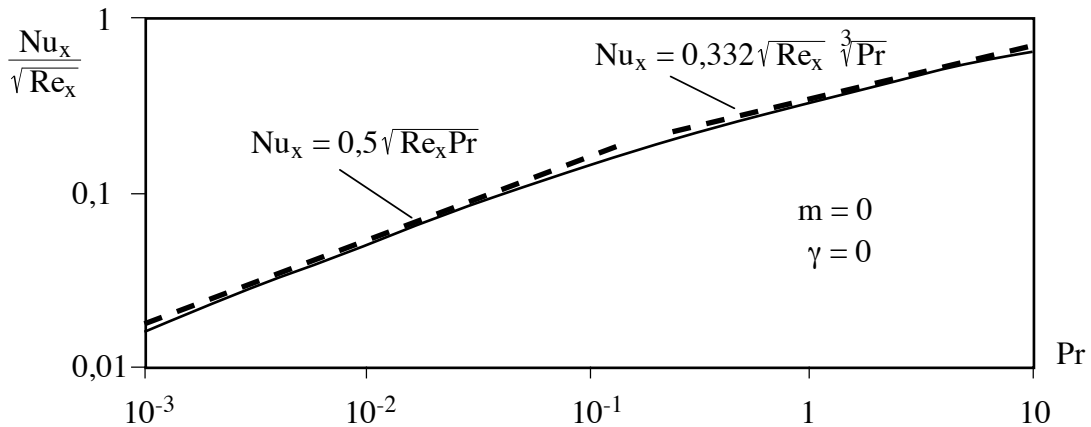


Bild 4.8: Die Nusselt-Zahl als Funktion der Prandtl-Zahl für die Strömung entlang einer ebenen Platte mit konstanter Wandtemperatur

Platte ($m = 0$) mit konstanter Wandtemperatur ($\gamma = 0$) korrespondierend zu Bild 4.7 (a) gezeigt.

Durch Differentiation von Gl. (4.84) ergibt sich die dimensionslose Wandtangente

$$-\left(\frac{d\theta}{d\eta}\right)_w = \frac{0,332\text{Pr}}{\int_0^\infty (f'')\text{Pr} d\eta} = a_1(\text{Pr}) \quad \text{mit} \quad f''(0) = 0,332. \quad (4.87)$$

Man sieht anhand von Bild 4.8, daß die Steigung der Kurve ihrerseits von der Prandtl-Zahl abhängt. Man kann den Zusammenhang $a_1(\text{Pr})$ folgendermaßen approximieren:

$$-\left(\frac{d\theta}{d\eta}\right)_w = a_1(\text{Pr}) = \begin{cases} 0,564 \text{Pr}^{1/2} & \text{für } \text{Pr} \rightarrow 0 \\ 0,500 \text{Pr}^{1/2} & \text{für } 0,005 < \text{Pr} < 0,05 \\ 0,332 \text{Pr}^{1/3} & \text{für } 0,6 < \text{Pr} < 10 \\ 0,339 \text{Pr}^{1/3} & \text{für } \text{Pr} \rightarrow \infty \end{cases} \quad (4.88)$$

Für Prandtl-Zahlen um eins ist

$$-\left(\frac{d\theta}{d\eta}\right)_w = a_1(\text{Pr}) = 0,332 \text{Pr}^{0,343} \quad (4.89)$$

eine genauere Approximation. Der Einfachheit halber wird 0,343 durch 1/3 ersetzt.

Damit können folgende Beziehungen für den Wärmeübergang an der ebenen Platte mit konstanter Wandtemperatur angegeben werden:

$$\begin{aligned} \text{Nu}_x &= 0,564 \text{Re}_x^{1/2} \text{Pr}^{1/2} = 0,564 \text{Pe}_x^{1/2} & \text{für} & \quad \text{Pr} \rightarrow 0 \\ \text{Nu}_x &= 0,500 \text{Re}_x^{1/2} \text{Pr}^{1/2} = 0,500 \text{Pe}_x^{1/2} & \text{für} & \quad 0,005 < \text{Pr} < 0,05 \\ \text{Nu}_x &= 0,332 \text{Re}_x^{1/2} \text{Pr}^{1/3} & \text{für} & \quad 0,6 < \text{Pr} < 10 \\ \text{Nu}_x &= 0,339 \text{Re}_x^{1/2} \text{Pr}^{1/3} & \text{für} & \quad \text{Pr} \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (4.90)$$

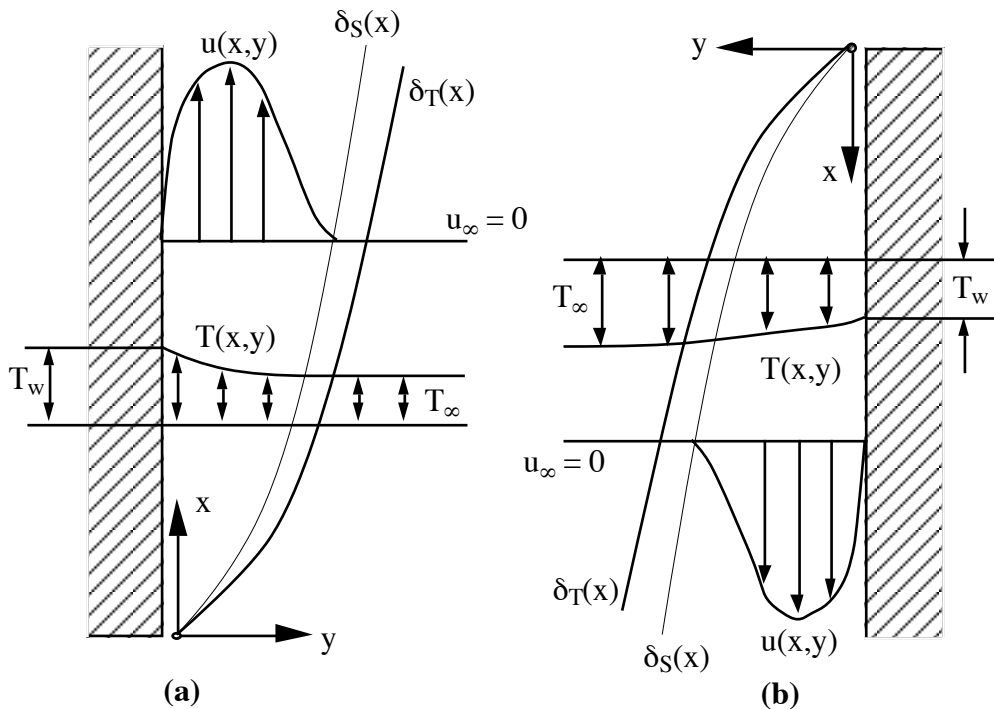


Bild 4.9: Koordinatensystem für die Grenzschicht-Gleichungen bei freier Konvektion an einer senkrechten Platte; (a) geheizte Wand, (b) gekühlte Wand

Die bei praktischen Anwendungen wichtigen (Näherungs-)Beziehungen für flüssige Metalle sowie für Gase und Flüssigkeiten sind in Bild 4.8 gestrichelt eingezeichnet.

Die exakten Lösungen bestätigen die mit der Integralbedingung gewonnenen Näherungsbeziehungen (4.68) für $Pr > 1$ sowie (4.72) für $Pr \ll 1$ in hervorragender Weise. Die Abhängigkeit der Nusselt-Zahl wird von der Integralmethode korrekt beschrieben, der Fehler in der Konstanten ist gering. Das ist gleichzeitig eine Bestätigung der Beziehungen (4.63) und (4.74), die für das Verhältnis $\delta_T/\delta_S \sim Pr^n$ den Exponenten $n = -1/3$ für $Pr > 1$ und $n = -1/2$ für $Pr \ll 1$ vorhersagen. Der Exponent $n = -1/3$ gilt näherungsweise auch bei allen Gasen, d. h. für $0,6 < Pr < 1$.

4.4 Die Grenzschicht-Gleichungen bei freier Konvektion

Bei der freien oder natürlichen Konvektion wird das Strömungsfeld durch Auftriebskräfte hervorgerufen. Diese haben ihre Ursache in Dichteunterschieden, die auf Temperaturunterschieden beruhen. In Bild 4.9 ist das verwendete Koordinatensystem am Beispiel einer senkrechten Platte dargestellt; die sich einstellenden Profile sind gleichfalls skizziert.

Die Volumenkraft ρg_j in der Impulsgleichung (4.2) stellt die Auftriebskraft dar. Bei mäßigen Temperaturen wird die Dichte in dem System der Bilanzgleichungen (4.1)–(4.3) als konstant angenommen, eine Ausnahme bildet die Dichte in dem Auftriebsglied, man bezeichnet dies als Boussinesq-Approximation. Mit dieser Annahme kann das Gleichungssystem (4.28) ergänzt durch das Auftriebsglied, wobei auf Grund der Wahl des Koordinatensystems bei der beheizten Wand $g_x = -g$ ist, übernommen werden. Es ist zu beachten,

daß bei gekühlter Wand $g_x = +g$ einzusetzen ist, da die x -Koordinate umgekehrt orientiert ist

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \\ \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= -\rho g - \frac{dp}{dx} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ \rho c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) &= \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}.\end{aligned}\quad (4.91)$$

Der Druckgradient in Strömungsrichtung ist nicht null, obwohl am Außenrand der Grenzschicht $u_\infty = 0$ ist. Er hängt nicht wie bei erzwungener Konvektion mit dem Geschwindigkeitsgradienten der Außenströmung sondern mit der Volumenkraft am Außenrand der Grenzschicht zusammen. Schreiben wir Gl. (4.91)₂ am Außenrand an, so folgt der Zusammenhang

$$\frac{dp}{dx} = -\rho_\infty g. \quad (4.92)$$

Damit ist

$$-\rho g - \frac{dp}{dx} = (\rho_\infty - \rho)g. \quad (4.93)$$

Die Dichteänderung infolge Temperaturänderungen wird durch den thermischen Ausdehnungskoeffizienten

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \quad (4.94)$$

beschrieben. Für ein ideales Gas ist $\beta = 1/T$, für reale Gase ist $\beta T = f(T, p) > 1$ und bei Flüssigkeiten kleiner eins. Für endliche Differenzen kann näherungsweise

$$\Delta \rho = -\rho \beta \Delta t \quad \text{bzw.} \quad \rho_\infty - \rho = -\beta \rho (T_\infty - T) \quad (4.95)$$

geschrieben werden. Damit geht Gl. (4.93) über in

$$-\rho g - \frac{dp}{dx} = -g \beta \rho (T_\infty - T). \quad (4.96)$$

Eingesetzt in die Impulsgleichung lauten die Grenzschicht-Gleichungen für freie Konvektionsströmungen an senkrechten, ebenen Wänden

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= g \beta (T - T_\infty) + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} &= a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}.\end{aligned}\quad (4.97)$$

Ein charakteristischer Unterschied gegenüber inkompressiblen Strömungen bei erzwungener Konvektion liegt darin, daß die Energie- und die Impulsgleichung über die Temperatur im Auftriebsglied gekoppelt sind. Die Temperaturverteilung erzeugt die Geschwindigkeitsverteilung.

Um die bei freier Konvektion entscheidende Kennzahl zu gewinnen, wird das Gleichungssystem durch Einführung der Variablen

$$u^* = \frac{u}{u_0}, \quad v^* = \frac{v}{u_0}, \quad x^* = \frac{x}{L}, \quad y^* = \frac{y}{L}, \quad \theta = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty} \quad (4.98)$$

dimensionslos gemacht. Dabei ist L eine charakteristische Länge, u_0 ist eine charakteristische Geschwindigkeit (es kann nicht u_∞ wegen $u_\infty = 0$ gewählt werden). Das Gleichungssystem (4.97) geht über in

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} &= 0, \\ u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} &= \frac{g\beta(T_w - T_\infty)L}{u_0^2} \theta + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}, \\ u^* \frac{\partial \theta}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial \theta}{\partial y^*} &= \frac{1}{\text{RePr}} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^{*2}}. \end{aligned} \quad (4.99)$$

Dabei sind die durch die Gln. (4.12) und (4.18) definierte Reynolds- und Prandtl-Zahl

$$\text{Re} = \frac{u_0 L}{\nu}, \quad \text{Pr} = \frac{\nu}{a} = \frac{\mu c_p}{\lambda} \quad (4.100)$$

eingeführt. Daneben gibt es einen weiteren dimensionslosen Ausdruck in der Impulsgleichung

$$\frac{g\beta(T_w - T_\infty)L}{u_0^2} = \frac{g\beta L^3(T_w - T_\infty)}{\nu^2} \left(\frac{\nu}{u_0 L} \right)^2 = \frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2} = \text{Ar}. \quad (4.101)$$

Dies ist die Definition der Grashof-Zahl

$$\text{Gr} = \frac{g\beta L^3(T_w - T_\infty)}{\nu^2}. \quad (4.102)$$

Die dimensionslose Gruppe nach Gl. (4.101) ist das Verhältnis von Auftriebskraft zu Trägheitskraft und wird als Archimedes-Zahl bezeichnet. Die Grashof-Zahl stellt das Verhältnis von Auftriebskraft zu Reibungskraft dar. Sie tritt bei der freien Konvektion an die Stelle der Reynolds-Zahl. Mitunter wird statt der Grashof-Zahl die Rayleigh-Zahl Ra oder die Froude-Zahl Fr

$$\text{Ra} = \text{GrPr} = \frac{g\beta L^3(T_w - T_\infty)}{\nu a}, \quad \text{Fr} = \frac{u_0^2}{gL} \quad (4.103)$$

verwendet. Die Rayleigh-Zahl spielt bei Fragen der thermischen Stabilität eine bevorzugte Rolle.

Es gibt einige wenige Fälle, in denen die erzwungene und die freie Konvektion gleichzeitig von Bedeutung sind. Das ist für $\text{Ar} = \text{Gr}/\text{Re}^2 = \text{O}(1)$ der Fall. Bei erzwungener Konvektion ist jedoch meist $\text{Re} \gg 1$ und die Auftriebskräfte sind vernachlässigbar ($\text{Ar} \ll 1$). Da es sich stets um Strömungen mit niedriger Geschwindigkeit handelt, spielt die Mach-Zahl keine Rolle.

Wenn $u_\infty = 0$ ist, d. h. es liegt freie Konvektion vor, kann man die charakteristische Geschwindigkeit u_0 so wählen, daß die Archimedes-Zahl gleich eins ist

$$\text{Ar} = 1, \quad \text{d. h.} \quad u_0 = \left(\beta(T_w - T_\infty)gL \right)^{1/2}. \quad (4.104)$$

Für die charakteristische Länge wird vielfach die Plattenlänge verwendet. Man kann aber auch die Länge L so festlegen, daß die Reynolds-Zahl und damit auch die Grashof-Zahl gleich eins wird

$$\text{Re} = \text{Gr} = 1, \quad \text{d. h.} \quad L = \left(\frac{\nu^2}{g\beta(T_w - T_\infty)} \right)^{1/3} \quad (4.105)$$

sowie

$$u_0 = \left(\beta(T_w - T_\infty)g\nu \right)^{1/3}. \quad (4.106)$$

Letztere Wahl für die charakteristische Länge hat den Vorteil, daß in den Gln. (4.99) nur noch die Prandtl-Zahl auftaucht. Die im nächsten Abschnitt verwendete, mit der Lauflänge x gebildete Grashof-Zahl

$$\text{Gr}_x = \frac{g\beta x^3(T_w - T_\infty)}{\nu^2} \quad (4.107)$$

charakterisiert dann die dimensionslose Länge x/L

$$\text{Gr}_x = \left(\frac{x}{L} \right)^3, \quad L = \left(\frac{\nu^2}{g\beta(T_w - T_\infty)} \right)^{1/3}. \quad (4.108)$$

Zu Beginn ist bei der Vorzeichenwahl das Koordinatensystem nach Bild 4.9 (a) und damit $g_x = -g$ zu Grunde gelegt worden. Gl. (4.97)₂ gilt in gleicher Weise für eine gekühlte Wand, sofern das Koordinatensystem nach Bild 4.9 (b) gewählt wird. Im Fall $T_w > T_\infty$ wirkt g in negativer x -Richtung, das Produkt $g\beta(T - T_\infty)$ ist negativ; im Fall $T_w < T_\infty$ ist das Produkt gleichfalls negativ, da $(T - T_\infty) < 0$ ist und g in positiver x -Richtung wirkt.

4.5 Freie Konvektionsströmung an der senkrechten Platte

4.5.1 Exakte Lösung

Im Jahr 1930 haben Schmidt und Beckmann die Geschwindigkeits- und Temperaturverteilung an einer senkrechten beheizten Platte in Luft für verschiedene Lauflängen experimentell ermittelt. Sowohl die Geschwindigkeits- als auch die Temperaturprofile sind ähnlich, sie lassen sich durch eine geeignete Koordinatentransformation zur Deckung bringen. Darauf hat Pohlhausen schon 1921 hingewiesen. Das bedeutet, daß sich das Gleichungssystem (4.97) in zwei gewöhnliche Differentialgleichungen für die Geschwindigkeits- und die Temperaturverteilung transformieren läßt. Das Vorgehen ähnelt dem in Kapitel 2, wo wir anhand der Blasius-Lösung eine analoge Ähnlichkeitstransformation ausführlich diskutiert haben.

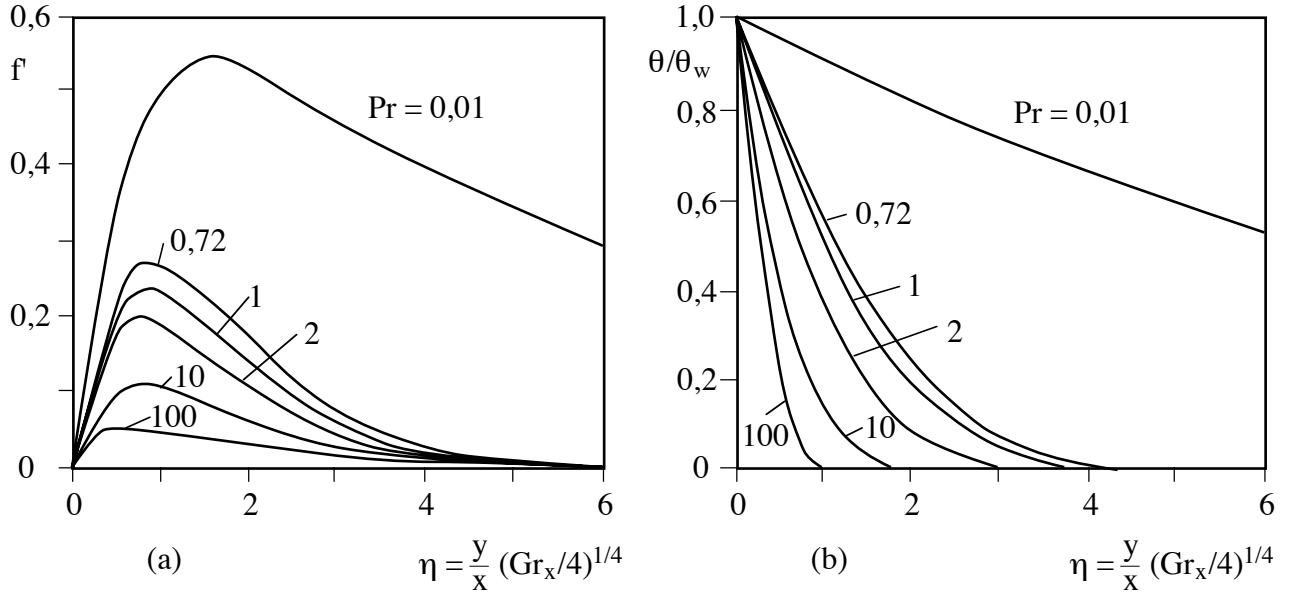


Bild 4.10: Geschwindigkeits- (a) und Temperaturverteilung (b) an einer senkrechten beheizten ebenen Platte nach Pohlhausen und Ostrach ($T_w = \text{konstant}$)

Zunächst wird durch Einführen der Stromfunktion ψ , d. h. $u = \partial\psi/\partial y$ und $v = -\partial\psi/\partial x$, die v -Komponente eliminiert. Mit der Transformation

$$\eta(x, y) = C \frac{y}{x^{1/4}}, \quad f(\eta) = \frac{\psi}{4\nu C x^{3/4}}, \quad C = \left(\frac{g\beta(T_w - T_\infty)}{4\nu^2} \right)^{1/4} \sim [m^{-3/4}] \quad (4.109)$$

lassen sich die Impulsgleichung (4.97)₂ und die Energiegleichung (4.97)₃ in

$$\begin{aligned} f''' + 3ff'' - 2f' + \theta &= 0, & ' &= d/d\eta \\ \theta'' + 3\text{Pr}f\theta' &= 0, & \theta &= \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty} \end{aligned} \quad (4.110)$$

überführen. Durch die Wahl der charakteristischen Länge und Geschwindigkeit tritt nur die Prandtl-Zahl als Parameter auf. Durch die Ähnlichkeitstransformation ist die Längsordinate x eliminiert worden, die Profile sind ähnlich. Die Randbedingungen lauten für den Fall konstanter Wandtemperatur:

$$\begin{aligned} y = 0 : & \quad u = v = 0, \quad T = T_w \quad \text{bzw.} \quad \frac{df}{d\eta} = 0, \quad \theta = 1 \quad \text{für} \quad \eta = 0 \\ y \rightarrow \infty : & \quad u = v = 0, \quad T = T_\infty \quad \text{bzw.} \quad \frac{df}{d\eta} = 0, \quad \theta = 0 \quad \text{für} \quad \eta \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (4.111)$$

Die erste numerische Lösung ist von Pohlhausen für $\text{Pr} = 0,733$ (Luft) durchgeführt worden. Die Rechnungen stimmen mit den Messungen von Schmidt und Beckmann sehr gut überein, vergleiche die Darstellung im Buch von Schlichting. Später ist das Gleichungssystem (4.110) für verschiedene Prandtl-Zahlen numerisch integriert worden. Bild 4.10 zeigt die Lösung von Pohlhausen sowie jene von Ostrach für verschiedene Prandtl-Zahlen. Man sieht, daß $\delta_T \approx \delta_S$ für $\text{Pr} \ll 1$ und $\delta_T < \delta_S$ für $\text{Pr} > 1$ ist.

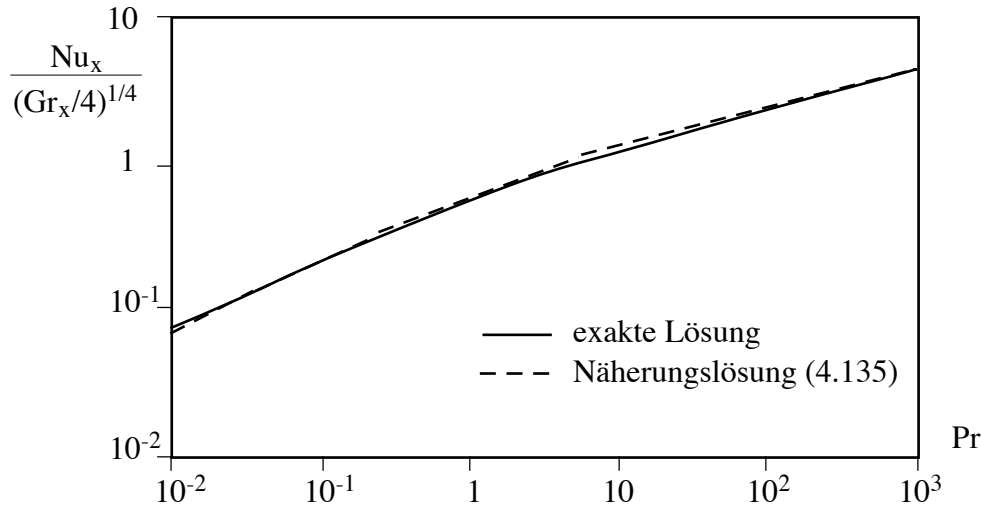


Bild 4.11: Örtliche Nusselt-Zahl an der senkrechten beheizten ebenen Platte nach Ostrach ($T_w = \text{konstant}$)

Der Wärmeübergang folgt aus

$$q_w = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_w = -\lambda(T_w - T_\infty) \frac{C}{x^{1/4}} \left(\frac{d\theta}{d\eta} \right)_w, \quad (4.112)$$

$$\alpha = \frac{q_w}{T_w - T_\infty} = -\frac{\lambda}{x} \left(\frac{\text{Gr}_x}{4} \right)^{1/4} \left(\frac{d\theta}{d\eta} \right)_w.$$

Darin ist Gr_x die mit der Lauflänge gebildete örtliche Grashof-Zahl nach Gl. (4.107). Es folgt die örtliche Nusselt-Zahl zu

$$\text{Nu}_x = \frac{\alpha x}{\lambda} = - \left(\frac{\text{Gr}_x}{4} \right)^{1/4} \left(\frac{d\theta}{d\eta} \right)_w \quad \text{bzw.} \quad \frac{\text{Nu}_x}{(\text{Gr}_x/4)^{1/4}} = - \left(\frac{d\theta}{d\eta} \right)_w = f(\text{Pr}). \quad (4.113)$$

Die dimensionslose Wandtangente ist durch die numerische Lösung als eine Funktion der Prandtl-Zahl gegeben (Bild 4.11).

Die exakte Lösung kann durch die Beziehung

$$\frac{\text{Nu}_x}{(\text{Gr}_x/4)^{1/4}} = \frac{0,676 \text{Pr}^{1/2}}{(0,861 + \text{Pr})^{1/4}} \quad (4.114)$$

approximiert werden. Neben der örtlichen Nusselt-Zahl interessiert die mittlere Nusselt-Zahl

$$\alpha_m = \frac{1}{x} \int_0^x \alpha(x) dx = \frac{C}{x} \int_0^x x^{-1/4} dx = \frac{4}{3} \alpha(x). \quad (4.115)$$

Damit wird

$$\frac{\text{Nu}_m}{(\text{Gr}/4)^{1/4}} = \frac{0,902 \text{Pr}^{1/2}}{(0,861 + \text{Pr})^{1/4}} . \quad (4.116)$$

Für $\text{Pr} = 0,733$ hat die rechte Seite den Wert 0,685. Es ist mit der Plattenlänge L

$$\text{Nu}_m = \frac{\alpha_m L}{\lambda} , \quad \text{Gr} = \frac{g\beta(T_w - T_\infty)L^3}{\nu^2} . \quad (4.117)$$

Die als mittlere Nusselt-Zahl bezeichnete Größe Nu_m ist nicht mit dem Mittelwert der örtlichen Nusselt-Zahl zu verwechseln. Für letztere gilt

$$\text{Nu}_{\text{gem}} = \frac{1}{x} \int_0^x \text{Nu}_x \, dx = \frac{C}{x} \int_0^x x^{3/4} \, dx = \frac{4}{7} C x^{3/4} = \frac{4}{7} \text{Nu}_x . \quad (4.118)$$

Diese Größe wird im Gegensatz zu Nu_m nicht verwendet. Anhand der Approximation (4.116) lassen sich folgende Grenzfälle sofort angeben:

$$\begin{aligned} \frac{\text{Nu}_m}{(\text{GrPr}^2)^{1/4}} &= K_1 \quad \text{für} \quad \text{Pr} \rightarrow 0 , \\ \frac{\text{Nu}_m}{(\text{GrPr})^{1/4}} &= K_2 \quad \text{für} \quad \text{Pr} \rightarrow \infty . \end{aligned} \quad (4.119)$$

Auf der Basis der Approximation ergeben sich die Werte $K_1 = 0,741$ (0,800) und $K_2 = 0,683$ (0,670); die Klammerwerte gelten für die exakte Lösung.

4.5.2 Näherungslösung mit Integralbedingung

Wird die Impulsgleichung (4.97)₂ partiell über y von $y = 0$ bis $y = \delta$ integriert, so folgt die Integralbedingung für den Impuls

$$\frac{d}{dx} \int_0^x u^2 \, dy = -\nu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_w + g\beta \int_0^\delta (T - T_\infty) \, dy . \quad (4.120)$$

Dabei ist wie bei der Herleitung der Integralbedingung nach von Kármán vorgegangen worden, die Quergeschwindigkeit v wurde durch die Kontinuitätsgleichung (4.97)₁ eliminiert und die spezielle Randbedingung $u_\infty = 0$ beachtet.

Da die Energiegleichung bei freier und erzwungener Konvektion gleich lautet, kann die in Abschnitt 4.2.2 hergeleitete Integralbedingung für die Energie nach Gl. (4.46) direkt übernommen werden:

$$\frac{d}{dx} \left(\int_0^\delta u(T - T_\infty) \, dy \right) = -a \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_w . \quad (4.121)$$

Der Einfachheit halber wird im folgenden zwischen der Dicke der Strömungs- und der Temperaturgrenzschicht nicht unterschieden werden. Das ist für Prandtl-Zahlen größer eins oder kleiner eins nur näherungsweise gestattet; die grundsätzlich mögliche Einführung

verschiedener Grenzschichtdicken würde die Rechnung erheblich verkomplizieren. Das Ergebnis wird auch so hinreichend genau sein, wie wir später sehen werden.

Für das Temperaturprofil wird der Ansatz

$$T(x, y) = a + by + cy^2 \quad (4.122)$$

gewählt, wobei a , b und c aus den Randbedingungen

$$\begin{aligned} y = 0 : \quad & T = T_w \\ y = \delta : \quad & T = T_\infty, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \end{aligned} \quad (4.123)$$

folgen. Man erhält

$$\frac{T(x, y) - T_\infty}{T_w - T_\infty} = \left(1 - \frac{y}{\delta}\right)^2. \quad (4.124)$$

Für das Geschwindigkeitsprofil muß ein kubisches Polynom gewählt werden, um den Vorzeichenwechsel in der Steigung beschreiben zu können (das u -Profil hat ein Maximum):

$$\frac{u(x, y)}{U_0(x)} = A + By + Cy^2 + Dy^3. \quad (4.125)$$

$U_0(x)$ ist eine fiktive Bezugsgeschwindigkeit. Die Randbedingungen lauten

$$\begin{aligned} y = 0 : \quad & u = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{g\beta}{\nu}(T_w - T_\infty), \\ y = \delta : \quad & u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \end{aligned} \quad (4.126)$$

Die zweite Randbedingung für $y = 0$ folgt aus der Impulsgleichung (4.97)₂, wenn diese an der Wand angeschrieben wird. In dieser "Wandbindungsgleichung" kommt der Einfluß des Auftriebs auf das Geschwindigkeitsprofil zum Tragen. Es folgt

$$\frac{u(x, y)}{u_0(x)} = \frac{y}{\delta} \left(1 - \frac{y}{\delta}\right)^2. \quad (4.127)$$

Darin ist

$$u_0(x) = U_0(x)\delta(x)^2 \frac{g\beta(T_w - T_\infty)}{4\nu} \quad (4.128)$$

eine offene Funktion von x mit der Dimension einer Geschwindigkeit. Sie ist der Steigung des u -Profils an der Wand proportional, denn es ist nach Gl. (4.127) $(\partial u / \partial y)_w = u_0 / \delta$. Aufgrund des einparametrischen Ansatzes ist sie gleichfalls der maximalen Geschwindigkeit

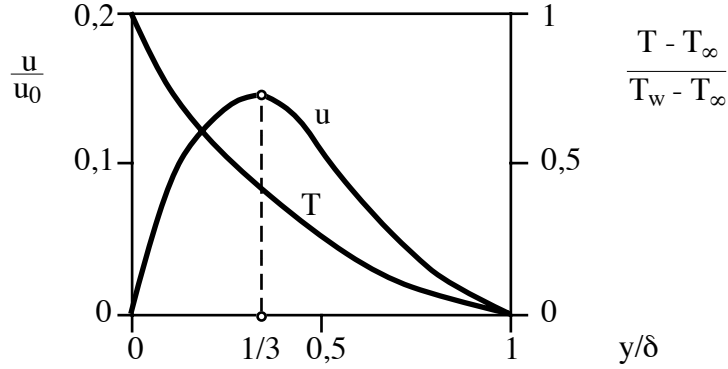


Bild 4.12: Temperatur- und Geschwindigkeitsprofil nach Gl. (4.124) und Gl. (4.127)

proportional. Es ist $u = u_{\max}$ an der Stelle $y = \delta/3$ und damit $u_{\max} = 4u_0/27$. In Bild 4.12 sind beide Profilsansätze dargestellt.

Die Ansätze (4.124) und (4.127) werden in die Integralbedingungen eingeführt, nach Integration folgen zwei gekoppelte gewöhnliche Differentialgleichungen für die beiden Unbekannten $\delta(x)$ und $u_0(x)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{105} \frac{d}{dx} (u_0^2 \delta) &= -\frac{\nu u_0}{\delta} + \frac{1}{3} g \beta (T_w - T_\infty) \delta, \\ \frac{1}{30} \frac{d}{dx} (u_0 \delta) &= \frac{2a}{\delta}. \end{aligned} \quad (4.129)$$

Es läßt sich eine analytische Lösung des Gleichungssystems angeben. Zunächst entnehmen wir der Gl. (4.128), daß $u_0(x) \sim \delta(x)^2$ ist. Mit dieser Information liefert Gl. (4.129)₂ die Aussage $\delta(x) \sim x^{1/4}$. Daher nehmen wir folgende Lösungsansätze an:

$$u_0(x) = C_1 x^{1/2}, \quad \delta(x) = C_2 x^{1/4}. \quad (4.130)$$

Dies eingesetzt in die Integralbedingungen ergibt zwei Bestimmungsgleichungen für C_1 und C_2 :

$$\begin{aligned} \frac{5}{420} C_1^2 C_2 &= g \beta (T_w - T_\infty) \frac{1}{3} C_2 - \frac{C_1}{C_2} \nu, \\ \frac{1}{40} C_1 C_2 &= \frac{2a}{C_2}. \end{aligned} \quad (4.131)$$

Die x -Abhängigkeit ist herausgefallen, die Lösungsansätze (4.130) sind daher sinnvoll und führen auf ähnliche Profile. Es folgt

$$\begin{aligned} C_1 &= 5,17 \nu \left(\frac{20}{21} + \text{Pr} \right)^{-1/2} \left(\frac{g \beta (T_w - T_\infty)}{\nu^2} \right)^{1/2}, \\ C_2 &= 3,93 \left(\frac{20}{21} + \text{Pr} \right)^{1/4} \text{Pr}^{-1/2} \left(\frac{g \beta (T_w - T_\infty)}{\nu^2} \right)^{-1/4}. \end{aligned} \quad (4.132)$$

Darin ist schon $\text{Pr} = \nu/a$ eingeführt; setzen wir zusätzlich die örtliche Grashof-Zahl nach Gl. (4.107) ein, so folgt mit C_2 die gesuchte Grenzschichtdicke zu

$$\frac{\delta(x)}{x} = 3,93 \frac{(0,952 + \text{Pr})^{1/4}}{\text{Pr}^{1/2} \text{Gr}_x^{1/4}}. \quad (4.133)$$

Der Wärmeübergang folgt aus

$$q_w = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_w = \alpha(T_w - T_\delta) \quad (4.134)$$

mit dem Ansatz (4.124) für das Temperaturprofil zu

$$\alpha(x) = \frac{2\lambda}{\delta(x)} \quad \text{bzw.} \quad \text{Nu}_x = \frac{\alpha(x)x}{\lambda} = 2 \frac{x}{\delta(x)}, \quad (4.135)$$

$$\frac{\text{Nu}_x}{\text{Gr}_x^{1/4}} = \frac{0,508 \text{Pr}^{1/2}}{(0,952 + \text{Pr})^{1/4}}.$$

Man vergleiche dies mit der Approximation (4.114) der exakten Lösung. Gl. (4.135) ist in Bild 4.11 ebenfalls eingezeichnet, die Abweichung liegt für $0,01 < \text{Pr} < 1000$ unter 10%. Dies ist erstaunlich, da die Näherungslösung unter der Voraussetzung $\delta_T = \delta_S$ gewonnen wurde. Die Abhängigkeit von der Prandtl-Zahl wird von der Näherungslösung richtig vorhergesagt. Die mittlere Nusselt-Zahl folgt wegen $\alpha_m = \frac{4}{3}\alpha(x=L)$ zu

$$\frac{\text{Nu}_m}{\text{Gr}^{1/4}} = \frac{0,677 \text{Pr}^{1/2}}{(0,952 + \text{Pr})^{1/4}}. \quad (4.136)$$

Die Grenzfälle $\text{Pr} \rightarrow 0$ und $\text{Pr} \rightarrow \infty$ werden richtig vorhergesagt, es ist $K_1 = 0,711$ und $K_2 = 0,677$ nach der Näherungslösung, der Fehler gegenüber den exakten Werten $K_1 = 0,800$ und $K_2 = 0,670$ ist bemerkenswert gering.

Die Resultate für die freie Konvektionsströmung an einer senkrechten beheizten ebenen Platte seien kurz zusammengefaßt:

- Es ist $\delta \sim x^{1/4}$, im Vergleich dazu ist bei der erzwungenen Konvektion $\delta \sim x^{1/2}$. Die Grenzschicht wächst bei freier Konvektion langsamer an als bei erzwungener Konvektion.
- Wegen $\delta(x) \sim x^{1/4}$ ist $\text{Nu}_x \sim \text{Gr}_x^{1/4}$. Bei der erzwungenen Konvektion ist $\text{Nu}_x \sim \text{Re}_x^{1/2}$ wegen $\delta(x) \sim x^{1/2}$.

Abschließend sei auf den Gültigkeitsbereich der ermittelten Beziehungen hingewiesen. Aus Experimenten weiß man, daß für $\text{Ra}_x = \text{Gr}_x \text{Pr} > 10^8 \div 10^9$ die Grenzschicht turbulent wird; für $\text{Ra}_x < 10^4$ treffen die Grenzschichtvoraussetzungen nicht mehr zu.