(Name, Matr.-Nr, Unterschrift)

Klausur „Strömungsmechanik I“ (Bachelor) & „Technische Strömungslehre“ (Diplom)

23. 08. 2017

1. Aufgabe

a) Kräftegleichgewicht am Eiswürfel mit F_{A1} als Einfluss der Luft auf den Auftrieb, F_{A2} als Einfluss des Wassers auf den Auftrieb und der Gewichtskraft F_G:

$$\begin{aligned} F_{A1} + F_{A2} &= F_G \\ F_G &= \rho_E g a^3 \\ F_{A1} &= \rho_L g (a-h) a^2 \\ F_{A2} &= \rho_W g h a^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \rho_L g(a-h)a^2 + \rho_W g h a^2 = \rho_E g a^3 \Leftrightarrow h = a\frac{(\rho_E - \rho_L)}{(\rho_W - \rho_L)}$$

$$\Rightarrow h = a\frac{\left(\rho_E - \frac{p_a}{R_L T_a}\right)}{\left(\rho_W - \frac{p_a}{R_L T_a}\right)} \text{ mit } \rho_L = \frac{p_a}{R_L T_a}$$

b) Ablauf in zwei Schritten

1) Temperaturerhöhung $\rightarrow$ Druckänderung bei konst. Volumen $p_a \rightarrow p_{b1}$
ideales Gas:

$$\frac{p_a}{T_a} = \frac{p_{b1}}{T_b} \Rightarrow p_{b1} = p_a\frac{T_b}{T_a} \Rightarrow p_{b1} = \frac{T_a + \Delta T}{T_a} p_a$$

2) Volumenänderung durch schmelzenden Eiswürfel bei konst. T $\rightarrow$ Druckänderung $p_{b1} \rightarrow p_b$
Massenerhaltung:

$$m_{EW} = \rho_E a^3 = \rho_W V_{geschmolzen} \Rightarrow V_{geschmolzen} = \frac{\rho_E}{\rho_W} a^3$$

Volumenänderung:

$$p_b V_b = p_{b1} V_{b1} \Rightarrow p_b = p_{b1}\frac{V_{b1}}{V_b} = p_a \frac{T_a + \Delta T}{T_a}\frac{V_{b1}}{V_b}$$

Dabei ist V_b das der Luft zur Verfügung stehende Volumen *nach* dem Schmelzen und V_{b1} das der Luft zur Verfügung stehende Volumen *vor* dem Schmelzen.

$$V_{b1} = V_{ges} - V_{Wasser} - V_1 = \frac{2}{3}\pi R^3 + 3\pi R^3 - 2\pi R^3 - a^3 = \frac{5}{3}\pi R^3 - a^3$$

$$V_b = V_{ges} - V_{Wasser} - V_{geschmolzen} = \frac{2}{3}\pi R^3 + 3\pi R^3 - 2\pi R^3 - \frac{\rho_E}{\rho_W} a^3 = \frac{5}{3}\pi R^3 - \frac{\rho_E}{\rho_W} a^3$$

$$p_b = p_a \frac{T_a + \Delta T}{T_a} \frac{\frac{5}{3}\pi R^3 - a^3}{\frac{5}{3}\pi R^3 - \frac{\rho_E}{\rho_W} a^3}$$

2. Aufgabe

a) Die Geschwindigkeiten in den Armen der Ringleitung seien v' und v''. Bernoulli $0 \to B$:

$$\begin{aligned}
p_V + \frac{1}{2}\rho v^2 &= p_a + \frac{1}{2}\rho v^2 \left(1 + \frac{\lambda L}{D}\right) + \frac{1}{2}\rho v'^2 \left(\frac{\lambda L}{D} + \zeta\right) + \rho g L \\
p_V + \frac{1}{2}\rho v^2 &= p_a + \frac{1}{2}\rho v^2 \left(1 + \frac{\lambda L}{D}\right) + \frac{1}{2}\rho v''^2 \frac{\lambda L}{D} + \rho g L \\
\Rightarrow v'^2 \left(\frac{\lambda L}{D} + \zeta\right) &= v''^2 \frac{\lambda L}{D} \\
\Rightarrow \frac{v'}{v''} &= \sqrt{\frac{\frac{\lambda L}{D}}{\frac{\lambda L}{D} + \zeta}} \\
\text{mit Konti: } v' + v'' &= v \Rightarrow v'' \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\frac{\zeta D}{\lambda L} + 1}}\right) = v \\
\text{in Bernoulli: } p_V &= p_a + \frac{1}{2}\rho v^2 \frac{\lambda L}{D} \left(1 + \frac{\frac{\zeta D}{\lambda L} + 1}{\left(\sqrt{\frac{\zeta D}{\lambda L} + 1} + 1\right)^2}\right) + \rho g L
\end{aligned}$$

b) Die Drücke vor bzw. nach der abzweigenden Ringleitung seien p_v bzw. p_n.
Bernoulli v $\to$ n:

$$\begin{aligned}
p_v + \frac{1}{2}\rho v^2 &= p_n + \frac{1}{2}\rho v^2 + \frac{1}{2}\rho v^{*2} \frac{2\lambda L}{D} \\
p_v + \frac{1}{2}\rho v^2 &= p_n + \frac{1}{2}\rho v^2 + \frac{1}{2}\rho \left(v - v^*\right)^2 \zeta \\
\Rightarrow v^2 - 2vv^* + v^{*2} &= \frac{2\lambda L}{D\zeta} v^{*2} \\
\Rightarrow 0 &= v^{*2} + \frac{2v}{\frac{2\lambda L}{D\zeta} - 1} v^* - \frac{v^2}{\frac{2\lambda L}{D\zeta} - 1} \\
\text{Per P-Q-Formel: } v^* &= \frac{v}{\frac{2\lambda L}{D\zeta} - 1} \left(\pm\sqrt{\frac{2\lambda L}{D\zeta}} - 1\right) \\
\text{Da } \tfrac{2\lambda L}{D} > \zeta \text{ und } v^* \text{ nur sinnvoll} > 0 : & \quad \frac{2\lambda L}{D\zeta} - 1 > 0 \\
\Rightarrow \pm\sqrt{\frac{2\lambda L}{D\zeta}} - 1 &> 0 \\
\Rightarrow \text{positives Vorzeichen } v^* &= \frac{\sqrt{\frac{2\lambda L}{D\zeta}} - 1}{\frac{2\lambda L}{D\zeta} - 1} v = \frac{v}{\sqrt{\frac{2\lambda L}{D\zeta}} + 1}
\end{aligned}$$

c) Es wird kein Wasser in der Ringleitung von Anschluss A zirkulieren, da in der Steigleitung bei Anschluss A kein Wasser fließt. Dadurch wird keine Druckdifferenz erzeugt, die eine Zirkulation antreiben könnte.

3. Aufgabe

a) Absolutsystem: Strömung instationär

Bezugssytem mit u_B bewegt: Strömung stationär

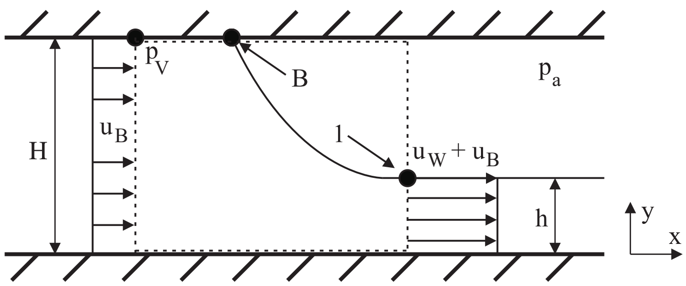
Bernoulli $B \;\rightarrow\; \infty$: $\quad p_B = p_V + \frac{1}{2}\rho u_B^2; \quad p_B = p_a$

$\Rightarrow p_V = p_a - \frac{1}{2}\rho u_B^2 \quad (1)$

b) Bernoulli im mitbew. System $B \rightarrow 1$: $\quad p_a + \rho g H = p_a + \rho g h + \frac{1}{2}\rho(u_W + u_B)^2$

$u_W + u_B = \sqrt{2g\,(H-h)}$

c) Impulssatz: mit u_B mitbewegtes Kontrollvolmen



$$\int_A \rho\vec{v}(\vec{v}\cdot\vec{n})dA = \sum \vec{F}$$

$$-\rho u_B^2 H + \rho(u_W + u_B)^2 h = \int_0^H [p_V + \rho g(H-y)]dy - p_a(H-h) - \int_0^h [p_a + \rho g(h-y)]dy$$

$$-\rho u_B^2 H + \rho(u_W + u_B)^2 h = (p_V + \frac{1}{2}\rho g H)H - p_a(H-h) - (p_a + \frac{1}{2}\rho g h)h$$

$$-\rho u_B^2 H + \rho(u_W + u_B)^2 h = \frac{1}{2}\rho g(H^2 - h^2) + (p_V - p_a)H \quad (2)$$

aus b) $\Rightarrow (u_W + u_B)^2 = 2g(H-h) \quad (3)$

Konti: $\quad u_B H = (u_W + u_B)h$

Quadrieren, mit (3) $\quad \Rightarrow u_B^2 H = 2gh^2\left(1 - \frac{h}{H}\right) \quad (4)$

(1), (3), (4) in (2): $-2\rho g h^2\left(1 - \frac{h}{H}\right) + 2\rho g h\,(H-h) = \frac{1}{2}\rho g(H^2 - h^2) - \rho g\frac{h^2}{H}(H-h)$

$$\Rightarrow -2h^2(H-h) + 2hH(H-h) = \frac{1}{2}H(H^2 - h^2) - h^2(H-h)$$

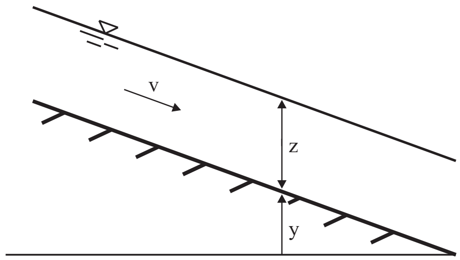
$$\Rightarrow -2h^2 + 2hH = \frac{1}{2}H(H+h) - h^2$$

$\Rightarrow h^2 - \frac{3}{2}Hh + \frac{1}{2}H^2 = 0 \quad$ quadr. Gl. für h

$$\Rightarrow h_{1/2} = \frac{3}{4}H \pm \sqrt{\frac{9}{16} - \frac{8}{16}}H$$

$\Rightarrow h = \frac{1}{2}H \quad$ (2. Lsg. h = H nicht sinnvoll)

4. Aufgabe



a) Bernoulli: $\rho g z + \frac{\rho}{2}v^2 + \rho g y = konst$

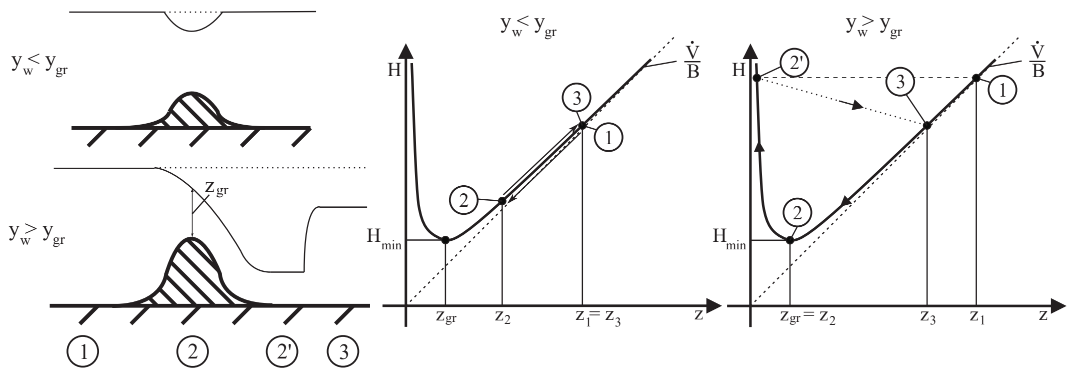
$$\Rightarrow \quad z + \frac{v^2}{2g} + y = konst$$

$$H = z + \frac{v^2}{2g} \quad \text{mit} \quad v = \frac{\dot{V}}{Bz} \quad \Rightarrow \quad H = z + \frac{\dot{V}^2}{2gB^2z^2}$$

$$H_{min}: \quad \frac{\partial H}{\partial z} \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad z_{gr} = \sqrt[3]{\frac{\dot{V}^2}{gB^2}}$$

$$H_{min} = z_{gr} + \frac{\dot{V}^2}{2gB^2z_{gr}^2} = \frac{3}{2}z_{gr} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{\dot{V}^2}{gB^2}}$$

b) $y_W > y_{gr}$



c) $\Delta P = \dot{V} \cdot \Delta p_0$

$$\Delta p_0 = (p_1 + \frac{\rho}{2}v_1^2)_{y=y_w} - (p_{1^*} + \frac{\rho}{2}v_{1^*}^2)_{y=0}$$

$$p_1 = p_a + \rho g z_1 \quad \text{und} \quad p_{1^*} = p_a + \rho g z_{1^*}$$

$$\Delta p_0 = \rho g(z_1 - z_{1^*}) + \frac{\rho}{2}(v_1^2 - v_{1^*}^2)$$

$$H = z + \frac{v^2}{2g} \quad \Rightarrow \quad \Delta p_0 = \rho g(H_1 - H_{1^*}) \quad \Rightarrow \quad \Delta P = \dot{V}\rho g(H_1 - H_{1^*})$$

$$H_{1^*} = \underline{z_{1^*} + \frac{\dot{V}^2}{2gz_{1^*}^2B^2}} \quad \wedge \quad H_1 = H_{min} + y_W \quad (\text{für } y_W > y_{gr} : H_1 > H_3)$$

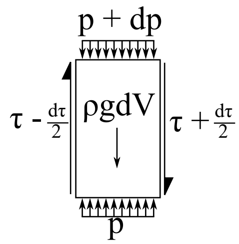
$$H_{min} = \underline{\frac{3}{2}z_{gr}} \quad \text{mit} \quad z_{gr} = \underline{\sqrt[3]{\frac{\dot{V}^2}{B^2 g}}}$$

$$\Delta P = \dot{V}\rho g(H_{min} + y_W - H_3) \quad \Rightarrow \quad \Delta P = \dot{V}\rho g\left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{\dot{V}^2}{B^2g}} + y_W - \left(z_1^* + \frac{\dot{V}^2}{2g(z_1^*)^2B^2}\right)\right)$$

5. Aufgabe

a) Da die Schwerkraft entgegen der z-Richtung wirkt, muss der Druckgradient dafür sorgen, dass das Fluid in z-Richtung fließt. Der Druck muss daher in z-Richtung abnehmen, damit die Resultierende der Druckkräfte in z-Richtung als antreibende Kraft wirken kann. Das bedeutet, dass der Druckgradient in z-Richtung negativ ist: $\frac{\partial p}{\partial z} < 0$

b) Kräftebilanz am Kreisringsegment



$\sum F_z = 0$

$\rightarrow p2\pi r dr - (p + \frac{\partial p}{\partial z}dz)2\pi r dr + (\tau - \frac{\partial \tau}{\partial r}\frac{dr}{2})2\pi(r - \frac{dr}{2})dz$

$-(\tau + \frac{\partial \tau}{\partial r}\frac{dr}{2})2\pi(r + \frac{dr}{2})dz - \rho g 2\pi r dr dz = 0$

$$\rightarrow -\frac{\partial p}{\partial z}dzrdr - \tau\frac{dr}{2}2dz - \frac{\partial \tau}{\partial r}\frac{dr}{2}r2dz + \underbrace{\mathcal{O}((\frac{dr}{2})^2)}_{\approx 0} rdz - \rho g r dr dz = 0$$

$\rightarrow -\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\tau}{r} - \frac{\partial \tau}{\partial r} - \rho g = 0$ mit Kettenregel $\frac{\partial(r\tau)}{\partial r} = \tau + r\frac{\partial \tau}{\partial r}$

$\rightarrow -\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{1}{r}\frac{\partial(r\tau)}{\partial r} - \rho g = 0 \rightarrow (-\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g)rdr = d(r\tau)$

$\rightarrow r\tau = (-\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g)\frac{r^2}{2} + C_1$

mit Randbedingung aus Symmetrie $r \rightarrow 0 : \tau \rightarrow 0$ folgt : $C_1 = 0$

$\rightarrow \tau(r) = (-\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g)\frac{r}{2}$

c) $\tau = \tau_0 - \eta_B\frac{\partial u}{\partial r}$ mit $\tau(r)$ aus b) $\rightarrow \tau_0 - \eta_B\frac{\partial u}{\partial r} = (-\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g)\frac{r}{2} = K\frac{r}{2}$

$\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{K}{\eta_B}\frac{r}{2} + \frac{\tau_0}{\eta_B}$

$\rightarrow u(r) = -\frac{K}{\eta_B}\frac{r^2}{4} + \frac{\tau_0}{\eta_B}r + C_2$

R.B.: $r = R : u = 0 \rightarrow C_2 = \frac{K}{\eta_B}\frac{R^2}{4} - \frac{\tau_0}{\eta_B}R$

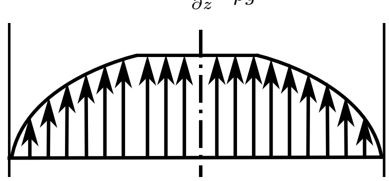
$\rightarrow u(r) = (\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g)\frac{(r^2 - R^2)}{4\eta_B} + \frac{\tau_0}{\eta_B}(r - R)$ (äußerer, fließender Bereich)

Gültigkeitsbereich: $\tau = \tau_0$ bei $r = ?$

$\tau = \tau_0 = (-\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g)\frac{r}{2} \rightarrow r = \frac{2\tau_0}{K}, r > 0, (-\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g) > 0$

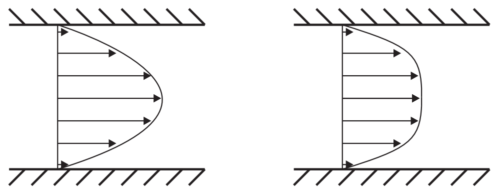
für $\frac{2\tau_0}{-\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g} \leq r \leq R$ gilt $u(r)$ wie oben bereits berechnet

für $0 < r < \frac{2\tau_0}{-\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g}$ gilt $u =$const$= u(\frac{2\tau_0}{-\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g})$



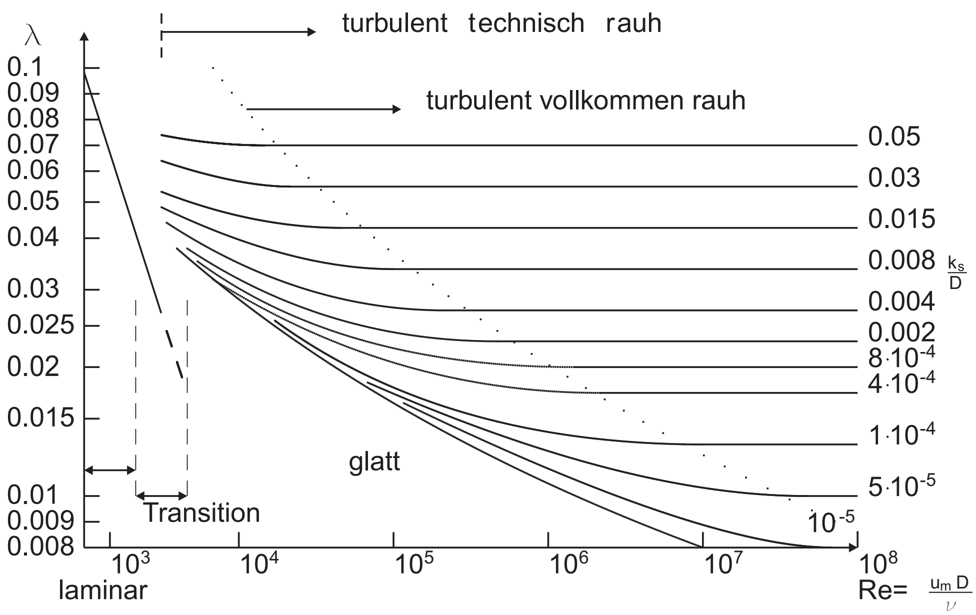
6. Aufgabe

a) Laminares (links) und zeitlich gemitteltes, turbulentes (rechts) Geschwindigkeitsprofil



Das turbulente ist völliger als das laminare Geschwindigkeitsprofil, da der Impulsaustausch in radialer Richtung größer ist.

b) Moody-Diagramm



c) Prandtl'sche Mischungsweghypothese:

$$\tau_t = \rho l^2 \left| \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} \right| \frac{\partial \overline{u}}{\partial y}$$

turbulente Zähigkeit:

$$\eta_t = \rho l^2 \left| \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} \right|$$