

AERODYNAMISCHES INSTITUT
der Rheinisch - Westfälischen
Technischen Hochschule Aachen
Univ.-Prof. Dr.-Ing. W. Schröder

Klausur

Aerodynamik II

03. 09. 2018

M U S T E R L Ö S U N G
E I N S I C H T N A H M E

Hinweis:

Achten Sie darauf, ob Sie alle Aufgaben erhalten haben.

Klausur Aerodynamik II

Fragenteil, Traglinientheorie, Überschall und numerische Verfahren

Integrale und Additionstheoreme

Additionstheoreme

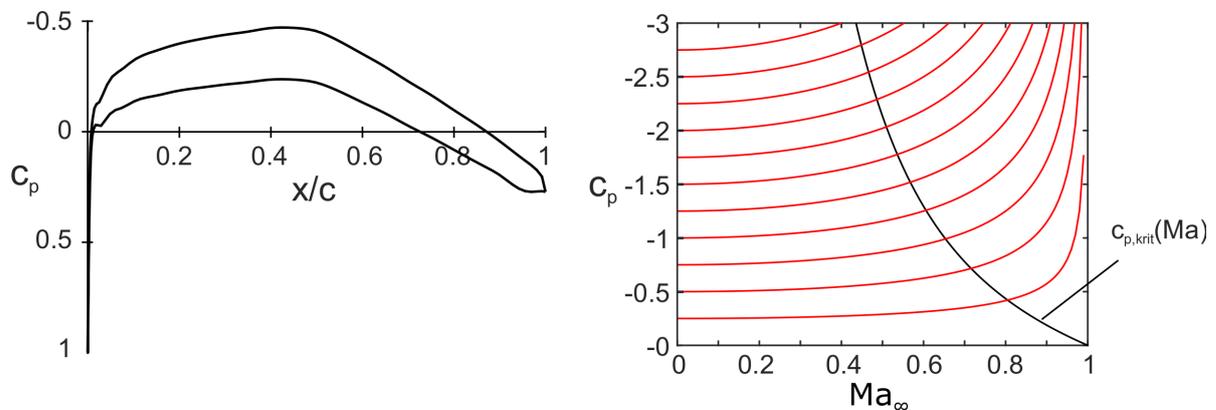
- $\sin(x \pm y) = \sin(x) \cdot \cos(y) \pm \sin(y) \cdot \cos(x)$
- $\cos(x \pm y) = \cos(x) \cdot \cos(y) \mp \sin(x) \cdot \sin(y)$
- $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
- $\sin(2x) = 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$
- $\sin(x) = 2 \cdot \sin(x/2) \cdot \cos(x/2)$
- $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$
- $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$
- $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$
- $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$
- $\tan\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \sin(x) = 1 - \cos(x)$
- $\sin(x) \cdot \sin(nx) = -\frac{1}{2}(\cos[(n+1)x] - \cos[(n-1)x])$
- $\sin[(n+1)x] - \sin[(n-1)x] = 2 \cdot \cos(nx) \cdot \sin(x)$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(n\varphi_p) \cdot \sin(n\varphi) = \frac{1}{4} \ln\left(\frac{1 - \cos(\varphi_p + \varphi)}{1 - \cos(\varphi_p - \varphi)}\right)$

Integrale

- $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \cdot \ln(ax+b)$
- $\int \frac{x}{ax+b} dx = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2} \cdot \ln(ax+b)$
- $\int \frac{x^2}{X} dx = \frac{1}{a^3} \left[\frac{1}{2}(X) - 2b(X) + b^2 \ln(X) \right]$
mit $X = ax+b$
- $\int \sin(ax) dx = -\frac{\cos(ax)}{a}$
- $\int \cos(ax) dx = +\frac{\sin(ax)}{a}$
- $\int \sin^2(ax) dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4a} \sin(2ax)$
- $\int \cos^2(ax) dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4a} \sin(2ax)$
- $\int \sin^3(ax) dx = \frac{\cos^3(ax)}{3a} - \frac{\cos(ax)}{a}$
- $\int \cos^3(ax) dx = -\frac{\sin^3(ax)}{3a} + \frac{\sin(ax)}{a}$
- $\int \cos^4(ax) dx = \frac{3}{8}x + \frac{\sin(2ax)}{4a} + \frac{\sin(4ax)}{32a}$
- $\int \sin(ax) \cos(ax) dx = \frac{\sin^2(ax)}{2a}$
- $\int_0^{\pi} \cos(n \cdot \varphi) \cdot \cos(p \cdot \varphi) d\varphi = \begin{cases} \pi/2 & n = p \\ 0 & n \neq p \end{cases}$
- $\int_0^{\pi} \sin(n \cdot \varphi) \cdot \sin(p \cdot \varphi) d\varphi = \begin{cases} \pi/2 & n = p \\ 0 & n \neq p \end{cases}$
- Glauert-Integral
 $\int_0^{\pi} \frac{\cos(n \cdot \varphi')}{\cos(\varphi) - \cos(\varphi')} d\varphi' = -\pi \cdot \frac{\sin(n \cdot \varphi)}{\sin(\varphi)}$
- $\int \cos(ax) \cdot \cos(bx) dx = \frac{\sin[(a-b)x]}{2(a-b)} + \frac{\sin[(a+b)x]}{2(a+b)} \quad \forall |a| \neq |b|$

1. Aufgabe: Fragenteil (16 Punkte)

1. Geben Sie drei Ablöseformen für eine inkompressible Profilmströmung an und skizzieren Sie diese.
2. (a) Erläutern Sie stichpunktartig den natürlichen Transitionsvorgang von einem laminaren in einen vollturbulenten Grenzschichtzustand.
 (b) Skizzieren Sie den zu erwartenden Verlauf des Reibungsbeiwertes $c_f(Re_L)$ entlang einer ebenen Platte für $10^2 < Re_L < 10^7$.
3. Geben Sie die wesentlichen Unterschiede zwischen der Traglinientheorie und der Tragflächentheorie an. Mit welcher dieser Theorien kann die Geschwindigkeits- und Druckverteilung auf dem gesamten Tragflügel ermittelt werden?
4. In einem Wasserkanalversuch wurde die in der linken Abbildung gezeigte Druckverteilung um das Flügelprofil NACA 65₁-212 gemessen. In der rechten Abbildung ist der Verlauf des kritischen Druckbeiwertes in Abhängigkeit der Anströmmachzahl sowie eine Kurvenschar für die Kompressibilitätskorrektur nach der Prandtl-Glauert-Regel für unterschiedliche inkompressible $c_{p,inkomp}$ Werte gezeigt.



- (a) Leiten Sie einen Ausdruck für den kritischen Druckbeiwert $c_{p,krit}$ als Funktion der Machzahl Ma_∞ her.
- (b) Wie lautet die Prandtl-Glauert-Regel? Welche Voraussetzungen müssen für ihre Anwendbarkeit erfüllt sein?
- (c) Erläutern Sie den Begriff der kritischen Machzahl und bestimmen Sie diese für das gegebene Profil.

Hinweis:

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2$$

$$\frac{T_0}{T} = \left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{\gamma-1}$$

Falls nötig, übertragen Sie die Skizzen in Ihre Lösungsblätter und zeichnen Sie die Lösung dort ein!

2. Aufgabe: Traglinientheorie (18 Punkte)

1. Skizzieren Sie unter Berücksichtigung eines geometrischen Anstellwinkels von α_g und einer Anströmgeschwindigkeit V_∞ die Anströmverhältnisse und aerodynamischen Kräfte an einem Tragflügel endlicher Spannweite.
2. Leiten Sie die der Prandtlschen Traglinientheorie zugrunde liegende Fundamentalgleichung her:

$$\alpha_g(y) = \frac{\Gamma(y)}{\pi V_\infty c(y)} + \alpha_{L=0}(y) + \frac{1}{4\pi V_\infty} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{d\Gamma}{dy'} \frac{dy'}{y - y'}.$$

Hinweis: Leiten Sie zunächst die Gleichung zur Bestimmung der induzierten Abwärtsgeschwindigkeit her.

3. Zeigen Sie, dass für eine elliptische Zirkulationsverteilung $\Gamma(y) = \Gamma_0 \sqrt{4 - \left(\frac{4y}{b}\right)^2}$ der induzierte Anstellwinkel konstant ist.
4. Bestimmen Sie die Flügeltiefenverteilung für die elliptische Zirkulationsverteilung aus Aufgabenteil 3 für einen unverwundenen, symmetrischen Tragflügel und skizzieren Sie den Flügelgrundriss.
5. Nennen Sie eine Maßnahme zur Reduzierung des induzierten Widerstandes für einen Flügel mit elliptischer Zirkulationsverteilung und gleichbleibendem Auftriebsbeiwert. Begründen Sie ihre Antwort.
6. Nennen Sie zwei Maßnahmen, um eine elliptische Zirkulationsverteilung für einen allgemeinen Flügelgrundriss anzunähern.

gegeben: $b, \Gamma_0, V_\infty, \alpha_g$

Hinweise:

Koordinatentransformation:

$$y = -\frac{b}{2} \cos(\varphi)$$

ind. Geschwindigkeit eines halbunendlichen Stabwirbels:

$$V_i = \frac{\Gamma}{4\pi a}$$

3. Aufgabe: Überschall und numerische Verfahren (16 Punkte)

Zur Grundausslegung eines Überschalljets soll die Umströmung eines schlanken Doppelkeils mit einem Öffnungswinkel $\epsilon = 10^\circ$ unter einem Anstellwinkel von $\alpha = 5^\circ$ bei einer Machzahl von $Ma_\infty = 1.5$ durch numerische Lösung der Eulergleichungen approximiert werden. Es wird von einer zweidimensionalen Strömung ausgegangen.

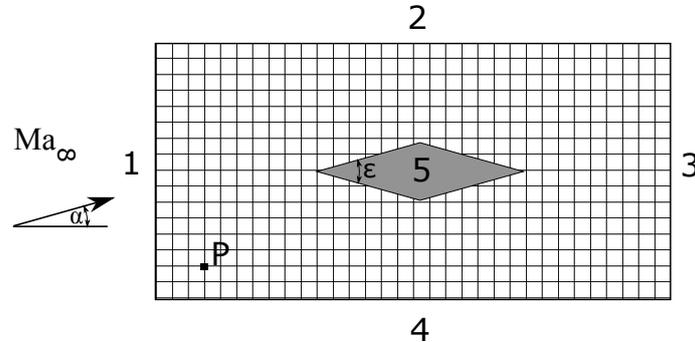


Abbildung 3.1: Gitter.

1. Das abgebildete Gitter soll für die numerische Simulation herangezogen werden. Welche Effekte der Überschallumströmung können mit diesem Gitter nicht korrekt erfasst werden?
2. Skizzieren Sie ein sinnvolles lokal verfeinertes kartesisches Gitter für den obigen Fall mit dem die zu erwartenden Effekte erfasst werden können. Zeichnen und benennen Sie alle auftretenden Überschalleffekte in derselbigen Skizze.
3. Zeichnen Sie qualitativ die Zustandsänderungen für die Strömung entlang einer Stromlinie S auf der Unterseite des Doppelkeils in der Hodographenebene.
4. Erläutern Sie mittels der Charakteristikentheorie die Wahl der Ein- und Auströmrandbedingungen und geben Sie alle für die Lösung des Problems notwendigen Randbedingungen für die Geschwindigkeitskomponenten (u, v) in Hauptströmungsrichtung und in Normalenrichtung an.
5. Die oben abgebildete Überschallströmung kann durch die folgende partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung des Geschwindigkeitspotentials - einer Wellengleichung - beschrieben werden:

$$-\beta^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0, \quad \beta = \sqrt{Ma^2 - 1}, \quad Ma > 1. \quad (1)$$

Diese soll durch ein numerisches Differenzenverfahren gelöst werden. Entwickeln Sie aus der Taylorreihe

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m f(x_0)}{\partial x^m} \cdot (x - x_0)^m \quad (2)$$

eine zentrale Approximation für die zweite Ableitung einer Funktion $\phi(x)$ auf einem äquidistanten Gitter, die 2. Ordnung genau in x ist. Geben Sie den führenden Term des Abbruchfehlers an.

6. Betrachtet wird der Punkt P in der freien Anströmung:
 - (a) Mit welcher Geschwindigkeit können sich die konvektiven Flüsse in diesem Punkt maximal ausbreiten?
 - (b) In welchem geometrischen Bereich breiten sich Druckstörungen, die im Punkt P entstehen, aus und mit welcher Geschwindigkeit bewegen sich die Drucksignale maximal fort?

Gegeben: $Ma_\infty = 1.5$, U_∞ , $\alpha = 5^\circ$ und $\epsilon = 10^\circ$.

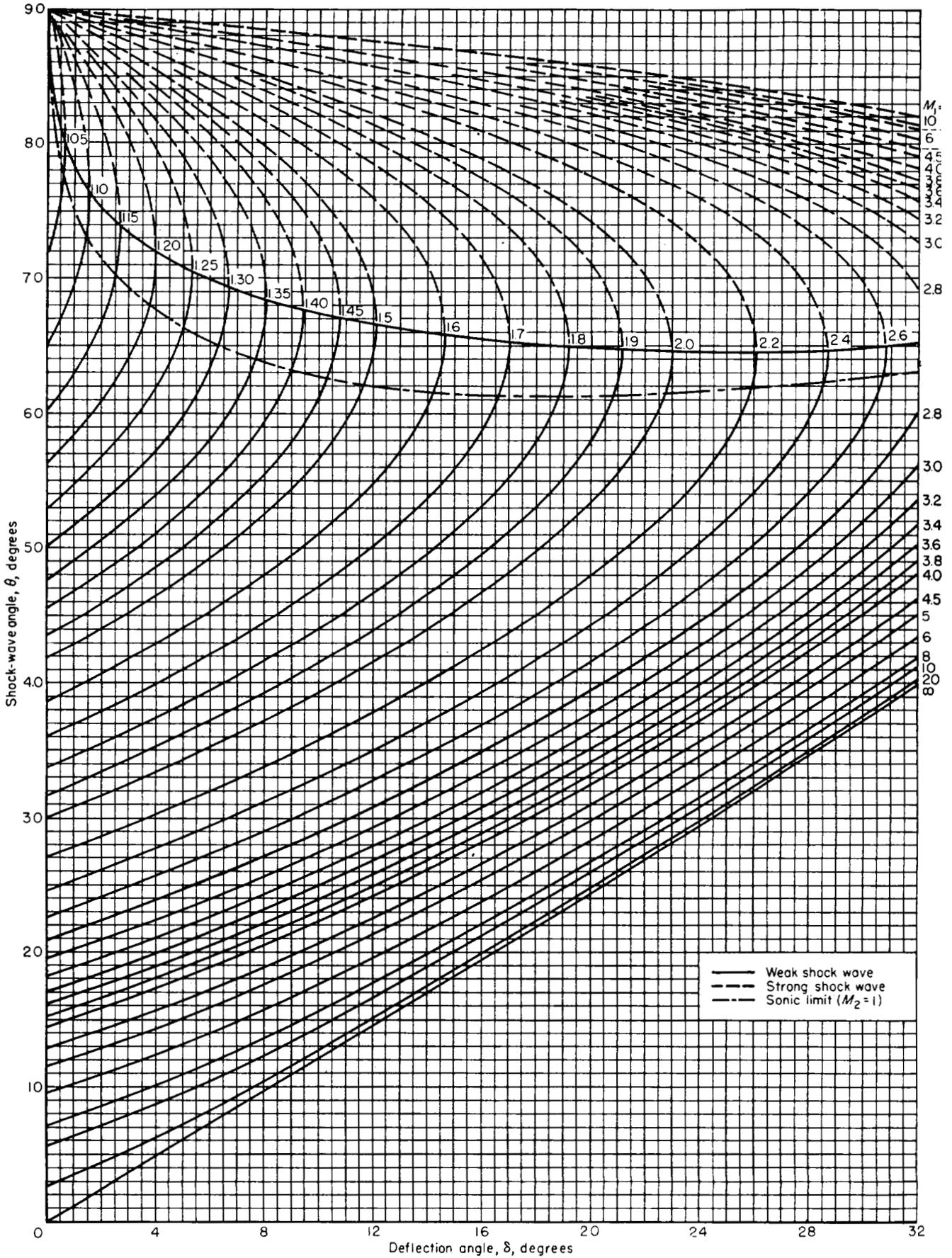
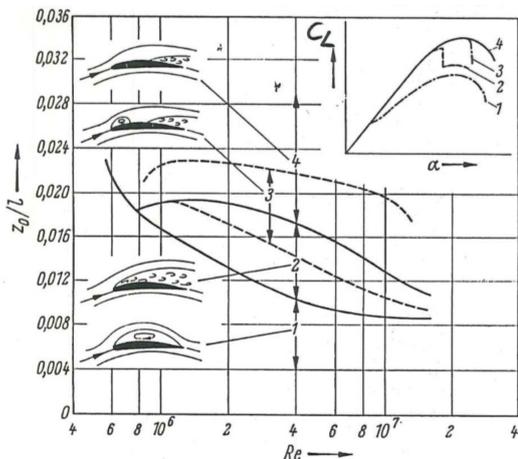


CHART 2.—Variation of shock-wave angle with flow-deflection angle for various upstream Mach numbers Perfect gas, $\gamma = \frac{7}{5}$.

Lösung 1. Aufgabe: Fragenteil (16 Punkte)(LÖSUNG)

1. Folgende vier Ablöseformen existieren für inkompressible Profilmströmung:



- 1) thin-airfoil stall (1) 1
- 2) lead.-edge stall (1) 2
- 3) combined lead.-edge and trail.-edge stall (1) 3
- 4) trail.-edge stall (1) 3

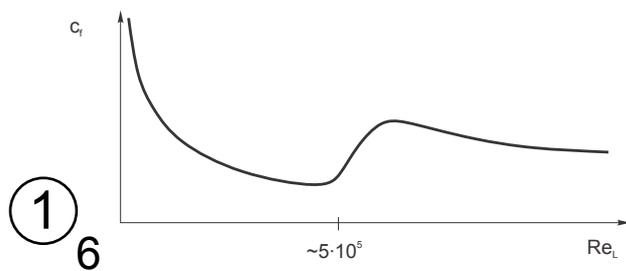
2. (a) Transitionsvorgang in einer Grenzschicht: In einer anfangs laminaren Strömung existiert abhängig von äußeren Bedingungen (z.B. Turbulenzgrad in der Anströmung) ein breites Spektrum an instationären Störungen in v_i und p . Ein schmales Frequenzband, in welchem die relevanten Wellenzahlen und Wellenlängen u. a. von der Verdrängungsdicke und der Reynoldszahl abhängen, führt zu einer Anfachung der zwei-dimensionalen Instabilität der Strömung, den sog. Tollmien-Schlichting Wellen. Stromab davon werden sog. λ Strukturen bzw. deren Untergattungen beobachtet, die im weiteren Verlauf auseinanderbrechen und Strukturen wie Haarnadelwirbel treten auf. Es bilden sich darauf turbulente Flecken, die weiter stromab eine voll ausgebildete turbulente Strömung ergeben. Der Umschlag ist bei einer Reynoldszahl bezogen auf die Lauflänge von $Re_x = 3 \cdot 10^5 - 5 \cdot 10^5$ zu erwarten. Der genaue Wert hängt maßgeblich von den initialen Störungen in der Grenzschicht ab.

1

4

1 5

(b) Der zu erwartende Verlauf des Reibungsbeiwertes entlang der Platte $c_f(Re_L)$:



1 6

3. Traglinientheorie:

- Die Zirkulation Γ ist auf eine Linie konzentriert
- Nur anwendbar für symmetrisch angeströmte Profile mit gerader 1/4-Linie
- Mit hinreichender Genauigkeit anwendbar für große Streckungen (ca. $\Lambda > 5$)
- Ermittlung der Auftriebsverteilung über Spannweite

1 7

Tragflächentheorie:

- Zirkulation Γ ist flächenhaft verteilt
- Anwendbar für Flügel mit beliebigen Grundrissen und Streckungen
- Erfüllung der kinematischen Strömungsbedingung auf der gesamten Flügelfläche
- Ermittlung der Auftriebsverteilung über Spannweite und Profiltiefe

1 8

Die Geschwindigkeits- und Druckverteilung auf der Flügelfläche kann mit Hilfe der Tragflächentheorie ermittelt werden.

① 9

4. (a)

$$c_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{\rho_\infty}{2} u_\infty^2} = \frac{\frac{p}{\rho_\infty} - 1}{\frac{u_\infty^2}{2}} = \frac{\frac{p}{\rho_\infty} - 1}{\frac{u_\infty^2}{RT_\infty} \frac{1}{2}} = \frac{2}{\gamma Ma_\infty^2} \left(\frac{p}{\rho_\infty} - 1 \right) \quad \text{① 10}$$

Es gilt:

$$\frac{p}{\rho_\infty} = \frac{p}{p_0} \frac{p_0}{\rho_0 \rho_\infty} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2 \right)^{\frac{-\gamma}{\gamma - 1}} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma_\infty^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

$c_{p,krit}$ wird erreicht, wenn die lokale Machzahl $Ma = 1$ ist:

$$\begin{aligned} \frac{p}{\rho_\infty} &= \left(\frac{\gamma + 1}{2} \right)^{\frac{-\gamma}{\gamma - 1}} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma_\infty^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \quad \text{① 11} \\ &= \left(\frac{2}{\gamma + 1} + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} Ma_\infty^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \\ \Rightarrow c_{p,krit} &= \frac{2}{\gamma Ma_\infty^2} \left(\left(\frac{2}{\gamma + 1} + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} Ma_\infty^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} - 1 \right) \quad \text{① 12} \end{aligned}$$

(b) Die Prandtl-Glauert-Regel wird für die Transformation der Druckverteilung einer inkompressiblen Strömung in die Druckverteilung einer kompressiblen Strömung benutzt. Die Geometrie des betrachteten Körpers bleibt dabei bestehen.

$$c_p = \frac{c_{p,inkomp}}{\sqrt{|1 - M_\infty^2|}} \quad \text{① 14}$$

- Geschwindigkeitsbereich:

-subsonisch ($M_\infty < 0.8$): Prandtl-Glauert

-supersonisch ($M_\infty > 1.2$): Ackeret

- schlanke Körper

- geringe Anstellwinkel

- reibungs- und drehungsfreie Strömung

① 13

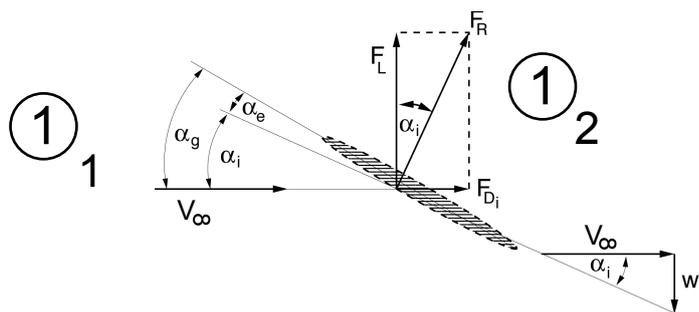
① 15

(c) Die kritische Machzahl Ma_{krit} ist jene Anströmmachzahl, bei der auf der Ober- oder Unterseite des Profils an einer Stelle gerade $Ma = 1$ auftritt. Der kleinste gemessene, inkompressible Druckbeiwert des gegebenen Profils ist $c_{p,ink,min} = -0.5$. Der Schnittpunkt der Kurve für die Kompressibilitätskorrektur nach Prandtl-Glauert mit der Kurve für $c_{p,krit}(Ma_\infty)$ ergibt den gesuchten Zustand. Die kritische Machzahl ist $Ma_{krit} \approx 0.72$

① 16

Lösung 2. Aufgabe: Traglinientheorie (18 Punkte)(LÖSUNG)

1. Skizze:



2. Zwischen dem geometrischen Anstellwinkel $\alpha_g(y)$, dem effektiven Anstellwinkel $\alpha_{eff}(y)$ und dem induzierten Anstellwinkel $\alpha_i(y)$ besteht folgender Zusammenhang:

$$\alpha_g(y) = \alpha_{eff}(y) + \alpha_i(y).$$

Aus der Beziehung $c_l(y) = 2\pi(\alpha_{eff}(y) - \alpha_{L=0}(y))$ und dem Kutta-Zhukhovski Theorem für den lokalen Auftrieb

$$L(y) = \frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2 c(y) c_l(y) = \rho_\infty V_\infty \Gamma(y)$$

bzw.

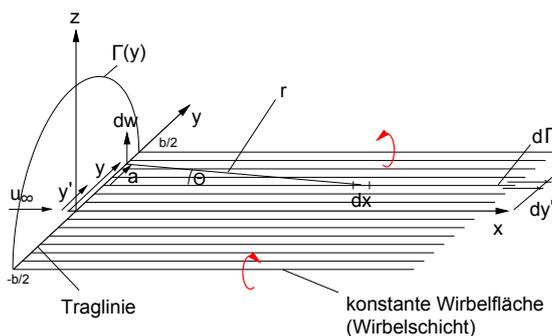
$$c_l(y) = \frac{2\Gamma(y)}{V_\infty c(y)}$$

folgt für den effektiven Anstellwinkel

$$\alpha_{eff}(y) = \frac{\Gamma(y)}{\pi V_\infty c(y)} + \alpha_{L=0}(y).$$

Für den induzierten Anstellwinkel gilt für kleine Winkel $\alpha_i = -w_i(y)/V_\infty$. Somit muss zunächst die Beziehung für die induzierte Abwärtsgeschwindigkeit bestimmt werden.

Betrachtung der Auswirkung des Wirbelfadens an der Stelle y' auf die Stelle y :



Für einen halbunendlichen Wirbel gilt nach Biot-Savart

$$V_i = \frac{\Gamma}{4\pi a}.$$

Somit ergibt sich für das Wirbelsystem am Tragflügel:

$$dw_i = -\frac{1}{4\pi(y-y')} \frac{d\Gamma}{dy'} dy'$$

Das Integral über die gesamte Spannweite ergibt:

$$w_i(y) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{d\Gamma}{dy'} \frac{dy'}{y-y'}$$

Somit kann der induzierte Anstellwinkel wie folgt berechnet werden:

$$\alpha_i(y) = \frac{1}{4\pi V_\infty} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{d\Gamma}{dy'} \frac{dy'}{y-y'} \quad \textcircled{1} \quad 8$$

Damit ergibt sich für die fundamentale Gleichung der Prandtlschen Traglinientheorie eines Tragflügels zur Bestimmung von $\Gamma(y)$ in Abhängigkeit von $l(y)$:

$$\begin{aligned} \alpha_g(y) &= \alpha_{eff}(y) + \alpha_i(y) \\ &= \frac{\Gamma(y)}{\pi V_\infty c(y)} + \alpha_{L=0}(y) + \frac{1}{4\pi V_\infty} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{d\Gamma}{dy'} \frac{dy'}{y-y'} \end{aligned}$$

3. Bestimmung der Zirkulationsverteilung in Polarkoordinaten mit der Transformation $y = -\frac{b}{2} \cos \varphi$:

$$\Gamma(\varphi) = \Gamma_0 \sqrt{4 - \left(\frac{4y}{b}\right)^2} = 2\Gamma_0 \sqrt{1 - \left(-\frac{2y}{b}\right)^2} = 2\Gamma_0 \sqrt{1 - \left(\frac{2b}{b} \cos \varphi\right)^2} = 2\Gamma_0 \sin \varphi \quad \textcircled{1} \quad 9$$

Transformation der induzierten Abwärtsgeschwindigkeit in Polarkoordinaten mit $dy = \frac{b}{2} \sin \varphi d\varphi$

$$w_i = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{d\Gamma(y')}{dy'} \frac{dy'}{y-y'} = \frac{1}{2\pi b} \int_0^\pi \frac{d\Gamma(\varphi')}{d\varphi'} \frac{d\varphi'}{\cos \varphi - \cos \varphi'} \quad \textcircled{1} \quad 10$$

Einsetzen der Zirkulationsverteilungsableitung $d\Gamma(\varphi') = 2\Gamma_0 \cos \varphi' d\varphi'$ ergibt:

$$w_i(\varphi) = \frac{\Gamma_0}{\pi b} \int_0^\pi \frac{\cos \varphi'}{\cos \varphi - \cos \varphi'} d\varphi' \quad \textcircled{1} \quad 11$$

Integration liefert

$$w_i(\varphi) = -\frac{\Gamma_0}{\pi b} \pi = -\frac{\Gamma_0}{b} = const. \neq f(\varphi).$$

Damit lautet der induzierte Anstellwinkel:

$$\alpha_i(\varphi) = \frac{\Gamma_0}{bV_\infty} \quad \textcircled{1} \quad 12$$

4. Für einen symmetrischen, unverwundenen Tragflügel ist $\alpha_g(y) = \alpha_g = const.$ und $\alpha_{L=0} = 0$. Weiterhin ist für eine elliptische Zirkulationsverteilung der induzierte Anstellwinkel konstant. Somit ergibt sich für die Flügeltiefenverteilung:

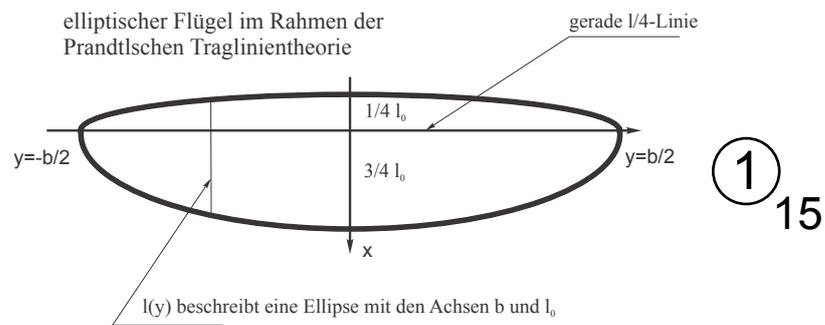
$$\alpha_{eff}(y) = \frac{\Gamma(y)}{V_\infty c(y)\pi} = \alpha_g(y) - \alpha_i \quad \textcircled{1} \quad 13$$

mit $\Gamma(y) = \Gamma_0 \sqrt{4 - \left(\frac{4y}{b}\right)^2}$ ergibt sich für die Tiefenverteilung:

$$c(y) = \frac{\Gamma(y)}{V_\infty \pi \alpha_g(y) - \alpha_i} = \frac{\Gamma(y)}{V_\infty \pi \alpha_g - \frac{\Gamma_0}{bV_\infty}} = \underbrace{\sqrt{4 - \left(\frac{4y}{b}\right)^2}}_{\text{ellipt.}} \underbrace{\frac{\Gamma_0}{V_\infty \pi \alpha_g - \frac{\Gamma_0}{bV_\infty}}}_{\text{const.}} \quad \textcircled{1} 14$$

Die Verteilung ist also elliptisch. Somit ergibt sich für den Grundriss mit gerader $l/4$ -Linie:

$$l_0 = c(0) = 2 \frac{\Gamma_0}{V_\infty \pi \alpha_g - \frac{\Gamma_0}{bV_\infty}}$$



5. Für den induzierte Widerstandsbeiwert gilt:

$$c_{wi} = \frac{c_a^2}{\pi \Lambda} \quad \textcircled{1} 16$$

Somit kann nur durch Erhöhung der Streckung der induzierte Widerstand gesenkt werden.

6. Um eine elliptische Auftriebsverteilung für einen Tragflügel ohne elliptischen Grundriss anzunähern, gibt es folgende Möglichkeiten:

- aerodynamische Verwindung

$\textcircled{1}$ 17

- geometrische Verwindung

- Zuspitzung

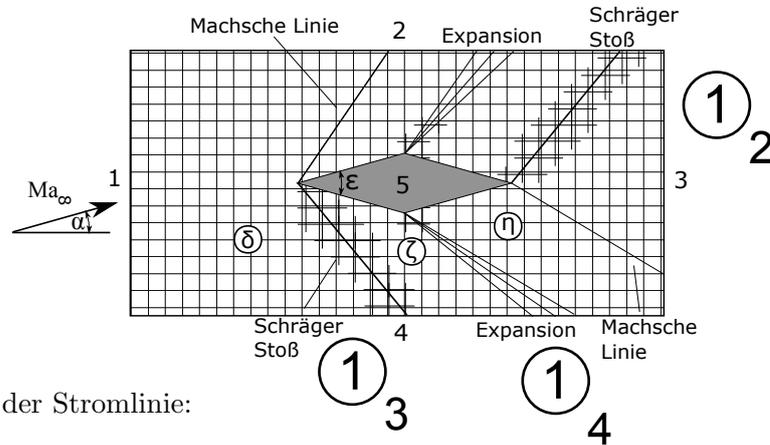
$\textcircled{1}$ 18

Lösung 3. Aufgabe: Numerische Verfahren (16 Punkte)

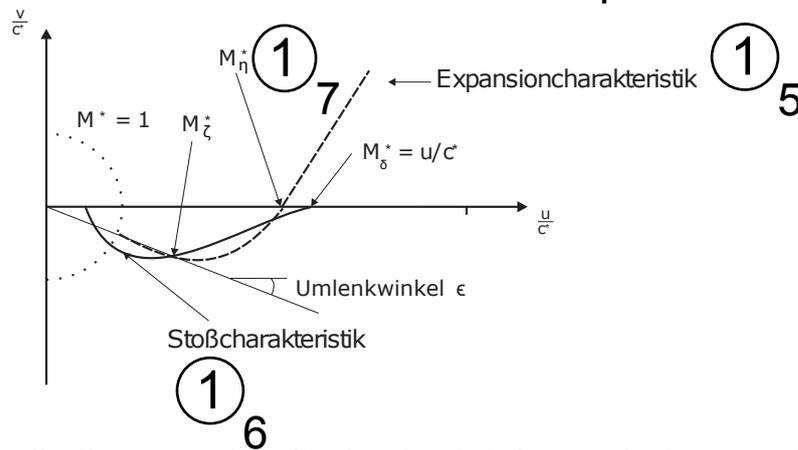
(LÖSUNG)

①

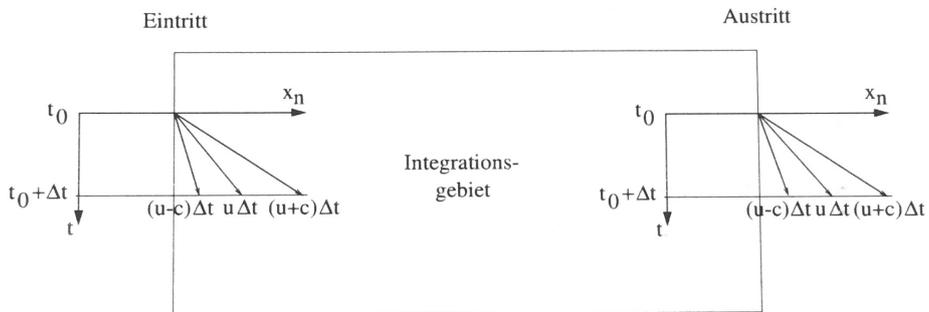
1. Die schrägen Stöße, die sich auf der Unterseite an der Vorderkante und der Oberseite an der Hinterkante ausbilden, können nicht exakt abgebildet werden. Der Ausgangspunkt des Expansionsfächers wird ebenfalls nicht mit der notwendigen Auflösung beschrieben.
2. Stoßsystem und lokal verfeinertes kartesisches Gitter ($\alpha = \frac{\epsilon}{2}$):



3. Hodograph entlang der Stromlinie:



4. Bestimmung der Randbedingungen über die charakteristischen Ausbreitungsgeschwindigkeiten ($u - c, u, u + c$).



- ① 1: Einströmrand; $u(y) = U_\infty \cos(\alpha), v(y) = U_\infty \sin(\alpha)$
- ⑧ 2: Ausströmrand; muss nichts vorgegeben werden; alle Variablen können aus dem Rechengebiet extrapoliert werden $\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \frac{\partial v}{\partial y} = 0$
- ① 9 3: Ausströmrand; muss nichts vorgegeben werden; alle Variablen können aus dem Rechengebiet extrapoliert werden $\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \frac{\partial v}{\partial x} = 0$

4: Einströmrand; $u(x) = U_\infty \cos(\alpha)$, $v(x) = U_\infty \sin(\alpha)$

5: Körperoberfläche; $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ ①
10

5. Taylorreihenapproximation für die zweite Ableitung:

$$I: \quad \phi_{i+1} = \phi_i + \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} \Delta x^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \phi_i}{\partial x^3} \Delta x^3 + \frac{1}{24} \frac{\partial^4 \phi_i}{\partial x^4} \Delta x^4 + \mathcal{O}(\Delta x^5) \quad (3)$$

$$II: \quad \phi_{i-1} = \phi_i - \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} \Delta x^2 - \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \phi_i}{\partial x^3} \Delta x^3 + \frac{1}{24} \frac{\partial^4 \phi_i}{\partial x^4} \Delta x^4 + \mathcal{O}(\Delta x^5) \quad (4)$$
①
11

Addition von I und II ergibt:

$$\phi_{i+1} + \phi_{i-1} = 2\phi_i + \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} \Delta x^2 + \frac{1}{12} \frac{\partial^4 \phi_i}{\partial x^4} \Delta x^4 \quad (5)$$

Damit ergibt sich für die zweite Ableitung:

$$\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} = \frac{\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}}{\Delta x^2} - \left(\frac{1}{12} \frac{\partial^4 \phi_i}{\partial x^4} \Delta x^2 \right)_{\text{Abbruchfehler}} \quad (6)$$
①
13

6. Ausbreitung:

(a) mit etwa eineinhalbfacher Schallgeschwindigkeit ①
12

(b) in einem Kegel mit einem Halböffnungswinkel $\eta = \arcsin\left(\frac{1}{Ma_\infty}\right)$ der in Strömungsrichtung liegt. ①
14

Mit etwa zweieinhalbfacher Schallgeschwindigkeit ①
15

①
16