....
(Name, Matr.-Nr, Unterschrift)

Klausur „Strömungsmechanik I“ (Bachelor) & „Technische Strömungslehre“ (Diplom)

06. 03. 2018

1. Aufgabe

a) Barometrische Höhenformel:

$$\begin{aligned}
\frac{dp}{dz} &= -\rho(z)g = -\frac{p(z)}{R_L T(z)}g \;\text{ mit } \rho(z) = \frac{p(z)}{R_L T(z)} \\
&\Rightarrow \frac{1}{p}dp = -\frac{g}{R_L}\frac{dz}{(T_B - az)} \\
&\Rightarrow \int_{p(z=0)}^{p(z)} \frac{1}{p}dp = -\frac{g}{R_L}\int_{z=0}^{z}\frac{1}{T_B - az}dz = ln\left(\frac{T_B - az}{T_B}\right)^{\frac{g}{R_L a}} \quad \text{mit } p(z=0) = p_a \\
&\Rightarrow p(z) = p_a\left(\frac{T_B - az}{T_B}\right)^{\frac{g}{R_L a}}
\end{aligned}$$

b) Kräftegleichgewicht für $z = 0$:

$$\begin{aligned}
\sum_i F_i = 0 \quad &\Rightarrow \quad -(m_z g + F_S + m_{He}g) + V_{AK}\rho_L(z=0)g = 0 \\
&\Rightarrow \quad m_z g + F_S = V_{AK}(\rho_L(z=0) - \rho_{He}(z=0))g \\
&\Rightarrow \quad m_z g + F_S = V_{AK}\left(\frac{p_a}{R_L T_0} - \frac{p_a}{R_{He}T_0}\right)g
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{AK} &= (m_z g + F_S)\frac{T_0}{p_a g}\left(\frac{R_L R_{He}}{R_{He} - R_L}\right) \\
m_{He} &= \rho_{He}V_{AK} = \frac{m_z g + F_S}{g}\left(\frac{R_L}{R_{He} - R_L}\right)
\end{aligned}$$

c) Gewichtskraft der verbleibenden Löschwassermenge: $0.1F_S$

Kräftegleichgewicht im Schwebezustand Z_{max}

$$\sum_i F_i = 0 \Rightarrow \rho_L(z_{max})gV_{AK}^* = 0.1F_S + m_z g + m_{He}^* g$$

mit $\rho_L(z) = \rho_0\frac{T_B}{T(z)}\frac{p(z)}{p_a} = \rho_0\left(\frac{T_B}{T_B - az}\right)\left(\frac{T_B - az}{T_B}\right)^{\frac{g}{R_L a}} = \rho_0\left(\frac{T_B - az}{T_B}\right)^{\frac{g}{R_L a}-1}$ folgt

$$\frac{p_a}{R_L T_B}\left(\frac{T_B - az_{max}}{T_B}\right)^{\frac{g}{R_L a}-1} V_{AK}^* g = 0.1F_S + m_z g + m_{He}^* g$$

$$\Rightarrow z_{max} = \frac{T_B}{a} - \frac{T_B}{a}\left(\frac{R_L T_B}{p_a V_{AK}^* g}(0.1F_S + m_z g + m_{He}^* g)\right)^{\frac{1}{\frac{g}{R_L a}-1}}$$

2. Aufgabe

a) Konti: $\left.\frac{dh}{dt}\right|_{t_0} = \frac{A_L}{A_T}\left. v\right|_{t_0}$
Bernoulli außen $\rightarrow$ innen: $p_a + \rho_W g h_T = p_a + \rho_{Öl} g h_{Öl} + \left.\frac{1}{2}\rho_W v^2\right|_{t_0}$
Mit $\frac{\rho_{Öl}}{\rho_W} = \frac{2}{3}$ und $\frac{h_{Öl}}{h_T} = \frac{3}{4}$:$\Rightarrow \left.\frac{dh}{dt}\right|_{t_0} = \frac{A_L}{A_T}\sqrt{g h_T}$

b) h^* sei der Wasserstand im Schiff. Gleichgewicht: $\rho_W g h_T = \rho_{Öl} g h_{Öl} + \rho_W g h^*$
$\Rightarrow h^* = \frac{1}{2} h_T$

$$\underbrace{h^* + h_{Öl}}_{\text{Gesamtfüllstand im Gleichgewicht}} = \frac{5}{4}h_T > \frac{6}{5}h_T = \underbrace{h_T + h_D}_{\text{maximal möglicher Füllstand}} \Rightarrow \text{Überlauf}$$

Gleichgewicht nach Überlauf: $\rho_W g h_T = \rho_{Öl} g \underbrace{(h_T + h_D - h^{**})}_{\text{Ölrest}} + \rho_W g h^{**}$

$\Rightarrow h^{**} = \frac{3}{5} h_T$
Austretendes Volumen: $V = (h_{Öl} - (h_T + h_D - h^{**}))\, A_T = \frac{3}{20} h_T A_T$

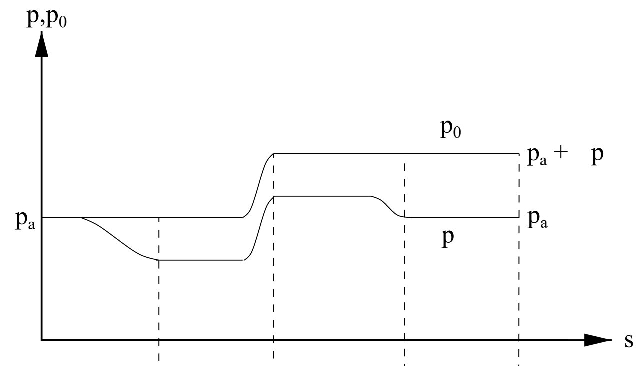
c) h^* sei der Wasserstand im Schiff.
Bernoulli außen $\rightarrow$ innen: $p_a + \rho_W g h_T = p_a + \rho_{Öl} g h_{Öl} + \rho_W g h^* + \frac{1}{2}\rho_W v^2$
$\Rightarrow v = \sqrt{g(h_T - 2h^*)}$
$\Rightarrow \frac{dh^*}{dt} = \frac{A_L}{A_T}\sqrt{g(h_T - 2h^*)} \Rightarrow \frac{dh^*}{\sqrt{\frac{1}{2}h_T - h^*}} = \sqrt{2g}\frac{A_L}{A_T} dt$
$\Rightarrow -2\left.\sqrt{\frac{1}{2}h_T - h^*}\right|_0^{h^*_{ÜL}} = \left.\sqrt{2g}\frac{A_L}{A_T} t\right|_0^{t_{ÜL}}$
Wasserstand beim Überlaufen: $h^*_{ÜL} = h_T + h_D - h_{Öl} = \frac{9}{20} h_T$
$\Rightarrow t_{ÜL} = \sqrt{\frac{2h_T}{g}}\frac{A_T}{A_L}\left(\sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{1}{20}}\right)$

d) Die Geschwindigkeit, mit der das Wasser in das Schiff eintritt, nimmt mit steigendem Füllstand ab, da die Druckdifferenz zwischen innen und außen sinkt. Daher ist der kleinstmögliche Pumpvolumenstrom, der das Überlaufen verhindert derjenige, der durch das Leck nachströmt, wenn der Ölspiegel das Deck erreicht. Der Wasserspiegel zu diesem Zeitpunkt ist $h^*_{ÜL}$ (siehe c)).

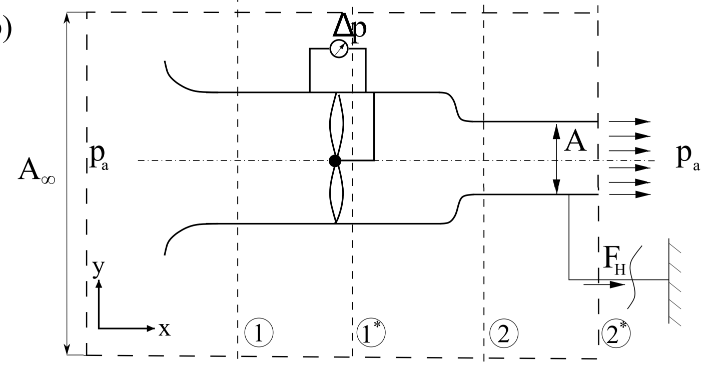
Mit b) $v_{ÜL} = \sqrt{g\left(h_T - 2h^*_{ÜL}\right)} = \sqrt{\frac{1}{10} g h_T}$
$\Rightarrow \dot{V}_{Pumpe} = A_L\sqrt{\frac{1}{10} g h_T}$

<u>3. Aufgabe</u>

a)



b)



Bernoulli von $-\infty$ bis 1:
$p_a = p_1 + \frac{\varrho}{2} v_1^2$
Bernoulli von 1^* bis 2:
$p_{1^*} + \frac{\varrho}{2} v_{1^*}^2 = p_2 + \frac{\varrho}{2} v_2^2$
Konti: $v_{1^*} = v_1$
$p_2 = p_a$
$\Delta p = p_{1^*} - p_1 = p_a + \frac{\varrho}{2} v_2^2 - \frac{\varrho}{2} v_1^2 - p_a + \frac{\varrho}{2} v_1^2 = \frac{\varrho}{2} v_2^2$

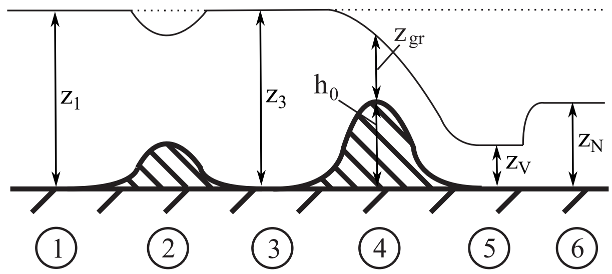
$$\Rightarrow v_2 = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\varrho}}, \quad \dot{V} = v_2 A = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\varrho}} A$$

c) $P = \dot{V} \Delta p_{0,1^*,1} = \dot{V} \Delta p_{1^*,1} = \Delta p \dot{V} = \Delta p \sqrt{\frac{2\Delta p}{\varrho}} A$

d) Impulssatz in x-Richtung (KV siehe oben):
$\varrho v_2^2 A = (p_a - p_a) A_\infty + F_H$
$F_H = \varrho v_2^2 A = 2\Delta p A$

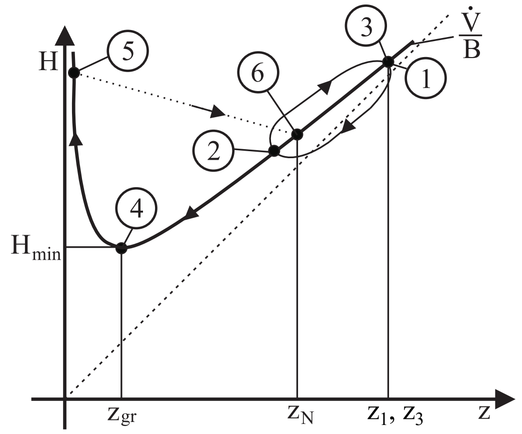
4. Aufgabe

a) Skizze



Aufstau bei konstantem

$$\frac{\dot V}{B} = v_0 h_0$$



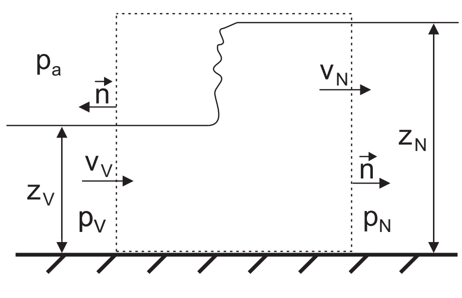
$$H_{ges} = H_{fluid} + y = konst$$

b) $H_V + y_V = H_4 + y_4 \quad \text{mit} \quad H_4 = H_{min} \quad , \quad y_4 = h_0 \quad \text{und} \quad y_V = 0$

$$H_V = h_0 + H_{min} = h_0 + z_{gr} + \frac{v_{gr}^2}{2g} = h_0 + z_{gr} + \frac{\dot V^2}{2g z_{gr}^2 B^2}$$

$$\Longrightarrow H_V = h_0 + \left(\frac{\dot V^2}{gB^2}\right)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2}\left(\frac{\dot V^2}{gB^2}\right)^{1-\frac{2}{3}} = h_0 + \frac{3}{2}\left(\frac{v_0^2 h_0^2}{g}\right)^{\frac{1}{3}}$$

c) Energieverlust



Konti: $v_N z_N = v_V z_V$

IES: $\dot m \left(v_N - v_V\right) = \int_0^{z_V} \rho g z B dz - \int_0^{z_N} \rho g z B dz$

Da der Umgebungsdruck auf allen Grenzflächen des KVs anliegt und sich somit aufhebt, werden nur darüber hinausgehende Drücke bilanziert.

$$\Longrightarrow \quad \rho B \left(v_N^2 z_N - v_V^2 z_V\right) = \rho g B \frac{1}{2}\left(z_V^2 - z_N^2\right)$$

$$\Longrightarrow \quad -v_V^2 z_V + v_N^2 z_N = g\left(\frac{z_V^2}{2} - \frac{z_N^2}{2}\right)$$

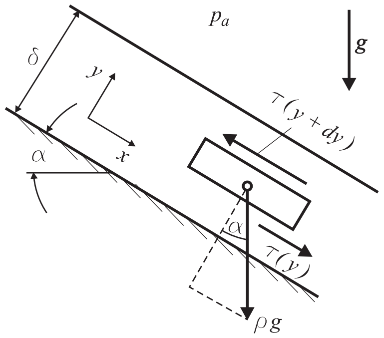
$$\implies \quad \frac{\dot{V}^2}{B^2}\left(\frac{1}{z_N}-\frac{1}{z_V}\right)=g\left(\frac{z_V^2}{2}-\frac{z_N^2}{2}\right)$$

$$\implies \frac{\dot{V}^2}{gB^2}=\frac{z_V z_N(z_V+z_N)}{2}$$

$$\Delta H = H_N - H_V = z_N - z_V + \frac{\dot{V}^2}{2gB^2}\left(\frac{1}{z_N^2}-\frac{1}{z_V^2}\right)$$

$$\implies \Delta H = z_N - z_V + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{z_N^2}-\frac{1}{z_V^2}\right) z_V z_N (z_V + z_N)$$

5. Aufgabe



a)

Kräftebilanz am Volumenelement in x-Richtung:

$\left[\tau - \left(\tau + \frac{d\tau}{dy}dy\right)\right] dxB + \varrho g \sin\alpha dxdyB = 0$

$\rightarrow \frac{d\tau}{dy} = \varrho g \sin\alpha$.

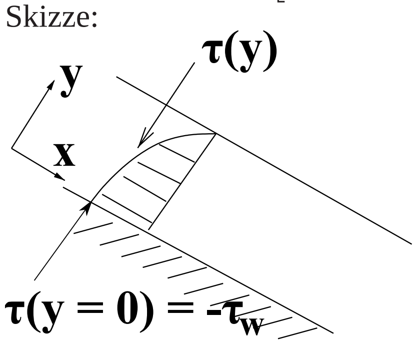
Integration $\int d\tau = \int \varrho_w \left(1 - \beta(T_w - T_a)\frac{y}{\delta}\right) g \sin\alpha dy$

$\rightarrow \quad \tau = \varrho_w g \sin\alpha \left[y - \beta\left(T_w - T_a\right)\frac{y^2}{2\delta}\right] + C_1$

R.B.: $\tau(y = \delta) = 0 \quad \rightarrow \quad C_1 = -\varrho_w g \sin\alpha\delta \left[1 - \frac{\beta}{2}\left(T_w - T_a\right)\right]$

$\rightarrow \tau(y) = \varrho_w g \sin\alpha \left[y - \delta - \frac{\beta(T_w - T_a)}{2}\left(\frac{y^2}{\delta} - \delta\right)\right]$

Skizze:



b) $\tau(y) = -\eta\frac{du}{dy}$ und mit $k = \frac{\beta(T_w - T_a)}{2}$

$\int du = \int \left[-\frac{\varrho_w g \sin\alpha}{\eta}\left(y - \delta - k\left(\frac{y^2}{\delta} - \delta\right)\right)\right] dy$

$\rightarrow \quad u(y) = -\frac{\varrho_w g \sin\alpha}{\eta}\left(\frac{y^2}{2} - \delta y - k\left(\frac{y^3}{3\delta} - y\delta\right)\right) + C_2$

Randbedingung: $u(y = 0) = 0 \rightarrow C_2 = 0$

$\rightarrow \quad u(y) = -\frac{\varrho_w g \sin\alpha}{\eta}\left(\frac{y^2}{2} - \delta y - k\left(\frac{y^3}{3\delta} - y\delta\right)\right)$

c) $\frac{\dot{m}}{B} = \int\limits_0^\delta \varrho(y)u(y)dy$

$\Rightarrow \frac{\dot{m}}{B} = \int\limits_0^\delta -\frac{\varrho_w^2 g \sin\alpha}{\eta}\left(1 - 2k\frac{y}{\delta}\right)\left(\frac{y^2}{2} - \delta y - k\left(\frac{y^3}{3\delta} - y\delta\right)\right) dy$

$\Rightarrow \frac{\dot{m}}{B} = \frac{\rho_w^2 g sin\alpha\delta^3}{\eta}\left(\frac{1}{3} - \frac{5}{6}k + \frac{8}{15}k^2\right) = \frac{\rho_w^2 g sin\alpha\delta^3}{\eta}\left(\frac{1}{3} - \frac{5\beta(T_w - T_a)}{12} + \frac{2}{15}\left(\beta(T_w - T_a)\right)^2\right)$

6. Aufgabe

a) Zeitliche Mittelung: $\frac{1}{T}\int_T ...dt$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{T}\int_T 2\pi\rho r dr\frac{d\left(\left(\overline{u}+u'\right)\left(\overline{u}+u'\right)\right)}{dx}dxdt &+& \frac{1}{T}\int_T 2\pi\rho dx\frac{d\left(r\left(\overline{u}+u'\right)v'\right)}{dr}drdt\\
&=\frac{2\pi\rho r dr}{T}\int_T \frac{d\left(\left(\overline{u}+u'\right)\left(\overline{u}+u'\right)\right)}{dx}dxdt &+& \frac{2\pi\rho dx}{T}\int_T \frac{d\left(r\left(\overline{u}+u'\right)v'\right)}{dr}drdt\\
&=\frac{2\pi\rho r dr}{T}\frac{d}{dx}\int_T \left(\left(\overline{u}+u'\right)\left(\overline{u}+u'\right)\right)dtdx &+& \frac{2\pi\rho dx}{T}\frac{d}{dr}\int_T \left(r\left(\overline{u}+u'\right)v'\right)dtdr\\
&=\frac{2\pi\rho r dr}{T}\frac{d}{dx}\int_T \left(\overline{u}^2+2\overline{u}u'+u'^2\right)dtdx &+& \frac{2\pi\rho dx}{T}\frac{d}{dr}\int_T r\left(\overline{u}v'+u'v'\right)dtdr\\
&=2\pi\rho r dr\frac{d}{dx}(\underbrace{\overline{\overline{u}^2}}_{\text{Unabh. von x}\to 0}+\underbrace{\overline{2\overline{u}u'}}_{\text{per Def. = 0}}+\underbrace{\overline{u'^2}}_{\text{Unabh. von x}\to 0})dx &+& 2\pi\rho dx\frac{d}{dr}(r(\underbrace{\overline{\overline{u}v'}}_{\text{per Def. = 0}}+\overline{u'v'}))dr\\
& &=& 2\pi\rho dx\frac{d}{dr}\left(r\overline{u'v'}\right)dr
\end{aligned}$$

b) Die Geschwindigkeit des Bezugsystems sei $\vec{v}_{sys}$.

$$\begin{aligned}
\frac{dI}{dt} &= \rho\int_{dKV}\vec{v}_{abs}\overbrace{(\vec{v}_{rel}\cdot\vec{n})}^{\text{Der Massenstrom über die Systemgrenzen ist durch } \vec{v}_{rel} \text{ bestimmt}}dA\\
&= \rho\int_{dKV}(\vec{v}_{rel}+\vec{v}_{sys})(\vec{v}_{rel}\cdot\vec{n})dA\\
&= \rho\int_{dKV}\underbrace{\vec{v}_{sys}}_{\text{konstant}}(\vec{v}_{rel}\cdot\vec{n})dA+\rho\int_{dKV}\vec{v}_{rel}(\vec{v}_{rel}\cdot\vec{n})dA\\
&= \rho\vec{v}_{sys}\underbrace{\int_{dKV}(\vec{v}_{rel}\cdot\vec{n})dA}_{\text{Kontinuität, daher} = 0}+\rho\int_{dKV}\vec{v}_{rel}(\vec{v}_{rel}\cdot\vec{n})dA\\
&= \rho\int_{dKV}\vec{v}_{rel}(\vec{v}_{rel}\cdot\vec{n})dA
\end{aligned}$$

c) Abklingende Geschwindigkeitsschwankungen, $\tau_l >> \tau_t$, linearer Geschwindigkeitsverlauf normal zur Wand, großer Geschwindigkeitsgradient

d) Laminares (links) und zeitlich gemitteltes, turbulentes (rechts) Geschwindigkeitsprofil

Das turbulente ist völliger als das laminare Geschwindigkeitsprofil, da der Impulsaustausch in radialer Richtung größer ist.