....

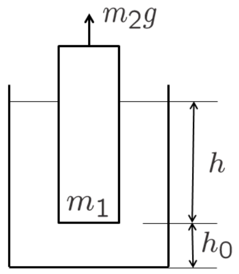
(Matr.-Nr, Unterschrift)

Klausur „Strömungsmechanik I“ (Bachelor)

06. 08. 2019

1. Aufgabe

a) Kräftegleichgewicht für m_1:



$F_A = m_1g - m_2g$ und $F_A = \rho_W g h A_m$

Volumenbilanz für das Wasser:

$$V_W = Ah_0 + (A - A_m)h$$
$$\Rightarrow h = \frac{V_W - Ah_0}{A - A_m}$$

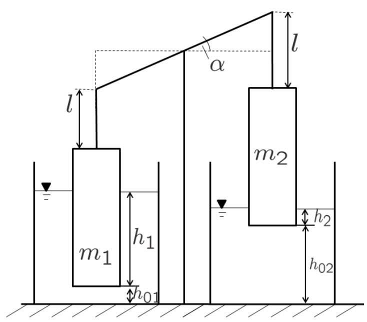
Weiterhin gilt: $L = h_0 + H + l \quad \Leftrightarrow \quad h_0 = L - l - H$
Einsetzen in Volumenbilanz liefert:

$$h = \frac{V_W - A(L - l - H)}{A - A_m}$$

Einsetzen in Kräftegleichgewicht:

$$\begin{aligned} m_1 - m_2 &= \rho_W A_m h \\ \Leftrightarrow \quad \Delta m &= m_1 - m_2 = \frac{\rho_W A_m}{A - A_m}[V_W - A(L - l - H)] \end{aligned}$$

b) Momentengleichgewicht für die Waage:



$$\begin{aligned} (m_1g - F_{A1})s\,cos(\alpha) &= (m_2g - F_{A2})s\,cos(\alpha) \\ \Leftrightarrow m_1 - \rho_W h_1 A_m &= m_2 - \rho_W h_2 A_m \\ \Leftrightarrow m_1 - m_2 &= \rho_W A_m (h_1 - h_2) \end{aligned}$$

Waagebalken um Winkel α ausgelenkt:

$$L - s\,sin(\alpha) = h_{01} + H + l \quad \text{und} \quad L + s\,sin(\alpha) = h_{02} + H + l$$
$$\Rightarrow h_{02} - h_{01} = 2s\,sin(\alpha)$$
$$V_W = h_{01}A + (A - A_m)h_1 = h_{02}A + (A - A_m)h_2$$

Einsetzen in Momentengleichgewicht:

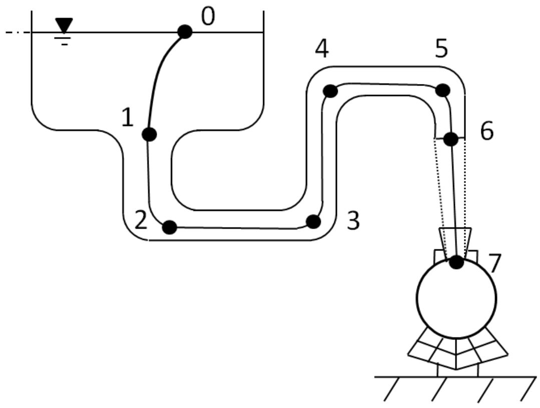
$$m_1 - m_2 = \rho_W \frac{A \cdot A_m}{A - A_m} 2s\,sin(\alpha)$$

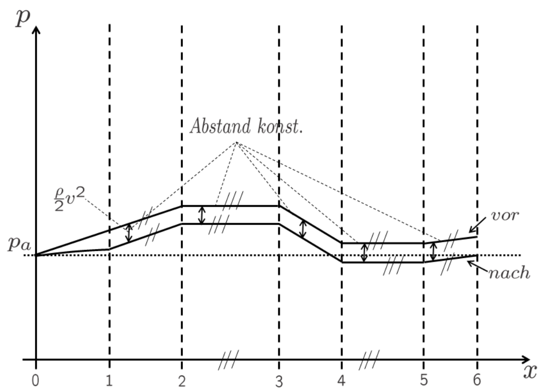
$$\Leftrightarrow \alpha = arcsin\left(\frac{m_1 - m_2}{2s\rho_w} \cdot \frac{A - A_m}{A \cdot A_m}\right) = arcsin\left(\frac{\frac{\rho_W A_m}{A - A_m}[V_W - A(L - l - H)]}{2s\rho_w} \cdot \frac{A - A_m}{A \cdot A_m}\right)$$
$$= arcsin\left(\frac{[V_W - A(L - l - H)}{2sA}\right)$$

c) Aus dem Momentengleichgewicht in b) folgt:

$$F_{A2} \sim \rho h_2$$
$$\rho_{SL} > \rho_W \Rightarrow F_{A2} \uparrow \Rightarrow h_{2c)} \downarrow \Rightarrow \alpha \uparrow$$

2. Aufgabe





a)

b) Stationärer Bernoulli von $0\ -\ 6$:

$$\begin{aligned}
p_a + \rho g h_1 &= p_a + \frac{\rho}{2} v_{stat}^2 + \rho g (h_2 - h_3) \\
p_a &= p_a + \frac{\rho}{2} v_{stat}^2 + \rho g (-h_1 + h_2 - h_3) \\
\Rightarrow v_{stat} &= \sqrt{2g(h_1 - h_2 + h_3)}
\end{aligned}$$

Instationärer Bernoulli von $0\ -\ 6$:

$$\begin{aligned}
p_a &= p_a + \frac{\rho}{2} v^2 + \rho g (-h_1 + h_2 - h_3) + \rho \int \frac{\partial v}{\partial t} ds \\
\text{mit} \quad \int \frac{\partial v}{\partial t} ds &= \frac{dv}{dt} L \qquad \text{da} \qquad D << L \\
\Rightarrow \frac{dv}{dt} &= \frac{-(2g(-h_1 + h_2 - h_3)) - v^2}{2L} = \frac{v_{stat}^2 - v^2}{2L} \\
\int_0^{0.99 v_{stat}} \frac{dv}{v_{stat}^2 - v^2} &= \int_0^{\Delta T} \frac{dt}{2L} \\
\Rightarrow \Delta T &= \frac{L}{v_{stat}} ln \left(\frac{1 + \frac{v}{v_{stat}}}{1 - \frac{v}{v_{stat}}} \right) \\
\Leftrightarrow \Delta T &= \frac{L}{v_{stat}} ln \left(\frac{1.99}{0.01} \right) = \frac{L}{\sqrt{2g(h_1 - h_2 + h_3)}} ln(199)
\end{aligned}$$

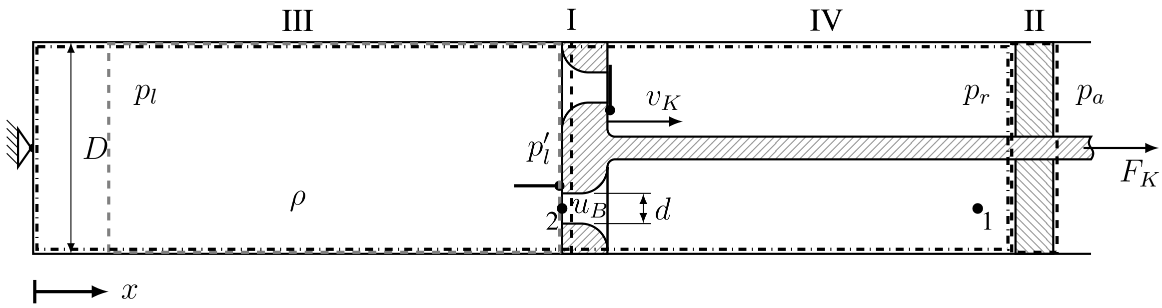
c) stationärer Bernoulli: 6 - 7

$$\begin{aligned}
p_a + \rho g \Delta h + \frac{\rho}{2} v_{stat}^2 &= p_a + \frac{\rho}{2} v_7^2 \\
\text{Konti:} \quad \frac{\pi D^2}{4} v_{stat} &= \frac{\pi d^2}{4} v_7 \quad \Rightarrow \quad v_7 = \frac{D^2}{d^2} v_{stat} \\
\Rightarrow \Delta h &= \frac{v_7^2 - v_{stat}^2}{2g} = \frac{v_{stat}^2}{2g} \left(\frac{D^4}{d^4} - 1 \right) \\
\Leftrightarrow \Delta h &= (h_1 - h_2 + h_3) \left(\frac{D^4}{d^4} - 1 \right)
\end{aligned}$$

d) p_{min} wird bei stationärer Strömung zwischen 4 und 5 erreicht:

$$\begin{aligned}
p_a + \rho g h_1 &= p_4 + \frac{\rho}{2} v_{stat}^2 + \rho g h_2 \\
\text{mit} \quad p_{4min} &= p_D \quad \text{und} \quad v_{stat}^2 = 2g(h_1 - h_2 + h_3) \\
h_3 &= \frac{p_a - p_D}{\rho g} \\
\Rightarrow h_2 \quad \text{ist beliebig wählbar} : h_{3max} &= \frac{p_a - p_D}{\rho g}
\end{aligned}$$

3. Aufgabe



a) Kontinuität: Das vom Kolben verdrängte Öl strömt in die entgegengesetzte Richtung. Eine Volumenstrombilanz in der Ebene I der Bohrungen ergibt

$$0 = v_K \frac{\pi}{4}(D^2 - 3d^2) + u_B 3\frac{\pi}{4}d^2 . \quad \Rightarrow \quad \underline{u_B = -v_K \left(\frac{D^2}{3d^2} - 1\right)}$$

Im Folgenden wird $\psi = D^2/(3d^2)$ verwendet.

b) Impulssatz (II) um den Deckel im Absolutsystem bei reibungsfreier Bewegung und vernachlässigbarem Kolbenstangenvolumen:

$$0 = \frac{\pi}{4}D^2(p_r - p_a) \quad \Rightarrow \quad \underline{p_r = p_a}$$

Bernoulli im Relativsystem des Kolbens von 1 nach 2:

$$\frac{\rho}{2}v_K^2 + p_r = \frac{\rho}{2}u_{B,rel}^2 + p_l' \quad \text{mit} \quad u_{B,rel} = u_B - v_K = -v_K\psi$$

$$\Rightarrow \quad p_l' = p_r + \frac{\rho}{2}v_K^2(1-\psi^2) \tag{1}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{p_l' = p_r + \frac{\rho}{2}v_K^2\left[1 - \left(\frac{D^2}{3d^2}\right)^2\right]}$$

Impulssatz (III) links von Kolben im Relativsystem des Kolbens, wobei links $u_{l,rel} = -v_k$:

$$\rho\, u_{l,rel}\,(u_{l,rel}\, n_l)\frac{\pi}{4}D^2 + \rho\, u_{B,rel}\,(u_{B,rel}\, n_l')3\frac{\pi}{4}d^2 = \frac{\pi}{4}D^2(p_l - p_l')$$

Die Normalenvektoren an der Bilanzhülle sind $n_l = -1$ und $n_l' = 1$. Einsetzen der Relativgeschwindigkeiten ergibt:

$$-\rho v_K^2\frac{\pi}{4}D^2 + \rho v_K^2\psi^2 3\frac{\pi}{4}d^2 = \frac{\pi}{4}D^2(p_l - p_l') .$$

Einsetzen von (1) führt zu

$$\Delta p = -\frac{\rho}{2}v_K^2(1-\psi)^2 . \quad \Rightarrow \quad \underline{\Delta p = -\frac{\rho}{2}v_K^2\left(1 - \frac{D^2}{3d^2}\right)^2}$$

c) Impulssatz (IV) im Absolutsystem im Rohr:

$$0 = \frac{\pi}{4} D^2 (p_l - p_r) + F_K \quad \Rightarrow \quad F_K = -\frac{\pi}{4} D^2 \Delta p \tag{2}$$

$$F_K = \frac{\pi}{4} D^2 \frac{\rho}{2} v_K^2 (1-\psi)^2 \quad \Rightarrow \quad \underline{F_K = \frac{\pi}{4} D^2 \frac{\rho}{2} v_K^2 (1 - \frac{D^2}{3d^2})^2}$$

d) Bernoulli im Relativsystem für beide Bewegungsrichtungen:

$$\begin{aligned} \tilde{p}_r + \frac{\rho}{2} u_K^2 &= \tilde{p}_l' + \frac{\rho}{2} u_{B,rel}^2 \\ \hat{p}_l + \frac{\rho}{2} u_K^2 &= \hat{p}_r' + \frac{\rho}{2} u_{B,rel}^2 \\ \Rightarrow \tilde{p}_r - \tilde{p}_l' + \frac{\rho}{2}(u_K^2 - u_{B,rel}^2) &= \hat{p}_l - \hat{p}_r' + \frac{\rho}{2}(u_K^2 - u_{B,rel}^2) \end{aligned}$$

führt zu:

$$\underbrace{\hat{p}_l - \hat{p}_r'}_{\leftarrow v_K} = \underbrace{\tilde{p}_r - \tilde{p}_l'}_{\rightarrow v_K} \quad \text{mit} \quad \hat{p}_r = \tilde{p}_r = p_r$$

$$\tilde{p}_l' - \hat{p}_r' = \tilde{p}_r - \hat{p}_l \quad \text{mit (2)} \quad \Rightarrow \quad \tilde{p}_l' - \hat{p}_r' = \hat{F}_K / (\frac{\pi}{4} D^2)$$

Für die Bewegung nach links ist $F_K < 0$ und es folgt $\tilde{p}_l' < \hat{p}_r'$. Der minimale Druck wird bei der Bewegung <u>nach links</u> erreicht.

Alternativer Lösungsweg über den Impulssatz im Relativsystem auf der Seite der scharfkantigen Ausströmung für beide Bewegungsrichtungen.

$$\underbrace{\tilde{p}_l - \tilde{p}_l'}_{\rightarrow v_K} = \underbrace{\hat{p}_r - \hat{p}_r'}_{\leftarrow v_K} \quad \Rightarrow \quad \tilde{p}_l' - \hat{p}_r' = -\tilde{F}_K / (\frac{\pi}{4} D^2) \quad \text{mit} \quad F_K > 0$$

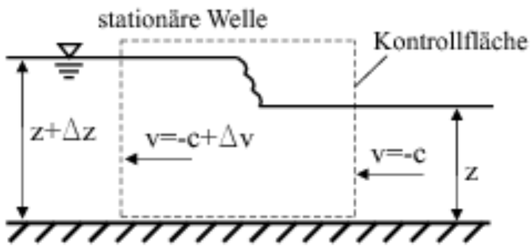
4. Aufgabe

a) Konti:

$$-czB = (-c + \Delta v)(z + \Delta z)B \quad \Rightarrow \quad c = \frac{(z + \Delta z)\Delta v}{\Delta z}$$

Für Wellen geringer Amplituden $\Delta z \ll z$ folgt:

$$c = z\frac{\Delta v}{\Delta z}$$



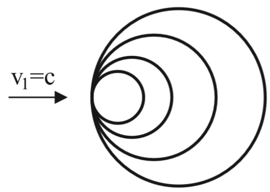
x-Impuls:

$$p_a B(z' - \Delta z) + \int_0^{z+\Delta z} (p_a + \rho g z)B\,dz - p_a B z' - \int_0^{z} (p_a + \rho g z)B\,dz =$$
$$= \rho c B z(-c + \Delta v + c)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\rho g B z^2 - \frac{1}{2}\rho g B(z + \Delta z)^2 = -\rho c B z \Delta v \quad \text{wobei} \quad \Delta z^2 \ll z\Delta z$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta v}{\Delta z} = \frac{g}{c} \quad \Rightarrow c^2 = gz \quad \Rightarrow c = \sqrt{gz}$$

b) Skizze:



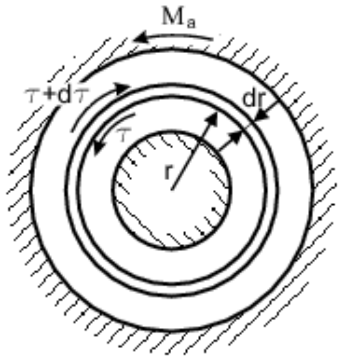
c) $H_0 = H_1 \quad \Leftrightarrow z_0 + \dfrac{v_0^2}{2g} = h_1 + z_1 + \dfrac{v_1^2}{2g}$, wobei $v_1 = \sqrt{gz_1}$, da $Fr_1 = 1$

$$v_0 = \sqrt{2g(h_1 + \frac{3}{2}z_1 - z_0)}$$

$$\left(\frac{\dot{V}}{B}\right)_0 = v_0 z_0 = \sqrt{2g(h_1 + \frac{3}{2}z_1 - z_0)} \cdot z_0$$

5. Aufgabe

a) Momentengleichgewicht:



$$\tau \cdot 2\pi r L \cdot r - (\tau + \frac{\partial \tau}{\partial r} dr) \cdot 2\pi L(r + dr) \cdot (r + dr) = 0$$

$$\tau r^2 - (\tau + \frac{\partial \tau}{\partial r} dr)(r^2 + 2rdr + dr^2) = 0$$

$$-2\tau rdr - \tau dr^2 - r^2 \frac{\partial \tau}{\partial r} dr - 2rdr \frac{\partial \tau}{\partial r} dr - \frac{\partial \tau}{\partial r} drdr^2 = 0$$

$$2\tau rdr + r^2 \frac{\partial \tau}{\partial r} dr = dr(2\tau r + \frac{\partial \tau}{\partial r} r^2) = 0 \quad \text{da Terme } O(2) \approx 0$$

$$\frac{\partial (r^2 \tau)}{\partial r} = 0$$

b) mit geg. Geschwindigkeitsverteilung: $\Rightarrow \eta \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d(rv)}{dr} \right) = 0$

1. Integration: $\frac{1}{r} \frac{d(rv)}{dr} = C_1$; 2. Integration: $rv = \frac{1}{2} C_1 r^2 + C_2$

Randbedingungen: $v(r = R_i) = \omega_i R_i$; $v(r = R_a) = \omega_a R_a$;

$$R_i^2 \omega_i = \frac{1}{2} C_1 R_i^2 + C_2; \quad R_a^2 \omega_a = \frac{1}{2} C_1 R_a^2 + C_2$$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{2(R_i^2 \omega_i - R_a^2 \omega_a)}{R_i^2 - R_a^2}; \quad C_2 = \frac{R_i^2 R_a^2 (\omega_a - \omega_i)}{R_i^2 - R_a^2}$$

$$v(r, \omega_a) = \frac{R_i^2 \omega_i - R_a^2 \omega_a}{R_i^2 - R_a^2} r + \frac{R_i^2 R_a^2 (\omega_a - \omega_i)}{R_i^2 - R_a^2} \frac{1}{r}$$

c) Maximales Moment bei $\omega_a = 0 \Rightarrow M_a = 2\pi R_a^2 L \tau (r = R_a)$

$$\tau = -\eta r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{2} C_1 + C_2 \frac{1}{r^2} \right] = -\eta r \left(-\frac{2C_2}{r^3} \right) = 2\eta \frac{C_2}{r^2} \Rightarrow \tau(r = R_a) = 2\eta \frac{C_2}{R_a^2}$$

$$M_{a,max} = -4\pi L \eta \frac{R_i^2 R_a^2 \omega_i}{R_i^2 - R_a^2}$$

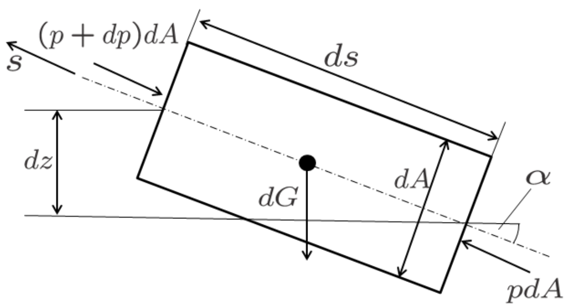
d) maximale Leistung: $P = M_a \omega_a = 2\pi R_a^2 L \tau (r = R_a) \omega_a \propto \omega_a C_2$

$$\frac{\partial P}{\partial \omega_a} \doteq 0 = \frac{\partial (\omega_a^2 - \omega_i \omega_a)}{\partial \omega_a} = 2\omega_a - \omega_i \Rightarrow \omega_a = \omega_i / 2$$

6. Aufgabe

a)

$$
\begin{aligned}
\sum d\vec{F} &= dm\frac{d\vec{v}}{dt} \\
\Leftrightarrow -dGsin\alpha + pdA - (p+dp)dA & \\
\text{mit} \quad dG &= gdm = \rho g ds dA \quad \text{und} \quad sin\alpha = \frac{dz}{ds} \\
\Rightarrow \rho ds dA\frac{dv}{dt} &= -\rho g ds dA\frac{dz}{ds} - dpdA \\
\Leftrightarrow \rho\frac{dv}{dt} &= -\rho g\frac{dz}{ds} - \frac{dp}{ds}
\end{aligned}
$$



Da $v = F(s,t)$, gilt:

$$dv = \frac{\partial v}{\partial t}dt + \frac{\partial v}{\partial s}ds$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial s} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(\frac{v^2}{2})}{\partial s}$$

Einsetzen liefert:

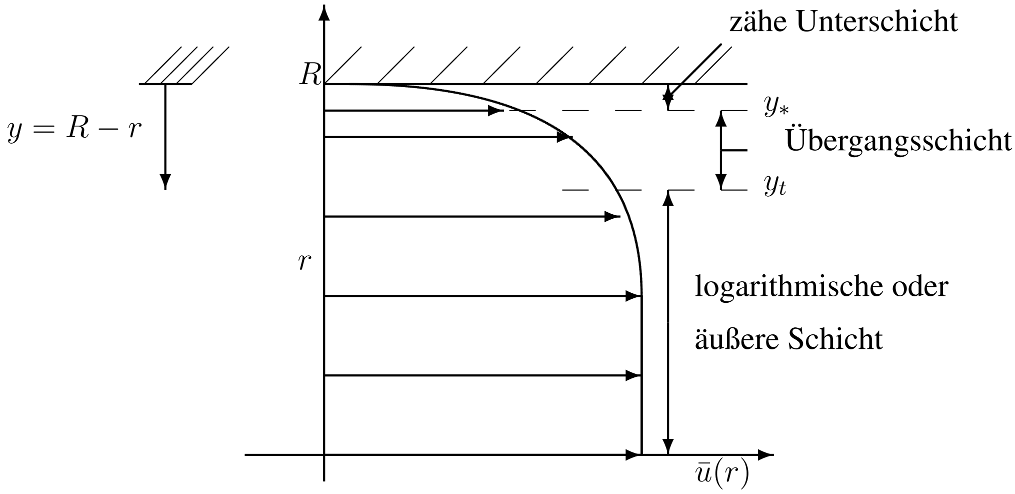
$$\rho\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\rho}{2}\frac{\partial v^2}{\partial s} + \frac{dp}{ds} + \rho g\frac{dz}{ds} = 0$$

$$\Rightarrow p + \frac{\rho}{2}v^2 + \rho g z + \rho\int\frac{\partial v}{\partial t}ds = const.$$

Unter Annahme einer stationären Strömung ergibt sich:

$$p + \frac{\rho}{2}v^2 + \rho g z = const.$$

b) Skizze


zähe Unterschicht
R
$y = R - r$
y_*
Übergangsschicht
y_t
r
logarithmische oder
äußere Schicht
$\bar{u}(r)$