

AERODYNAMISCHES INSTITUT
der Rheinisch - Westfälischen
Technischen Hochschule Aachen
Univ.-Prof. Dr.-Ing. W. Schröder

Klausur

Aerodynamik II

11. 02. 2020

M U S T E R L Ö S U N G
E I N S I C H T N A H M E

Hinweis:

Achten Sie darauf, ob Sie alle Aufgaben erhalten haben.

Die Lösungen dürfen ausschließlich die gegebenen Größen enthalten.

Klausur Aerodynamik II

Fragenteil, Skelett- u. Traglinientheorie und Überschallströmung

Integrale und Additionstheoreme

Additionstheoreme

- $\sin(x \pm y) = \sin(x) \cdot \cos(y) \pm \sin(y) \cdot \cos(x)$
- $\cos(x \pm y) = \cos(x) \cdot \cos(y) \mp \sin(x) \cdot \sin(y)$
- $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
- $\sin(2x) = 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$
- $\sin(x) = 2 \cdot \sin(x/2) \cdot \cos(x/2)$
- $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$
- $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$
- $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$
- $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$
- $\tan\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \sin(x) = 1 - \cos(x)$
- $\sin(x) \cdot \sin(nx) = -\frac{1}{2}(\cos[(n+1)x] - \cos[(n-1)x])$
- $\sin[(n+1)x] - \sin[(n-1)x] = 2 \cdot \cos(nx) \cdot \sin(x)$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(n\varphi_p) \cdot \sin(n\varphi) = \frac{1}{4} \ln\left(\frac{1 - \cos(\varphi_p + \varphi)}{1 - \cos(\varphi_p - \varphi)}\right)$

Integrale

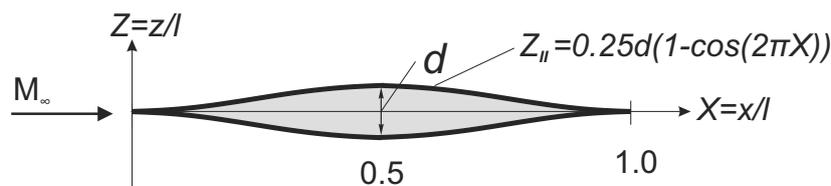
- $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \cdot \ln(ax+b)$
- $\int \frac{x}{ax+b} dx = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2} \cdot \ln(ax+b)$
- $\int \frac{x^2}{X} dx = \frac{1}{a^3} \left[\frac{1}{2}(X) - 2b(X) + b^2 \ln(X) \right]$
mit $X = ax+b$
- $\int \sin(ax) dx = -\frac{\cos(ax)}{a}$
- $\int \cos(ax) dx = +\frac{\sin(ax)}{a}$
- $\int \sin^2(ax) dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4a} \sin(2ax)$
- $\int \cos^2(ax) dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4a} \sin(2ax)$
- $\int \sin^3(ax) dx = \frac{\cos^3(ax)}{3a} - \frac{\cos(ax)}{a}$
- $\int \cos^3(ax) dx = -\frac{\sin^3(ax)}{3a} + \frac{\sin(ax)}{a}$
- $\int \cos^4(ax) dx = \frac{3}{8}x + \frac{\sin(2ax)}{4a} + \frac{\sin(4ax)}{32a}$
- $\int \sin(ax) \cos(ax) dx = \frac{\sin^2(ax)}{2a}$
- $\int_0^{\pi} \cos(n \cdot \varphi) \cdot \cos(p \cdot \varphi) d\varphi = \begin{cases} \pi/2 & n = p \\ 0 & n \neq p \end{cases}$
- $\int_0^{\pi} \sin(n \cdot \varphi) \cdot \sin(p \cdot \varphi) d\varphi = \begin{cases} \pi/2 & n = p \\ 0 & n \neq p \end{cases}$
- Glauert-Integral
 $\int_0^{\pi} \frac{\cos(n \cdot \varphi')}{\cos(\varphi) - \cos(\varphi')} d\varphi' = -\pi \cdot \frac{\sin(n \cdot \varphi)}{\sin(\varphi)}$
- $\int \cos(ax) \cdot \cos(bx) dx = \frac{\sin[(a-b)x]}{2(a-b)} + \frac{\sin[(a+b)x]}{2(a+b)} \quad \forall |a| \neq |b|$

1. Aufgabe: Fragenteil (13 Punkte)

1. Stellen Sie die Prandtl-Meyer Strömung in ihrem gesamten Gültigkeitsbereich in der Hodographenebene mittels einer Epizykloide dar. Achten Sie auf die richtige Bezeichnung der Achsen und markieren Sie explizit in Ihrer Skizze die entsprechenden Grenzwerte für die Winkel und Machzahlen (gegeben: $\gamma = 1.4$).
2. Erklären Sie die Begriffe des kritischen Druckbeiwertes c_p^* und der kritischen Machzahl Ma_{krit} . Erklären Sie anhand einer Skizze, wie genau sich diese Größen bei einem Flügel mit dem Pfeilwinkel $\varphi = 45^\circ$ effektiv im Vergleich zu einem ungepfeilten Flügel verändern, gehen Sie dabei explizit auf die drei Hauptauswirkungen der Pfeilung ein.
3. Formulieren Sie die mathematische Randbedingung für den statischen Druck an einem supersonischen Austrittsrand.
Leiten Sie nun aus der Taylor-Reihenentwicklung die numerische Bestimmungsgleichung für den statischen Druck am supersonischen Austrittsrand im Punkt i (p_i) für ein äquidistantes kartesisches Gitter mit dem Zellenabstand $\Delta x = h$ her. Vernachlässigen Sie dabei Terme dritter und höherer Ordnung.

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m f(x_0)}{\partial x^m} (x - x_0)^m$$

4. Gegeben ist das in der Abbildung gezeigte Bi-konvexe Gauß-Profil, welches symmetrisch mit der Machzahl $M_\infty = 3.0$ angeströmt wird.



Bi-konvexes Gauß-Profil

- (a) Zeichnen Sie das zu erwartende System der Stoß- und Expansionswellen um das Profil. Achten Sie genau auf die Winkelrelation bei den evtl. auftretenden Stößen, Expansionen und Machschen Linien.
- (b) Skizzieren Sie die Druckbeiwertverteilung entlang der Wand des Profils $c_p(X)$.

Hinweis:

Falls nötig, übertragen Sie die Skizzen in Ihre Lösungsblätter und zeichnen Sie die Lösung dort ein!

2. Aufgabe: Skelett- und Traglinientheorie (20 Punkte)

Für die Auslegung eines Tragflügels soll zunächst das Profil eines schwach gewölbten Flügelsegments mithilfe der Skelett-Theorie analysiert werden. Die Skelettlinie $Z^{(s)}$ ist durch die Funktion

$$Z^{(s)}(X) = -X^3 + \frac{10}{6}X^2 - \frac{4}{6}X = -\frac{1}{3}X(X-1)(3X-2); \quad X = \frac{x}{l}; \quad Z^{(s)} = \frac{z^{(s)}}{l}$$

gegeben. Im Anschluss an die zweidimensionale Analyse sollen auch dreidimensionale Effekte untersucht werden. Dafür soll in Aufgabenteil 5. die Traglinientheorie verwendet werden.

1. Nennen Sie je zwei Voraussetzungen für die Anwendbarkeit der Skelett-Theorie und der Traglinientheorie.
2. Zeigen Sie, dass das gegebene Profil einen S-Schlag hat. Welche Bedeutung hat dies für die Koeffizienten A_n mit $n \in \mathbb{N}_0$ des Reihenansatzes nach Birnbaum-Ackermann?
3. Berechnen Sie den Auftriebsbeiwert c_l des Profils in Abhängigkeit des Anstellwinkels α . Zeigen Sie dafür zunächst, dass die allgemeine Formulierung des Auftriebsbeiwerts $c_l = \pi(2A_0 + A_1)$ lautet und bestimmen sie anschließend die Koeffizienten A_n mit $n \in \mathbb{N}_0$.
4. Bestimmen Sie den Momentenbeiwert $c_m = -\frac{\pi}{4}(2A_0 + 2A_1 + A_2)$ in Abhängigkeit des Anstellwinkels α . Leiten Sie die Druckpunktlage X_D in Abhängigkeit des Auftriebsbeiwerts c_l her und skizzieren Sie diese für das gegebene Profil.

Die weiteren Untersuchungen des Flügelprofils haben ergeben, dass die Zirkulation an der Flügelwurzel $\Gamma(y=0) = \Gamma_0$ beträgt. Basierend auf diesen Ergebnissen soll das Profil der Tiefe l nun in Form eines Rechteckflügels mit der Spannweite $b \gg l$ mit der Traglinientheorie analysiert werden. Um den Widerstand des Tragflügels zu minimieren, wird eine elliptische Zirkulationsverteilung über dem Tragflügel angestrebt. Dies soll mit einer geeigneten Verwindung des Flügels realisiert werden.

5. Berechnen Sie die Funktion des lokalen geometrischen Anstellwinkels $\alpha_g(\varphi)$, die benötigt wird, um die angestrebte elliptische Zirkulationsverteilung zu erzielen. Leiten Sie dafür zunächst den geometrischen Anstellwinkel $\alpha_g(\varphi)$ für eine allgemeine Zirkulationsverteilung um das gegebene Profil her.

gegeben: l, u_∞, b, Γ_0

Hinweise:

Für Aufgabenteil 1-4, Skelett-Theorie:

Reihenansatz von
Birnbaum-Ackermann:

$$\gamma(\varphi) = 2u_\infty \left(A_0 \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \sum_{n=1}^N A_n \sin(n\varphi) \right)$$

$$\alpha - \frac{dZ^{(s)}}{d\varphi} = \sum_{n=0}^N A_n \cos(n\varphi)$$

$$\Delta c_p(\varphi) = 2 \frac{\gamma(\varphi)}{u_\infty}$$

$$X = \frac{1 + \cos(\varphi)}{2}$$

Für Aufgabenteil 5, Traglinientheorie:

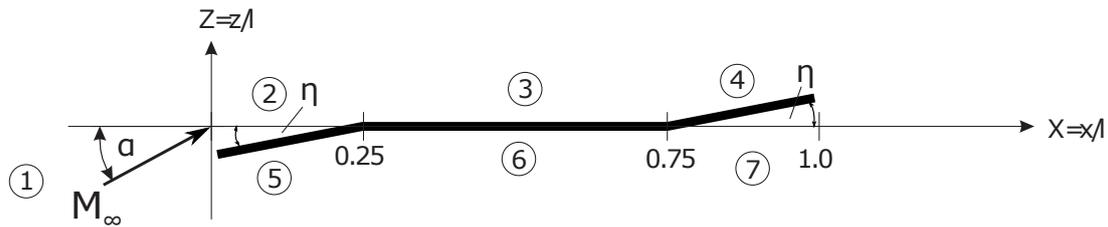
$$\Gamma(\varphi) = \Gamma_0 \sum_{n=1}^N A_n \sin(n\varphi)$$

$$w_i = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{\frac{d\Gamma}{dy} dy'}{y-y'}$$

$$y = -\frac{b}{2} \cos(\varphi)$$

3. Aufgabe: Überschallströmung (17 Punkte)

Es soll die supersonische Strömung um das in der Abbildung dargestellte Profil unter dem Anstellwinkel α untersucht werden.



1. Das Profil wird zunächst **ohne** Annahmen der linearisierten Potentialtheorie **mittels der allgemeinen gasdynamischen Beziehungen** untersucht. Der Anstellwinkel beträgt $\alpha_1 = 20^\circ$ und beide Klappen sind um $\eta_1 = 20^\circ$ ausgeschlagen. Die Machzahl der freien Anströmung ist $M_\infty = M_1 = 5$.
 - (a) Skizzieren Sie sorgfältig das Strömungsfeld um das Profil unter Berücksichtigung der Stromlinien und mögl. Verdichtungsstößen, Expansionsfächern sowie Machschen Linien. Lassen Sie die Zustandsänderungen an der Hinterkante zunächst aus.
 - (b) Leiten Sie die Gleichung zur Bestimmung des Auftriebsbeiwertes c_l des Profils in Abhängigkeit von den statischen Druckverhältnissen $\left(\frac{p_2}{p_1}, \frac{p_3}{p_1}, \frac{p_4}{p_1}, \frac{p_5}{p_1}, \frac{p_6}{p_1}, \frac{p_7}{p_1}\right)$ sowie den gegebenen Größen der Anströmung her.
 - (c) Bestimmen Sie die relativen Werte des statischen Druckes auf der Unterseite des Profils für die einzelnen Zustände 5, 6 und 7 bezogen auf den statischen Druck der Anströmung $\left(\frac{p_5}{p_1}, \frac{p_6}{p_1}$ und $\frac{p_7}{p_1}\right)$.
 - (d) Für den Zustand 4 würde sich der relative Druckwert von $\frac{p_4}{p_1} \approx 0.6$ ergeben. Vervollständigen Sie die Skizze bei (a) durch Einzeichnen der Verdichtungsstöße, Expansionsfächer und der sich ergebenden Diskontinuitätslinie (*slip line*) an der Hinterkante des Profils.

Gegeben für Teil 1: Machzahl der freien Anströmung $M_\infty = M_1 = 5$, Anstellwinkel $\alpha_1 = 20^\circ$, Klappenausschlagwinkel $\eta_1 = 20^\circ$, Isentropenexponent γ .

2. Das in (1) untersuchte Profil wird nun (über einen ausgedehnten Machzahlbereich) bei kleineren Anstellwinkeln α und Klappenausschlägen η im Überschall untersucht. Dies soll **mithilfe der linearisierten Potentialtheorie** erfolgen. Nehmen Sie an, dass der Klappenausschlag klein ist, so dass $\sin(\eta) \approx \tan(\eta) \approx \eta$ und die Vorder- bzw. Hinterkante immer bei $X = x/l = 0$ bzw. $X = x/l = 1$ ist.
 - (a) Bestimmen Sie den Auftriebsbeiwert c_l des Profils in Abhängigkeit vom Anstellwinkel α , dem Klappenausschlag η und der Machzahl der freien Anströmung.
 - (b) Bestimmen Sie den Widerstandsbeiwert c_d des Profils in Abhängigkeit vom Anstellwinkel α , dem Klappenausschlag η und der Machzahl der freien Anströmung.

Gegeben für Teil 2: Machzahl der freien Anströmung M_∞ , Anstellwinkel α , Klappenausschlagwinkel η .

Hinweise:

Beachten Sie die gegebenen Abb. 3.1-3.4

α	$10^\circ \pm 2^\circ$	$15^\circ \pm 2^\circ$	$20^\circ \pm 2^\circ$	$25^\circ \pm 2^\circ$	$30^\circ \pm 2^\circ$	$35^\circ \pm 2^\circ$
$\sin \alpha \approx$	1/6	1/4	1/3	2/5	1/2	3/5

$$c = \sqrt{\gamma RT} \quad , \quad p = \rho RT \quad , \quad c_{p,linTheorie} = \pm \frac{2\beta}{\sqrt{Ma^2 - 1}}$$

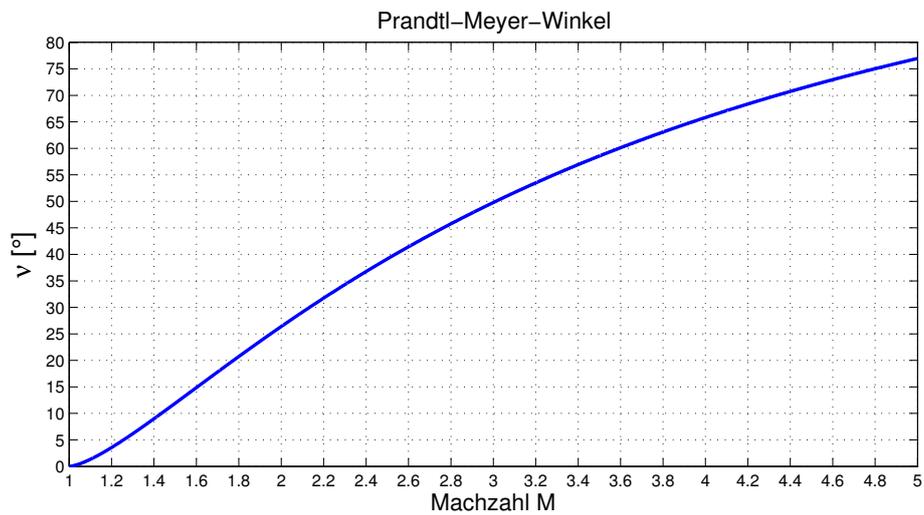


Abbildung 3.1: Prandtl-Meyer-Winkel ν über Machzahl M

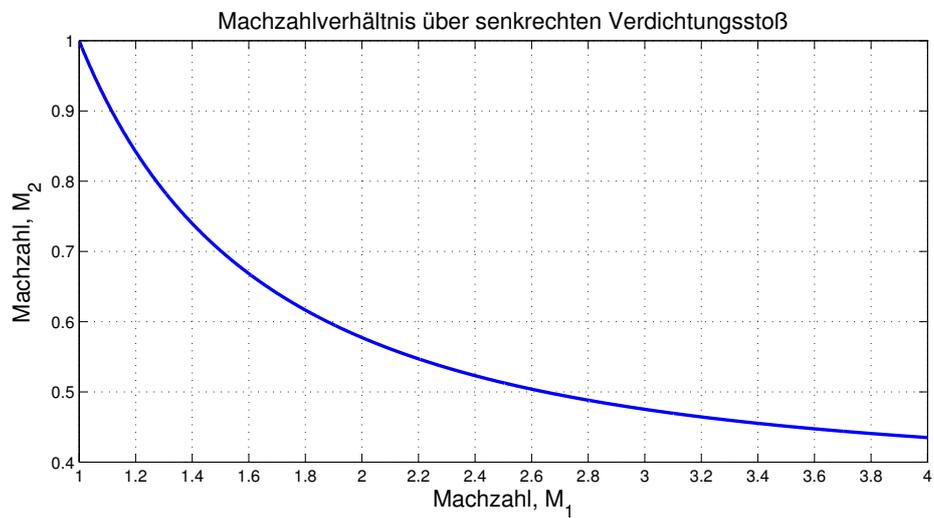


Abbildung 3.2: Machzahlverhältnis M_1 zu M_2 über einen senkrechten Verdichtungsstoß

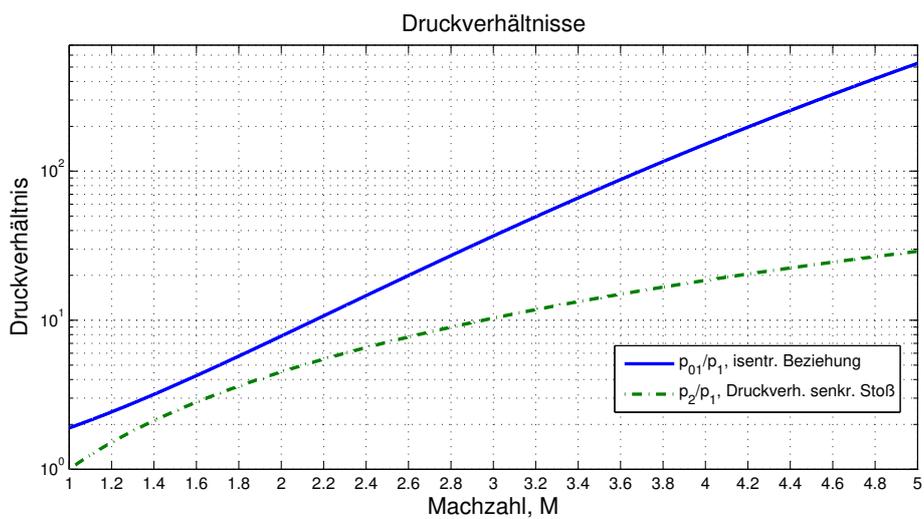


Abbildung 3.3: Druckverhältnisse über senkrechten Verdichtungsstoß und isentropes Druckverhältnis über der Machzahl M

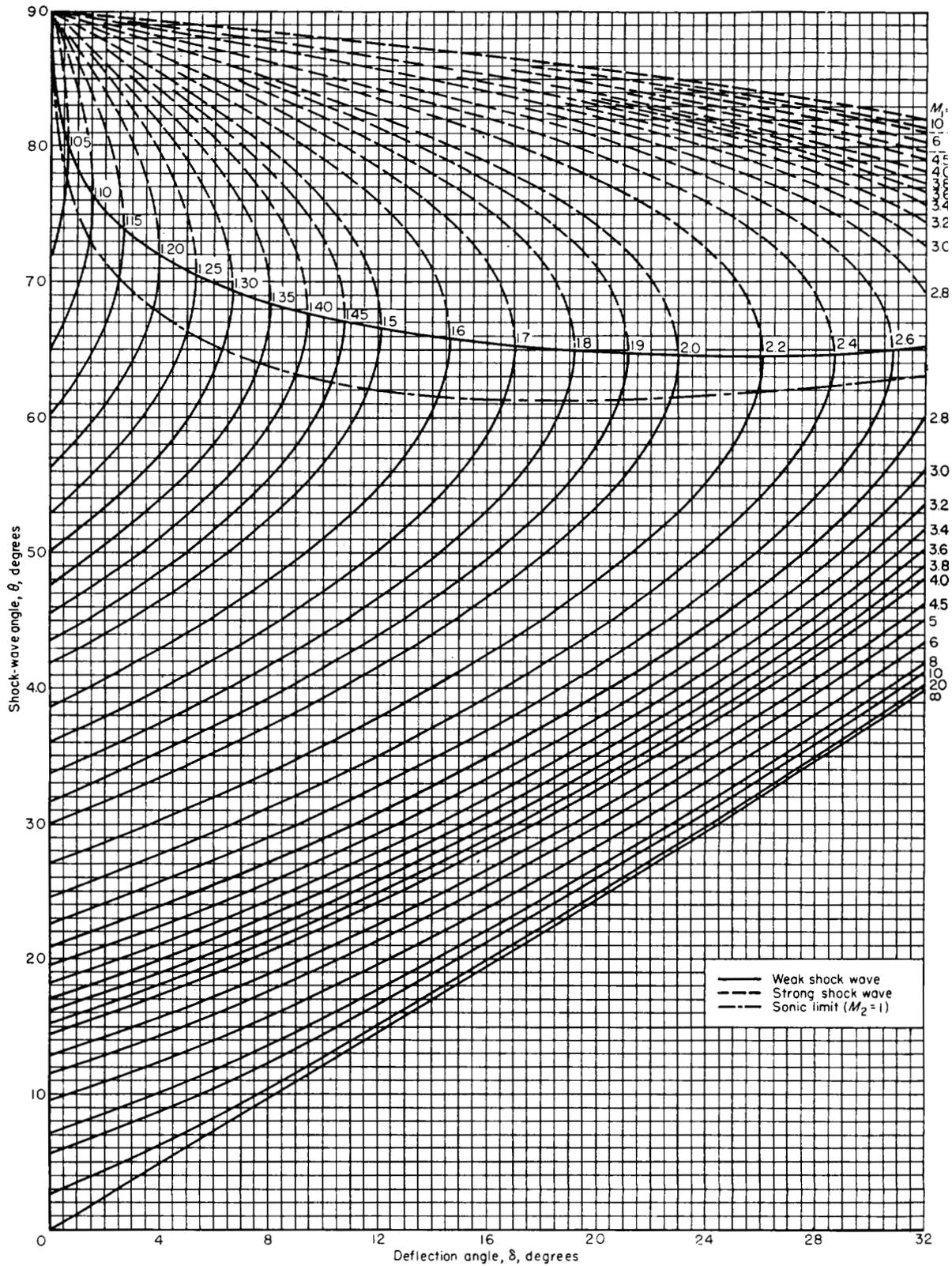
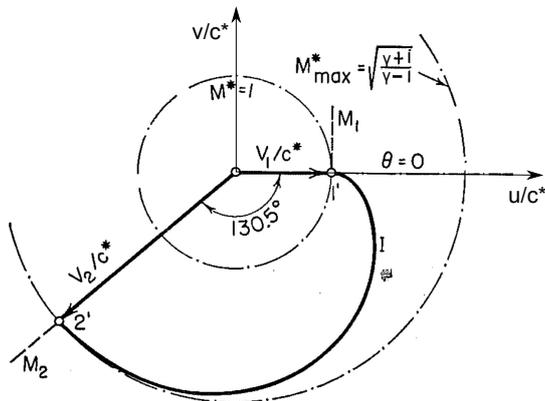


CHART 2.—Variation of shock-wave angle with flow-deflection angle for various upstream Mach numbers Perfect gas, $\gamma = \frac{7}{5}$.

Abbildung 3.4: Änderung des Stoßwinkels in Abhängigkeit vom Umlenkwinkel für verschiedene Anström-Machzahlen M_∞

Lösung 1. Aufgabe: Fragenteil (13 Punkte)(LÖSUNG)

1. Prandtl-Meyer Epizykloide in der Hodographenebene:

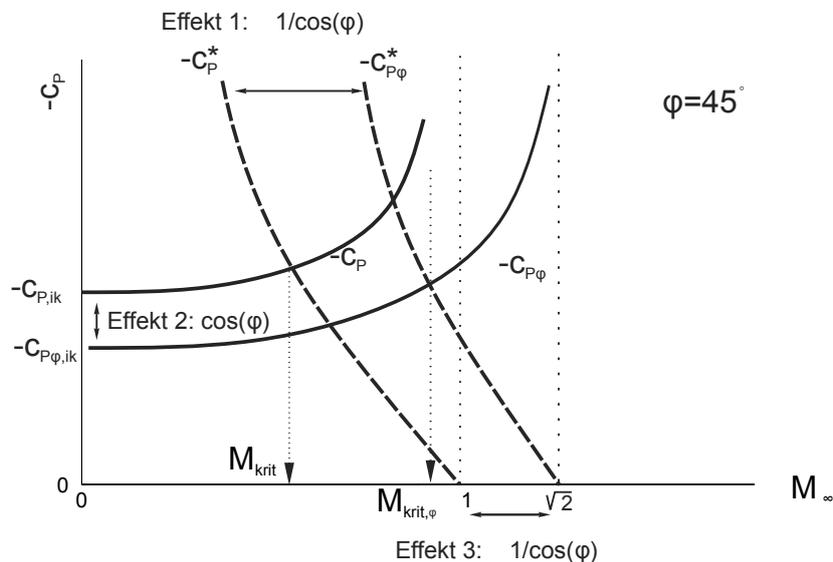


2. Der kritische Druckbeiwert c_p^* ist als dimensionsloser Druckbeiwert definiert, der erreicht wird, wenn die Strömung isentrop $Ma = 1$ erreicht. Die kritische Machzahl Ma_{krit} ist die Machzahl der freien Anströmung, bei der auf dem Profil lokal zum ersten Mal die Schallgeschwindigkeit erreicht wird.

Bei einem gepfeilten Flügel wird der kritische Druckbeiwert für eine konstante Machzahl der Anströmung reduziert, da die maßgebende Normalkomponente der Machzahl um den Faktor $\cos \varphi$, in diesem Fall um $\cos 45^\circ = 1/\sqrt{2}$, verringert wird.

Die kritische Machzahl, die sich als Schnittpunkt des Verlaufs des lokalen Druckminimums am Profil mit dem Verlauf des kritischen Druckbeiwerts als Funktion der Machzahl ergibt, wird bei einem gepfeilten Flügel ebenfalls aufgrund vom oben genannten sowie zwei weiteren Effekten erhöht:

- Verminderung des inkompressiblen Auftriebsbeiwertes um $\cos \varphi = \cos(45^\circ) = 1/\sqrt{2}$.
- Schwächeres Kompressibilitätsgesetz durch die Asymptotenverschiebung zu $Ma_\infty = \frac{1}{\cos \varphi} = \sqrt{2}$



3. Mathematische Formulierung der Randbedingung: $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ (Extrapolation aus dem Rechengebiet).
Numerische Bestimmungsgleichung:

$$p_{i-1} = p_i + p_{xi}(-h) + \frac{1}{2}p_{xxi}(-h)^2 + \frac{1}{6}p_{xxxi}(-h)^3$$

$$p_{i-2} = p_i + p_{xi}(-2h) + \frac{1}{2}p_{xxi}(-2h)^2 + \frac{1}{6}p_{xxxi}(-2h)^3$$

Nach dem Einsetzen der mathematischen Randbedingung $p_{xi} = 0$ folgt:

$$p_{i-1} = p_i + \frac{1}{2}p_{xxi}h^2 - \frac{1}{6}p_{xxxi}h^3$$

$$p_{i-2} = p_i + 2p_{xxi}h^2 - \frac{4}{3}p_{xxxi}h^3$$

Eliminierung von p_{xxi} durch Multiplikation der 2. Gleichung mit $-\frac{1}{4}$ und Addition zur 1. Gleichung:

$$p_{i-1} - \frac{1}{4}p_{i-2} = \frac{3}{4}p_i + \frac{1}{6}p_{xxxi}h^3$$

Somit folgt für p_i :

$$p_i = \frac{4}{3}p_{i-1} - \frac{1}{3}p_{i-2} + O(h^3)$$

4.

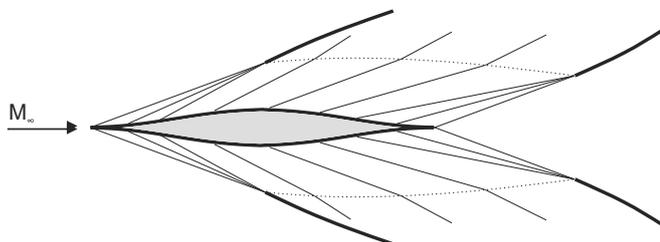


Abbildung 1.1: System der Stoß- und Expansionswellen

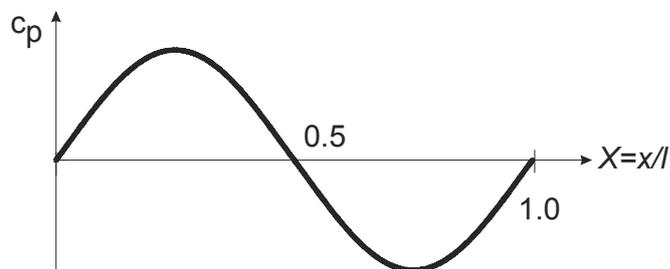


Abbildung 1.2: Druckbeiwertverteilung $c_p(X)$

Lösung 2. Aufgabe: Skelett- u. Traglinientheorie (20 Punkte)(LÖSUNG)

1. (2 Punkte)

Voraussetzungen Skelett-Theorie: inkompressible, reibungsfreie, rotationsfreie und stationäre Strömung, sehr dünne Profile, kleine Anstellwinkel

Voraussetzungen Traglinientheorie: inkompressible, reibungsfreie, rotationsfreie und stationäre Strömung, ungepfeilter Flügel (gerade $\frac{l}{4}$ -Linie), kleine Wölbung/Profildicke/Anstellwinkel, mittlere bis große Streckung ($\Lambda > 5$),

2. (2 Punkte)

Die Nullstellen der Skelettlinie liegen bei:

$$X = 0, \quad X = \frac{2}{3}, \quad X = 1$$

Das gegebene Profil weist 3 Nullstellen entlang der Profilschne im Bereich $0 \leq X \leq 1$ auf. Daher hat das Profil einen S-Schlag. Da das Profil außerdem entsprechend der Aufgabenstellung schwach gewölbt ist, müssen die ersten drei Koeffizienten des Reihenansatzes von Birnbaum-Ackermann von 0 verschieden sein $A_n \neq 0$ mit $n \leq 2$. Für die weiteren Koeffizienten gilt $A_n = 0$ mit $n > 2$.

3. (6 Punkte)

Der Auftriebsbeiwert ist definiert als das Integral der Druckbeiwerts über die gesamte Sehnenlänge. Unter Verwendung der Transformation $dX = -\frac{1}{2} \sin(\varphi) d\varphi$ und den daraus resultierenden neuen Intervallgrenzen für die Vorderkante $X = 0 \Rightarrow \varphi = \pi$ und die Hinterkante $X = 1 \Rightarrow \varphi = 0$ ergibt sich die Formulierung für den Auftriebsbeiwert c_l

$$c_l = \int_0^1 \Delta c_p(X) dX = \frac{1}{2} \int_0^\pi \Delta c_p(\varphi) \sin(\varphi) d\varphi = \int_0^\pi \frac{\gamma(\varphi)}{u_\infty} \sin(\varphi) d\varphi \quad .$$

Durch Einsetzen der Zirkulationsverteilung nach dem Reihenansatz von Birnbaum-Ackermann erhält man

$$c_l = \int_0^\pi \frac{2u_\infty \left(A_0 \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \sum_{n=1}^N A_n \sin(n\varphi) \right)}{u_\infty} \sin(\varphi) d\varphi$$

$$\Leftrightarrow c_l = 2 \int_0^\pi A_0 (1 - \cos(\varphi)) d\varphi + 2 \int_0^\pi \sum_{n=1}^N A_n \sin(n\varphi) \sin(\varphi) d\varphi$$

Mithilfe der Formelsammlung können die Integrale bestimmt werden. Dadurch ergibt sich für den Auftriebsbeiwert

$$c_l = \pi(2A_0 + A_1) \quad .$$

Die Ableitung der Funktion der Skelettlinie ist

$$\frac{dZ^{(s)}}{dX} = -3X^2 + \frac{20}{6}X - \frac{4}{6} \quad .$$

Mit der Transformation $X = \frac{1+\cos(\varphi)}{2}$ ergibt sich

$$\frac{dZ^{(s)}}{dX} = -3 \left(\frac{1+\cos(\varphi)}{2} \right)^2 + \frac{20}{6} \left(\frac{1+\cos(\varphi)}{2} \right) - \frac{4}{6} \quad .$$

Durch Einsetzen der transformierten Ableitung in die kinematische Randbedingung

$$\alpha - \frac{dZ(s)}{dX} = \sum_{n=0}^N A_n \cos(n\varphi)$$

ergibt sich

$$\alpha + 3 \left(\frac{1 + \cos(\varphi)}{2} \right)^2 - \frac{20}{6} \left(\frac{1 + \cos(\varphi)}{2} \right) + \frac{4}{6} = \sum_{n=0}^N A_n \cos(n\varphi) \quad .$$

Mithilfe der Formelsammlung kann diese Beziehung zu

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N A_n \cos(n\varphi) &= \alpha + 3 \left(\frac{1 + 2 \cos(\varphi) + \cos^2(\varphi)}{4} \right) - \frac{20}{6} \left(\frac{1 + \cos(\varphi)}{2} \right) + \frac{4}{6} \\ \Leftrightarrow \sum_{n=0}^N A_n \cos(n\varphi) &= \alpha + 3 \left(\frac{1 + 2 \cos(\varphi) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\varphi)}{4} \right) - \frac{20}{6} \left(\frac{1 + \cos(\varphi)}{2} \right) + \frac{4}{6} \\ \Leftrightarrow \sum_{n=0}^N A_n \cos(n\varphi) &= \alpha + \frac{9}{8} - \frac{10}{6} + \frac{4}{6} + \frac{3}{2} \cos(\varphi) - \frac{10}{6} \cos(\varphi) + \frac{3}{8} \cos(2\varphi) \end{aligned}$$

umgeformt werden. Mit einem Koeffizientenvergleich können anschließend A_0 , A_1 und A_2 zu

$$A_0 = \alpha + \frac{1}{8}, \quad A_1 = -\frac{1}{6}, \quad A_2 = \frac{3}{8}$$

bestimmt werden. Der Auftriebsbeiwert ist somit

$$c_l = \pi(2A_0 + A_1) = 2\pi\alpha + \frac{\pi}{12} \quad .$$

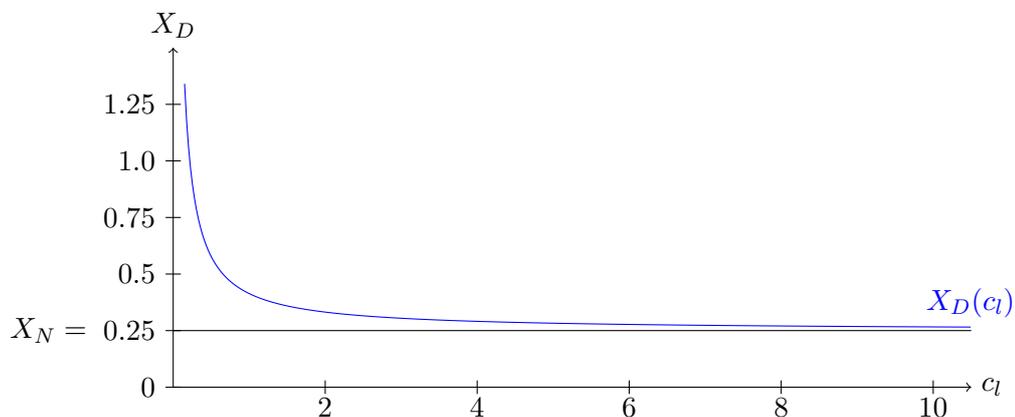
4. (3 Punkte)

Mithilfe des Hinweises und den Koeffizienten aus Aufgabenteil 3. gilt für den Momentenbeiwert des Profils

$$c_m = -\frac{\pi}{4}(2A_0 + 2A_1 + A_2) = -\frac{\pi}{2}\alpha - \frac{7\pi}{96}$$

Die Position des Druckpunktes ergibt sich aus dem Momentengleichgewicht zu

$$X_D = -\frac{c_m}{c_l} = \frac{\frac{\pi}{4} \left(\frac{c_l}{\pi} + A_1 + A_2 \right)}{c_l} = \frac{1}{4} + \frac{\frac{\pi}{4}(A_1 + A_2)}{c_l} = \frac{1}{4} + \frac{5\pi}{96} \frac{1}{c_l}$$



5. (7 Punkte)

Der geometrische Anstellwinkel $\alpha_g = \alpha_{eff} + \alpha_i$ setzt sich aus dem effektiven Anstellwinkel α_{eff} und dem induzierten Anstellwinkel α_i zusammen. Der lokale effektive Anstellwinkel für einen unsymmetrischen Flügel ist definiert als

$$\alpha_{eff} = \frac{c_l}{2\pi} + \alpha_0 \quad .$$

Mit dem lokalen Auftriebsbeiwert $c_l(\varphi) = \frac{\hat{L}(\varphi)}{\frac{1}{2}\rho_\infty u_\infty^2 l(\varphi)} = \frac{\Gamma(\varphi)}{\frac{1}{2}u_\infty l(\varphi)}$, der konstanten Sehnenlänge des Tragflügels $l(\varphi) = l$ und dem Nullauftriebswinkel $c_l(\alpha_0) = 0 \Rightarrow \alpha_0 = -\frac{1}{24}$ aus Aufgabenteil 3. ergibt dies

$$\alpha_{eff}(\varphi) = \frac{\Gamma(\varphi)}{\pi u_\infty l} - \frac{1}{24}$$

Der induzierte Anstellwinkel α_i entspricht für kleine Winkel näherungsweise

$$\alpha_i(y) = -\frac{w_i}{u_\infty} = \frac{1}{4\pi u_\infty} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{d\Gamma}{dy'} dy'$$

Mit der Koordinatentransformation $y = -\frac{b}{2} \cos(\varphi)$ kann der geometrische Anstellwinkel als Funktion von φ formuliert werden.

$$\alpha_g(\varphi) = \frac{\Gamma(\varphi)}{\pi u_\infty l} - \frac{1}{24} - \frac{1}{2\pi b u_\infty} \int_0^\pi \frac{\frac{d\Gamma}{d\varphi'} d\varphi'}{\cos(\varphi) - \cos(\varphi')}$$

Für die allgemeine Zirkulationsverteilung gilt der Ansatz

$$\Gamma(\varphi) = \Gamma_0 \sum_{n=1}^N A_n \sin(n\varphi)$$

Abgeleitet ergibt dies

$$\frac{d\Gamma(\varphi)}{d\varphi} = \Gamma_0 \sum_{n=1}^N n A_n \cos(n\varphi)$$

Daraus resultiert folgende Formulierung für den geometrischen Anstellwinkel

$$\begin{aligned} \alpha_g(\varphi) &= \frac{\Gamma_0 \sum_{n=1}^N A_n \sin(n\varphi)}{\pi u_\infty l} - \frac{1}{24} - \frac{1}{2\pi b u_\infty} \int_0^\pi \frac{\Gamma_0 \sum_{n=1}^N n A_n \cos(n\varphi') d\varphi'}{\cos(\varphi) - \cos(\varphi')} \\ \Leftrightarrow \alpha_g(\varphi) &= \frac{\Gamma_0 \sum_{n=1}^N A_n \sin(n\varphi)}{\pi u_\infty l} - \frac{1}{24} + \frac{\Gamma_0}{2b u_\infty} \sum_{n=1}^N n A_n \frac{\sin(n\varphi)}{\sin(\varphi)} \end{aligned}$$

mit dem Glauertintegral

$$\int_0^\pi \frac{\sum_{n=1}^N n A_n \cos(n\varphi') d\varphi'}{\cos(\varphi) - \cos(\varphi')} = -\pi \sum_{n=1}^N n A_n \frac{\sin(n\varphi)}{\sin(\varphi)}$$

Für eine elliptische Auftriebsverteilung, dessen Zirkulation an der Flügelwurzel $\Gamma(y=0) = \Gamma_0$ beträgt, gilt $\Gamma(\varphi) = \Gamma_0 \sin(\varphi)$. Daraus resultiert die gesuchte Funktion des lokalen geometrischen Anstellwinkels

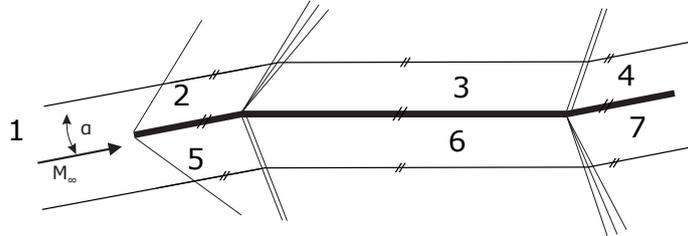
$$\alpha_g(\varphi) = \frac{\Gamma_0 \sin(\varphi)}{\pi u_\infty l} - \frac{1}{24} + \frac{\Gamma_0}{2b u_\infty}$$

Lösung 3. Aufgabe: Überschallströmung (17 Punkte) (Lösung)

1. Das Profil wird zunächst **ohne** Annahmen der linearisierten Potentialtheorie **mittels der allgemeinen gasdynamischen Beziehungen** untersucht.

Der Anstellwinkel beträgt $\alpha_1 = 20^\circ$ und die Klappen sind um $\eta_1 = 20^\circ$ ausgeschlagen. Die Machzahl der freien Anströmung ist $M_\infty = M_1 = 5.0$.

- (a) Skizze:



- (b) Mit der idealen Gasgleichung $p_1 = \rho_1 RT_1$ sowie der Beziehung für die Schallgeschwindigkeit $c_1 = \sqrt{\gamma RT_1}$ ergibt sich für den Auftriebsbeiwert:

$$c_l = \frac{\hat{L}}{\frac{\rho_1}{2} V_1^2 l} = \frac{\hat{L}}{\frac{\rho_1}{2} M_\infty^2 \cdot c_1^2 l} = \frac{\hat{L}}{\frac{\rho_1}{2} M_\infty^2 \cdot \gamma RT_1 l} = \frac{2}{\gamma M_\infty^2} \frac{\hat{L}}{p_1 l}$$

Die Auftriebskraft ist senkrecht zur Anströmung und ergibt sich aus der Druckkraftdifferenz:

$$\begin{aligned} \hat{L} &= \hat{N}_{2,5} \cos(\alpha_1 - \eta_1) + \hat{N}_{3,6} \cos \alpha_1 + \hat{N}_{4,7} \cos(\alpha_1 - \eta_1) \\ &= 0.25l \cdot (p_5 - p_2) \cos(\alpha_1 - \eta_1) + 0.5l \cdot (p_6 - p_3) \cos \alpha_1 + 0.25l \cdot (p_7 - p_4) \cos(\alpha_1 - \eta_1) \end{aligned}$$

Somit ergibt sich für den Auftriebsbeiwert:

$$c_l = \frac{2}{\gamma M_\infty^2} \left[\left(\frac{p_5}{p_1} - \frac{p_2}{p_1} \right) \cdot 0.25 + \left(\frac{p_6}{p_1} - \frac{p_3}{p_1} \right) \cdot 0.5 \cos \alpha_1 + \left(\frac{p_7}{p_1} - \frac{p_4}{p_1} \right) \cdot 0.25 \right]$$

- (c) Zustandsänderungen für die Unterseite:

Von 1 nach 5 wird die Strömung nicht umgelenkt, sodass sich nur eine Machsche Linie ausbildet und sich die Zustandsgrößen nicht ändern. Daraus folgt für das Druckverhältnis $\frac{p_5}{p_1} = 1$.

Kompression von 5 nach 6 $\Rightarrow \beta_{5,6} = \beta_{1,6} = |\alpha_1| = 20^\circ$

$$M_5 = M_1 = 5 \quad (\text{Abb. 3.4}) \Rightarrow \sigma_{5,6} \approx 30^\circ$$

$$M_{5n} = M_{1n} = 5 \cdot \sin 30^\circ \approx (\text{Tabelle aus dem Hinweis}) 5 \cdot 0.5 = 2.5$$

Für das gesuchte Druckverhältnis folgt:

$$(\text{Abb. 3.3}) \Rightarrow \frac{p_6}{p_1} = \frac{p_6}{p_5} (M_{5n} = 2.5) \approx 7$$

Bestimmung des Zustandes 6:

$$M_{5n} = 2.5 \quad (\text{Abb. 3.2}) \Rightarrow M_{6n} \approx 0.5$$

$$M_6 = \frac{M_{6n}}{\sin(\sigma_{5,6} - \beta_{5,6})} = \frac{0.5}{\sin(30^\circ - 20^\circ)} = \frac{0.5}{\sin 10^\circ} \approx (\text{Tabelle aus dem Hinweis}) 0.5 \cdot 6 = 3$$

Expansion von 6 nach 7 $\Rightarrow \nu_7 = \nu_6 + |\eta_1|$

$$M_6 = 3 \quad (\text{Abb. 3.1}) \Rightarrow \nu_6 = 50^\circ \Rightarrow \nu_7 = 50^\circ + 20^\circ = 70^\circ \quad (\text{Abb. 3.1}) \Rightarrow M_7 \approx 4.3$$

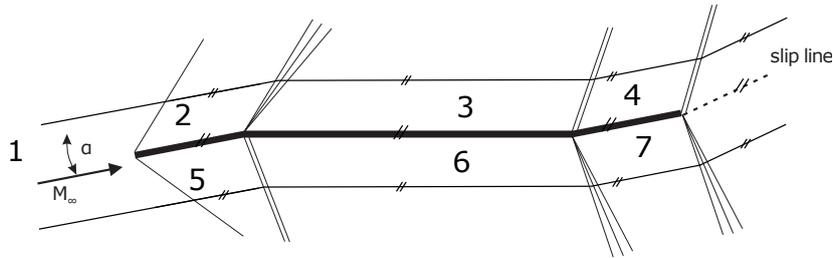
Für das letzte gesuchte Druckverhältnis folgt:

$$\frac{p_7}{p_1} = \frac{p_7}{p_{07}} \cdot \frac{p_{07}}{p_{06}} \cdot \frac{p_{06}}{p_6} \cdot \frac{p_6}{p_1} = \frac{p_7}{p_{07}} \cdot \frac{p_{06}}{p_6} \cdot \frac{p_6}{p_1}$$

$$(\text{Abb. 3.3}) \Rightarrow \frac{p_{06}}{p_6} (M_6 = 3) \approx 40, \quad \frac{p_{07}}{p_7} (M_7 = 4.3) \approx 240$$

$$\frac{p_7}{p_1} = \frac{1}{240} \cdot 40 \cdot 7 = \frac{7}{6}$$

- (d) Der statische Druck im bei (c) bestimmten Zustand 7 ist höher als im Zustand 4 ($\frac{p_7}{p_1} > \frac{p_4}{p_1}$). Es findet ein Druckausgleich an der Hinterkante des Profils statt. Die Strömung auf der Unterseite expandiert nach, während auf der Oberseite eine Kompression stattfindet. Die Trennlinie zwischen den Gebieten mit gleichem Druck jedoch unterschiedlichen Geschwindigkeiten ist eine Diskontinuitätslinie (*slip line*).



2. (a) Mit dem Hinweis $c_{p,linTheorie} = \pm \frac{2\beta}{\sqrt{Ma^2 - 1}}$

$$\Delta c_{p_{5,2}} = \frac{4(\alpha - \eta_k)}{\sqrt{Ma_\infty^2 - 1}}, \quad \Delta c_{p_{6,3}} = \frac{4\alpha}{\sqrt{Ma_\infty^2 - 1}} \quad \text{und} \quad \Delta c_{p_{7,4}} = \frac{4(\alpha - \eta_k)}{\sqrt{Ma_\infty^2 - 1}}$$

Der Auftriebsbeiwert ergibt sich zu:

$$c_l = \int_0^1 \Delta c_p dX = \frac{4}{\sqrt{Ma_\infty^2 - 1}} (0.25(\alpha - \eta_k) + 0.5\alpha + 0.25(\alpha - \eta_k)) = \frac{4\alpha - 2\eta_k}{\sqrt{Ma_\infty^2 - 1}}$$

- (b) Für den Widerstandsbeiwert ergibt sich:

$$c_w = \int_0^1 \Delta c_p \cdot \beta_i dX = \frac{4}{\sqrt{Ma_\infty^2 - 1}} \left(0.25(\alpha - \eta_k)^2 + 0.5\alpha^2 + 0.25(\alpha - \eta_k)^2 \right) = \frac{4\alpha^2 - 4\alpha\eta_k + 2\eta_k^2}{\sqrt{Ma_\infty^2 - 1}}$$