....

(Name, Matr.-Nr, Unterschrift)

Klausur „Strömungsmechanik I“ (Bachelor) & „Technische Strömungslehre“ (Diplom)

01. 03. 2019

1. Aufgabe

a) Hydrostatische Grundgleichung: $\frac{dp}{dz} = -\rho g$ und ideales Gasgesetz $\rho = \frac{p}{RT}$ ergeben:

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{pg}{RT}$$

FÃijr eine isotherme AtmosphÃd're ergibt sich dann die barometrische HÃűhenformel zu:

$$\int_{p_0}^{p_1} \frac{dp}{p} = ln\frac{p_1}{p_0} = -\frac{g}{RT}\int_{z_0}^{z_1} dz = -\frac{g}{RT}(z_1 - z_0)$$

bzw. mit $(z_1 - z_0) = H$:

$$p(z = H) = p(z = 0)e^{-\frac{gH}{RT_L}}$$

Für einen offenen Ballon gilt: $p_L = p_G$, sodass:

$$\begin{array}{ll} p_G(z = H) = & \rho_G(z = H)R_GT_G \\ p_G(z = 0) = & \rho_G(z = 0)R_GT_G \end{array} \rightarrow \frac{\rho_G(z = H)}{\rho_G(z = 0)} = \frac{p_G(z = H)}{p_G(z = 0)} = \frac{p_L(z = H)}{p_L(z = 0)} = e^{-\dfrac{gH}{R_LT_L}}$$

b) Auftriebskräfte am Boden und in der Luft bestimmen:

$$\left.\begin{array}{ll} F_A(z = H) = \rho_L(z = H)gV_B = & G + G_{Gas}(z = H) \\ F_A(z = 0) = \rho_L(z = 0)gV_B = & G + G_{Gas}(z = 0) + F_s \end{array}\right\} \text{mit} \quad G_{Gas} = \frac{p_G(z)}{R_GT_G}gV_B$$

Mit dem Ergebnis aus a) ergibt sich:

$$\rho_G(z = H) = \rho_G(z = 0)e^{-\dfrac{gH}{R_LT_L}} \qquad \rho_L(z = H) = \rho_L(z = 0)e^{-\dfrac{gH}{R_LT_L}}$$

$$\Rightarrow \rho_G(z = 0)gV_B = \rho_L(z = 0)V_Bg - G - F_s \quad \Leftrightarrow \quad \rho_G(z = 0) = \frac{\rho_L(z = 0)V_Bg - G - F_s}{V_Bg}$$

Einsetzen in das Kräftegleichgewicht liefert:

$$\rho_L(z = 0)V_Bge^{-\dfrac{gH}{R_LT_L}} = G + \frac{\rho_L(z = 0)V_Bg - G - F_s}{V_Bg}V_Bge^{-\dfrac{gH}{R_LT_L}}$$

Umstellen nach H liefert:

$$0 = G - (G + F_s)e^{-\dfrac{gH}{R_LT_L}} \quad ; \quad H = \frac{R_LT_L}{g}\ln\left(1 + \frac{F_s}{G}\right)$$

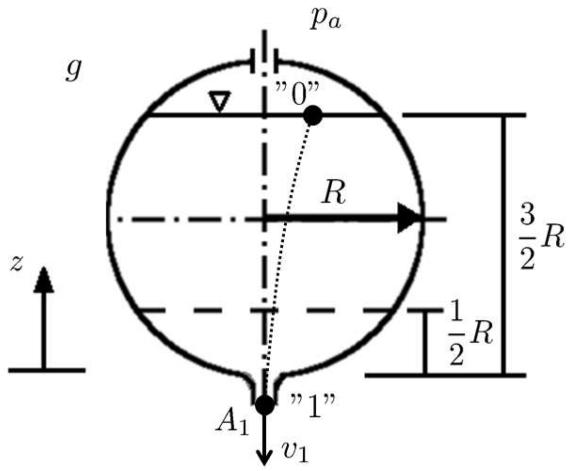
2. Aufgabe

a) Quasistationäre Bernoulligleichung: $0 \to 1$

$$p_a + \frac{\rho}{2}v_0^2 + \rho g z = p_a + \frac{\rho}{2}v_1^2$$

mit $v_0 \ll v_1$, da $A_1 \ll R^2$

$$v_1 = \sqrt{2gz}$$



Konti:

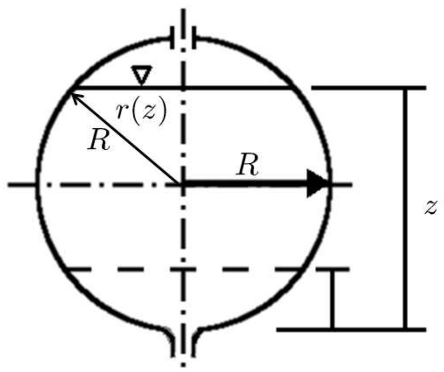
$$v_1 A_1 = v(z)A(z) = -\frac{dz}{dt}A(z)$$

$$dt = -\frac{A(z)}{v_1 A_1}dz$$

$A(z)$ berechnen:

$A(z) = \Pi r^2(z)$ und $r^2(z) + (z-R)^2 = R^2$

$$\Rightarrow A(z) = \Pi(2Rz - z^2)$$



Einsetzen in Konti:

$$\begin{aligned}
dt &= -\frac{\pi(2Rz - z^2)}{A_1\sqrt{2gz}} \\
dt &= -\frac{\pi}{A_1\sqrt{2g}}\,(2Rz^{1/2} - z^{3/2})dz \\
\Leftrightarrow \Delta t &= -\frac{\pi}{A_1\sqrt{2g}}\int_{3/2R}^{1/2r}(2Rz^{1/2} - z^{3/2})dz \\
\Leftrightarrow \Delta t &= \frac{\pi}{A_1\sqrt{2g}}\left[2R\frac{2}{3}z^{3/2} - \frac{2}{5}z^{5/2}\right]_{3/2R}^{1/2r} \\
\Leftrightarrow \Delta t &= \frac{\pi R^{5/2}}{A_1\sqrt{2g}}\left[\frac{4}{3}\left((\frac{3}{2})^{3/2} - (\frac{1}{2})^{3/2}\right) - \frac{2}{5}\left((\frac{3}{2})^{5/2} - (\frac{1}{2})^{5/2}\right)\right]
\end{aligned}$$

b)

$$\Delta h\Big|_{Zylinder} < \Delta h\Big|_{Kugel}$$

für das gleiche Δt, da
Konti:

$$v_1 A_1 = \frac{dz}{dt} A(z) \quad \Rightarrow \quad dz = -\frac{v_1 A_1}{A(z)} dt$$

Da der zylindrische Behälter eine gröÃ§ere Querschnittsfläche $A(z)$ als der kugelförmige Behälter hat, ist die Spiegelhöhenänderung im zylindrischen Behälter geringer.

3. Aufgabe

a) p_2 : Ansaugen aus der Umgebung

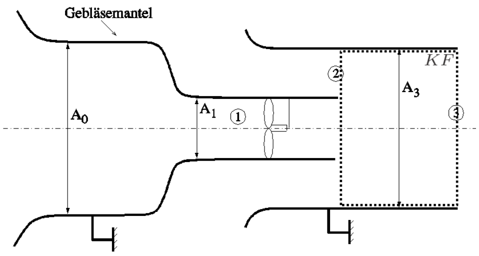
Bernoulli $\infty \rightarrow 2$:

$$p_a = p_2 + \frac{\varrho}{2} v_2^2 (1); v_2 = \frac{\dot{V}_2}{A_3 - A_1}$$

$$\Rightarrow p_2 = p_a - \frac{\varrho}{2} \left(\frac{\dot{V}_2}{A_3 - A_1} \right)^2 = p_a - 2\rho \frac{\dot{V}_2^2}{A_1^2} \qquad (1)$$

IES:

$$-\varrho v_1^2 A_1 - \varrho v_2^2 (A_3 - A_1) + \varrho v_3^2 A_3 = (p_2 - p_a) A_3$$



Konti:

$$\varrho v_1 A_1 + \varrho v_2 (A_3 - A_1) = \varrho v_3 A_3$$

IES in Konti einsetzen:

$$-\varrho v_1^2 A_1 - \varrho v_2^2 (A_3 - A_1) + \frac{\varrho}{A_3} \left[(v_1 A_1)^2 + 2 v_1 v_2 A_1 (A_3 - A_1) + v_2^2 (A_3 - A_1)^2 \right] = (p_2 - p_a) A_3$$

mit (1) $p_2 - p_a = -\frac{\varrho}{2} v_2^2$ ergibt sich:

$$\Leftrightarrow v_1^2 \frac{A_1}{A_3} \left(\frac{A_1}{A_3} - 1 \right) - 2 v_1 v_2 \frac{A_1}{A_3} \left(\frac{A_1}{A_3} - 1 \right) + v_2^2 \left(\frac{A_1}{A_3} - 1 + (1 - \frac{A_1}{A_3})^2 + \frac{1}{2} \right) = 0$$

mit $\frac{A_3}{A_1} = \frac{3}{2}$ folgt:

$$v_1^2 - 2 v_1 v_2 - \frac{5}{4} v_2^2 = 0$$

$$\Rightarrow v_1 = v_2 (1 \pm \underbrace{\sqrt{1 + \frac{5}{4}}}_{>1})$$

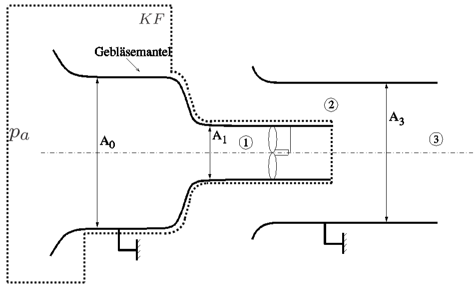
Negative Lösung daher nicht sinvoll:

$$\Rightarrow v_1 = \frac{5}{2} v_2 = \frac{5}{2} \frac{\dot{V}_2}{A_3 - A_1} = 5 \frac{\dot{V}_2}{A_1}$$

aus Konti (3) folgt:

$$v_3 = 2 v_2 = 2 \frac{\dot{V}_2}{A_3 - A_1} = 4 \frac{\dot{V}_2}{A_1}$$

b) Haltekraft: IES für Gebläsemantel



$$\Rightarrow \varrho v_1^2 A_1 = (p_a - p_2) A_1 + F_H$$

mit (1):
$\Rightarrow \varrho v_1^2 A_1 - \frac{\varrho}{2} v_2^2 A_1 = F_H$

$\Rightarrow \; F_H \; = \; \frac{23}{4} \varrho v_2^2 A_1 \; = \; \frac{23}{4} \varrho \left(\frac{\dot{V}_2}{A_3 - A_1} \right)^2 A_1 \; = \; 23 \rho \frac{\dot{V}_2^2}{A_1}$

c) Gebläseleistung:

$P = \dot{V} \Delta p_0$

$\Delta p_0 = p_2 - p_1$

$\dot{V} = v_1 A_1$

Bernoulli $\infty \to 1$:

$p_a = p_1 + \frac{\varrho}{2} v_1^2$

$\Leftrightarrow p_a - p_1 = \frac{\varrho}{2} v_1^2$

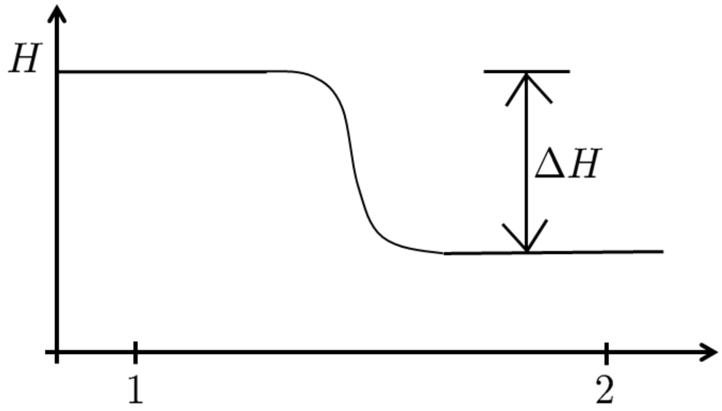
mit $(p_2 - p_a)$ aus (1):

$\Rightarrow p_2 - p_1 = p_2 - p_a + p_a - p_1 = \frac{\varrho}{2}(v_1^2 - v_2^2) = \frac{21}{8} \varrho v_2^2$

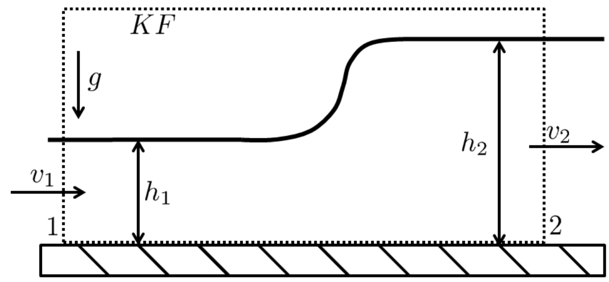
$\Rightarrow P = \frac{105}{16} \varrho v_2^3 A_1 = \frac{105}{16} \varrho \left(\frac{\dot{V}_2}{A_3 - A_1} \right)^3 A_1 = \frac{105}{2} \rho \frac{\dot{V}_2^3}{A_1^2}$

4. Aufgabe

a) Verlust an Energiehöhe ΔH über den Wassersprung:



b) X-Impulssatz: $\frac{dI_x}{dt} = \sum F_x$



$$-\rho v_1^2 h_1 b + \rho v_2^2 h_2 b = \rho g b \left(\frac{h_1^2}{2} - \frac{h_2^2}{2} \right)$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{g} \left(v_2^2 h_2 - v_1^2 h_1 \right) = \left(\frac{h_1^2}{2} - \frac{h_2^2}{2} \right)$$

Mit Konti: $v_1 h_1 = v_2 h_2$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{g} \left(v_2 v_1 h_1 - v_1 v_1 h_1 \right) &= \frac{v_1 h_1}{g} (v_2 - v_1) \\
= \frac{v_1 h_1}{g} \left(v_1 \frac{h_1}{h_2} - v_1 \right) &= \frac{v_1^2}{g} \frac{h_1}{h_2} (h_1 - h_2) \\
\Leftrightarrow \frac{2v_1^2}{g} \frac{h_1}{h_2} &= (h_1 + h_2) \\
\Leftrightarrow \left(\frac{h_2}{h_1} \right)^2 + \frac{h_2}{h_1} - 2Fr_1^2 &= 0 \\
\Rightarrow \frac{h_2}{h_1} &= -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + 8Fr_1^2}
\end{aligned}$$

Mit $h_2/h_1 > 0$ gibt es nur eine physikalisch sinnvolle Lösung:

$$h_2 = \frac{h_1}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + 8Fr_1^2} \right)$$

c) Verlustleistung: $P = q\Delta p_0 = \rho g \Delta H q$

Energiegleichung: $h_1 + \frac{v_1^2}{2g} = h_2 + \frac{v_1^2}{2g}\frac{h_1^2}{h_2^2} + \Delta H$

$$\Leftrightarrow h_2 - h_1 + \Delta H = \frac{v_1^2}{2g}\left(1 - \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{h_2}{h_1} - 1 + \frac{\Delta H}{h_1} = \frac{Fr_1^2}{2}\left(1 - \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2\right)$$

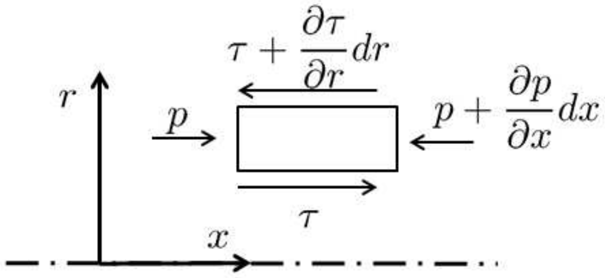
$$\Leftrightarrow \Delta H = h_1 \cdot \left(1 - \frac{h_2}{h_1} + \frac{Fr_1^2}{2}\left(1 - \frac{h_2}{h_1}\right)^2\right)$$

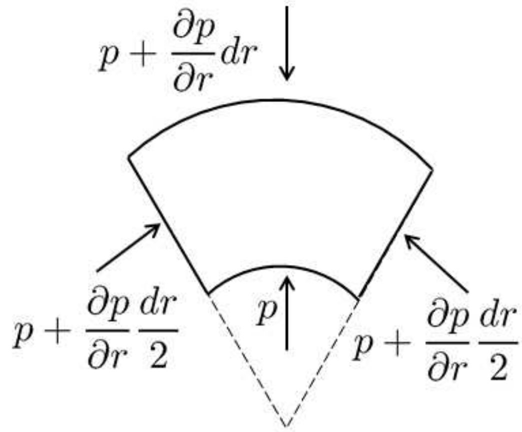
Daraus folgt für die Verlustleistung P:

$$P = \rho g q h_1 \left(1 - \frac{h_2}{h_1} + \frac{Fr_1^2}{2}\left(1 - \frac{h_2}{h_1}\right)^2\right)$$

5. Aufgabe

a) Impulssatz in x-Richtung:





$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\tau}{r} - \frac{\partial \tau}{\partial r} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\tau)$$

Impulssatz in r-Richtung:

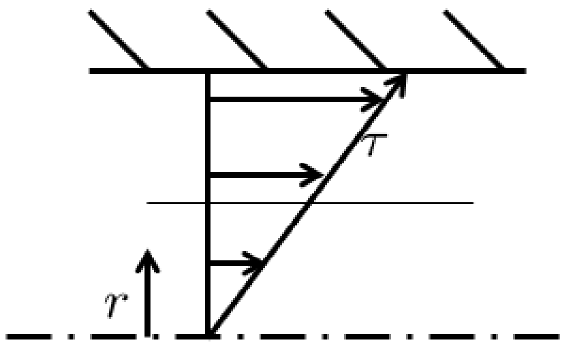
$$0 = prd\Theta - (p + \frac{\partial p}{\partial r}dr)(r+dr)d\Theta + 2\left(p + \frac{\partial p}{\partial r}\frac{dr}{2}\right)\frac{d\Theta}{2}dr \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial p}{\partial r} = 0$$

Für eine ausgebildete Strömung folgt daher: $v = 0,\ u = u(r),\ \tau = \tau(r)$ Somit ergibt sich für den Druck:

$$p = p(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{dx} = const = \frac{\Delta p}{L}$$

Schubspannungsverlauf:

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\tau) \quad \text{mit} \quad \tau(r=0) = 0 \quad \text{folgt} \quad \tau = -\frac{r}{2}\frac{\Delta p}{L}$$



b) Geschwindigkeitsverteilung:

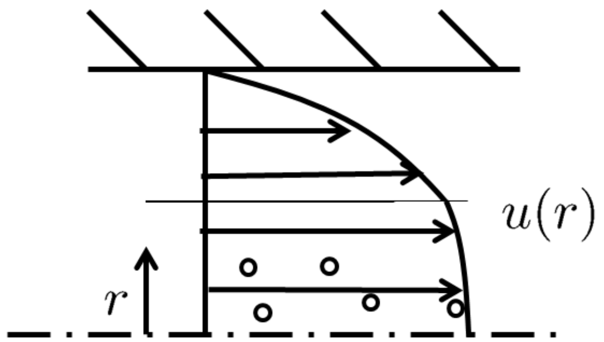
$$\tau = -\frac{r}{2}\frac{\Delta p}{L} = \eta_i \frac{du_i}{dr} \quad \Rightarrow \quad \frac{du_i}{dr} = \frac{r}{2\eta_i}\frac{\Delta p}{L}$$

Nach Integration folgt für öl und Wasser:

$$u_{\text{öl}} = \frac{r^2}{4\eta_{\text{öl}}}\frac{\Delta p}{L} + C_{\text{öl}}$$
$$u_W = \frac{r^2}{4\eta_W}\frac{\Delta p}{L} + C_W$$

Randbedingungen einsetzen: $r = R_2:\ u_W = 0$ und $r = R_1:\ u_{\text{Öl}} = u_W$

$$u_W = -\frac{R_2^2}{4\eta_W}\frac{\Delta p}{L}\left(1 - \left(\frac{r}{R_2}\right)^2\right)$$
$$u_{\text{öl}} = -\frac{R_1^2}{4\eta_{\text{öl}}}\frac{\Delta p}{L}\left(1 - \left(\frac{r}{R_1}\right)^2\right) - \frac{R_2^2}{4\eta_W}\frac{\Delta p}{L}\left(1 - \left(\frac{r}{R_2}\right)^2\right)$$



6. Aufgabe

a) Unter einer Couette-Strömung versteht man eine stationäre Scherströmung zwischen zwei unendlichen Platten, die relativ zueinander verschoben werden.

b) $\sum \vec{M} = \int_{KF} (\vec{r} \times \vec{v}) \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA$

c) Lagrange: Es wird die Bewegung der einzelnen Fluidpartikel verfolgt und hieraus die Änderung der Fluideigenschaften bestimmt, die mit diesen Teilchen verbunden sind.
Euler: Die Eulersche Beschreibung verwendet das Feldkonzept. Es werden zu einem gewissen Zeitpunkt die Variablen des StrÃűmungsfeldes wie Dichte, Druck, Geschwindigkeit oder Beschleunigung als Funktion der räumlichen Koordinaten x,y und z dargestellt.

d) Prandtl'sche Mischungsweghypothese:

$$\tau_t = \rho l^2 \left| \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} \right| \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} = \eta_t \frac{\partial \overline{u}}{\partial y}$$

turbulente Zähigkeit:

$$\eta_t = \rho l^2 \left| \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} \right|$$

e) Das universelle logarithmische Wandgesetz beschreibt das Geschwindigkeitsprofil einer turbulenten Rohrströmung außerhalb der viskosen Unterschicht.

f) Abklingende Geschwindigkeitsschwankungen, $\tau_l > \tau_t$ in direkter Wandnähe, linearer Geschwindigkeitsverlauf normal zur Wand, großer Geschwindigkeitsgradient