(Name, Matr.-Nr, Unterschrift)

Klausur „Strömungsmechanik I“ (Bachelor) & „Technische Strömungslehre“ (Diplom)

16. 03. 2016

1. Aufgabe

Mit Hinweis:

$$\begin{aligned}
dp &= \varrho\omega^2 r dr - \varrho g dz \\
\int\limits_{p_a}^{p} dp &= \int\limits_{r=0}^{r} \varrho\omega^2 r dr - \int\limits_{z=h}^{z} \varrho g dz \\
p - p_a &= \varrho\omega^2 \frac{r^2}{2} - \varrho g(z-h) = \varrho g(h-z) + \frac{1}{2}\varrho\omega^2 r^2
\end{aligned}$$

a) Betrachtung an der Oberfläche:

$$\begin{aligned}
p_a + \varrho g h &= p_a + \varrho g z(r) - \frac{1}{2}\varrho\omega^2 r^2 \\
z(r) &= h + \frac{\omega^2 r^2}{2g} \\
r &= R : z = H \rightarrow H = h + \frac{\omega^2 R^2}{2g} \\
\rightarrow \omega^2 &= \frac{2(H-h)g}{R^2} \\
z(r) &= h + \frac{2(H-h)gr^2}{R^2 2g} = h + (H-h)(\frac{r}{R})^2
\end{aligned}$$

Volumen $V(\omega = 0) = V(\omega)$

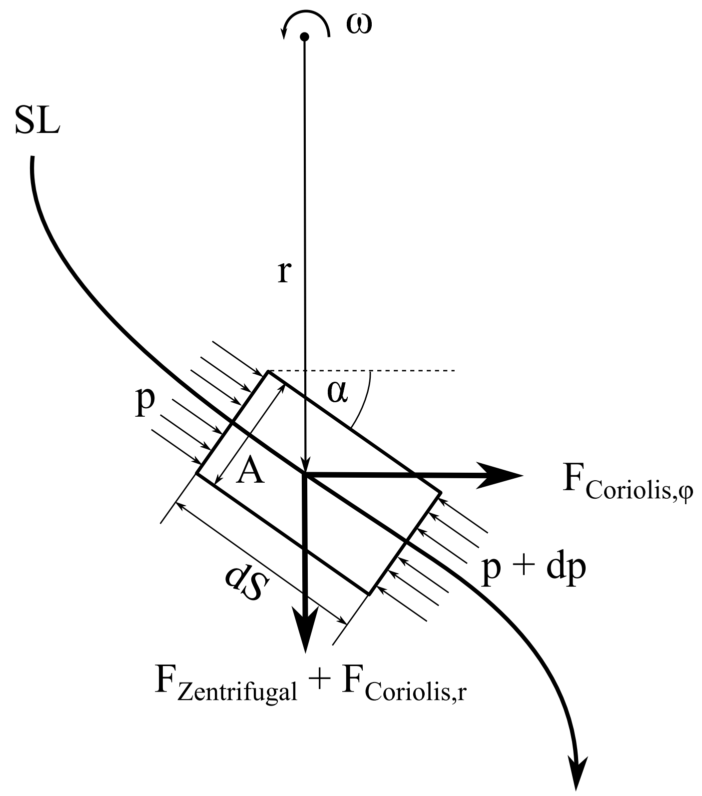
$$\begin{aligned}
\pi R^2 h_0 &= \int\limits_0^R z(r) 2\pi r dr = 2\pi \int\limits_0^R [h + (H-h)\frac{r^2}{R^2}] r dr = \frac{\pi R^2}{2}(h+H) \\
\leftrightarrow h &= 2h_0 - H \\
\rightarrow \omega &= \sqrt{\frac{2(H - 2h_0 + H)g}{R^2}} = \sqrt{\frac{4(H-h_0)g}{R^2}}
\end{aligned}$$

b) Aus oben betrachteter Druckgleichung

$$\begin{aligned}
\text{Wand} \rightarrow r = R &: \quad p = p_a + \varrho g(H - z) \\
\text{Boden} \rightarrow z = 0 &: \quad p = p_a + \varrho g h + \frac{1}{2}\varrho\omega^2 r^2
\end{aligned}$$

2. Aufgabe

a) Kräfte auf ein Segment der Stromline



b) Die in Strömungsrichtung wirkende Coriolis-Kraft ist null.

Möglichkeit 1:

$$
\begin{aligned}
0 &\stackrel{!}{=} F_{Coriolis,r} sin(\alpha) + F_{Coriolis,\varphi} cos(\alpha) \\
\Rightarrow 0 &\stackrel{!}{=} 2m\omega v_\varphi sin(\alpha) - 2m\omega v_r cos(\alpha) \\
\Rightarrow 0 &\stackrel{!}{=} vcos(\alpha)sin(\alpha) - vsin(\alpha)cos(\alpha)
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ Die Corioliskraft hebt sich für die Bernoulli-Gleichung immer auf, da sie in ihrer Gesamtheit immer senkrecht zur Strömungsrichtung wirkt.

Möglichkeit 2:
Die Steigung der Stromlinie ist $\frac{v_r}{v_\varphi}$. Die Steigung der Coriolis-Kraft hingegen ist $-\frac{v_\varphi}{v_r}$. Daher wirkt die Coriolis-Kraft immer senkrecht zur Strömungsrichtung.

c) Herleitung der Bernoulli-Gleichung im rotierenden System ohne Coriolis-Kräfte

$$\sum dF = F_{Zentrifugal}\, sin(\alpha) + A\,(p - (p + dp))$$

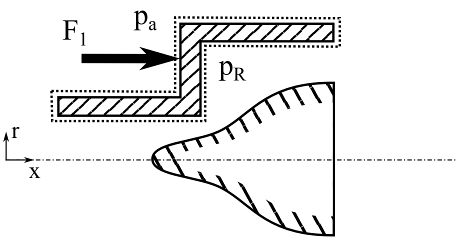
$$
\begin{aligned}
&= \underbrace{A\,\rho\,dS}_{=dm}\,\omega^2 r\,sin(\alpha) + A\,(p-(p+dp)) \\
&= A\,\rho\,dS\,\omega^2 r\,sin(\alpha) - Adp \\
\Rightarrow A\rho\int_1^2 \frac{dv}{dt}dS &= A\rho\omega^2\int_1^2 r\,\underbrace{sin(\alpha)dS}_{dr} - Ap\Big|_1^2 \\
\Rightarrow \rho\int_1^2\left(\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial S}\right)dS &= \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2\Big|_1^2 - p\Big|_1^2 \\
\Rightarrow \rho\int_1^2\frac{\partial v}{\partial t}dS + \frac{1}{2}\rho v^2\Big|_1^2 &= \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2\Big|_1^2 - p\Big|_1^2 \\
\Rightarrow \underbrace{p\Big|_1^2}_{stat.\,Druck} - \underbrace{\frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2\Big|_1^2}_{pot.\,Term} &+ \underbrace{\frac{1}{2}\rho v^2\Big|_1^2}_{kin.\,Term} + \underbrace{\rho\int_1^2\frac{\partial v}{\partial t}dS}_{Beschleunigungsterm} = 0 \\
\Rightarrow \left(p-\frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2+\frac{1}{2}\rho v^2\right)_1 &= \left(p-\frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2+\frac{1}{2}\rho v^2\right)_2 + \rho\int_1^2\frac{\partial v}{\partial t}dS
\end{aligned}
$$

3.Aufgabe

a) Bernoulli von „R“ nach „2“

$$p_R + \tfrac{1}{2}\varrho u_R^2 = p_a + \tfrac{1}{2}\varrho u_2^2 + \Delta p_R$$
$$\text{mit } u_R = u_1 \tfrac{A}{A_R}, u_2 = 2u_1$$
$$\Rightarrow \quad p_R - p_a = \tfrac{1}{2}\varrho\left(u_2^2 - u_R^2 + u_R^2\left(1 - \tfrac{A_R}{A}\right)^2\right)$$
$$= \tfrac{1}{2}\varrho u_1^2\left(4 - \left(\tfrac{A}{A_R}\right)^2 + \left(\tfrac{A}{A_R}\right)^2\left(1 - \tfrac{A_R}{A}\right)^2\right)$$

Impulssatz um Ventilmantel

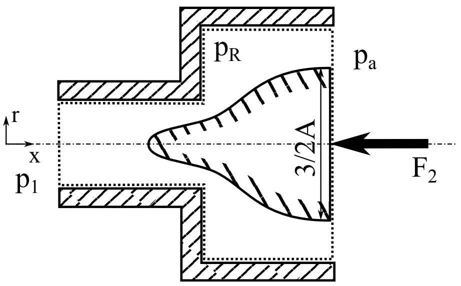


$$\begin{aligned} 0 &= A\left(p_a - p_R\right) + F_1 \\ \Rightarrow F_1 &= \frac{1}{2}A\varrho u_1^2\left(4 - \left(\frac{A}{A_R}\right)^2 + \left(\left(\frac{A}{A_R}\right) - 1\right)^2\right) \\ &= \frac{1}{2}A\varrho u_1^2\left(5 - 2\left(\frac{A}{A_R}\right)\right) \end{aligned}$$

b) Bernoulli von „1“ nach „R“

$$p_1 + \frac{1}{2}\varrho u_1^2 = p_R + \frac{1}{2}\varrho u_R^2$$

Impulssatz um Fluid und Absperrkörper



$$\begin{aligned} -\varrho u_1^2 A + \varrho u_2^2\frac{A}{2} &= Ap_1 + Ap_R - 2Ap_a - F_2 \\ \Rightarrow F_2 &= A\left(p_1 + \left(p_1 + \frac{1}{2}\varrho\left(u_1^2 - u_R^2\right)\right) - 2p_a\right) - \varrho u_1^2 A \\ \Rightarrow F_2 &= 2A\left(p_1 - p_a\right) - \frac{1}{2}\varrho u_1^2 A\left(1 + \left(\frac{A}{A_R}\right)^2\right) \end{aligned}$$

Bernoulli von „1“ nach „2“

$$
\begin{aligned}
p_1 + \frac{1}{2}\varrho u_1^2 &= p_a + \frac{1}{2}\varrho u_2^2 + \Delta p_R \\
\Rightarrow p_1 - p_a &= \frac{1}{2}\varrho u_1^2(4-1) + \frac{1}{2}\varrho u_1^2 \left(\frac{A}{A_R}\right)^2 \left(1 - \frac{A_R}{A}\right)^2 \\
&= \frac{1}{2}\varrho u_1^2 \left(3 + \left(\frac{A}{A_R} - 1\right)^2\right) \\
\Rightarrow F_2 &= A\varrho u_1^2 \left(3 + \left(\frac{A}{A_R} - 1\right)^2\right) - \frac{1}{2}\varrho u_1^2 A \left(1 + \left(\frac{A}{A_R}\right)^2\right) \\
\Rightarrow F_2 &= A\varrho u_1^2 \left(\frac{7}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{A}{A_R}\right)^2 - 2\frac{A}{A_R}\right)
\end{aligned}
$$

4. Aufgabe

a) $\dot{V} = z_1\, v_1\, B$

Energiegleichung ($\widehat{=}$ Bernoulli) Beckenoberfläche $\rightarrow$ Abwasserkanaloberfläche:

$h = \frac{v_1^2}{2g} + z_1$

$\Rightarrow v_1 = \sqrt{2g(h - z_1)}$

$\Rightarrow \dot{V} = \sqrt{2g(h - z_1)} \cdot z_1\, B$

b) Aufstau des Wassers vor der Versperrung $\Rightarrow$ auf dem Wehr stellt sich der Grenzzustand ein. $\Rightarrow y_W > y_{gr}$

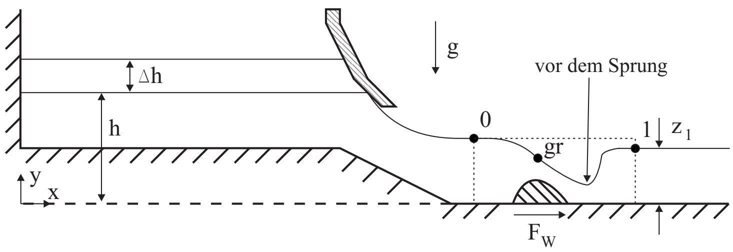
$h + \Delta h = \frac{v_{gr}^2}{2g} + z_{gr} + y_W$

$\Rightarrow h + \Delta h = \frac{3}{2} z_{gr} + y_W$

mit $v_{gr} = \sqrt{z_{gr} g}$ und $\dot{V} = z_{gr} v_{gr} B = z_{gr}\sqrt{z_{gr} g} B \Rightarrow z_{gr} = \sqrt[3]{\frac{\dot{V}^2}{B^2 g}}$

$\Rightarrow \Delta h = y_W - h + \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{\dot{V}^2}{B^2 g}}$

c) Impulssatz in x-Richtung:

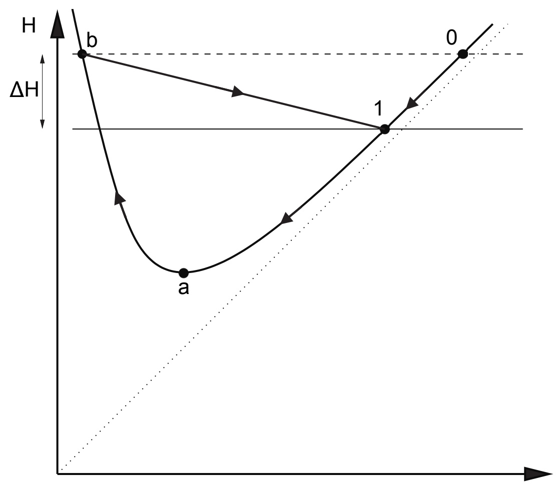


$$-\rho v_0^2 B z_0 + \rho v_1^2 B z_1 = B\int_0^{z_0} \rho g z dz - B\int_0^{z_1} \rho g z dz + F_W = \rho g B\left(\frac{z_0^2}{2} - \frac{z_1^2}{2}\right) + F_W$$

mit Konti: $v_0 = \dfrac{z_1}{z_0} v_1 \quad$ und $\quad \dot{V} = v_1 B z_1$

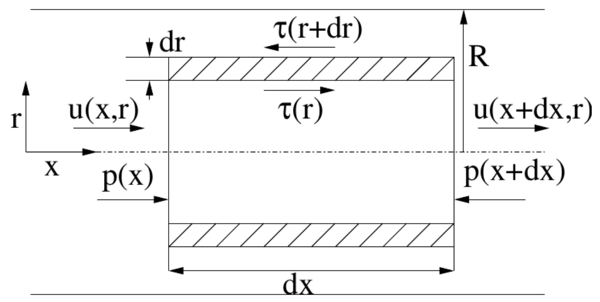
$$\Rightarrow F_W = \frac{\rho g B}{2}(z_1 - z_0)\left(z_0 + z_1 - \frac{2\dot{V}^2}{g B^2 z_0 z_1}\right)$$

d)



5. Aufgabe

a) Impulssatz am ringförmigen Element:
ausgebildete Strömung $\Rightarrow u(x,r) = u(x+dx,r)$



$\Rightarrow$ eintretender Impulsstrom $\dot{I}_{ein}$ = austretender Impulsstrom $\dot{I}_{aus}$

$$\Rightarrow \dot{I}_{ein} - \dot{I}_{aus} = 2\pi r p dr - 2\pi r \left(p + \frac{dp}{dx}dx\right) dr + 2\pi r dx \tau - 2\pi(r+dr)dx \left(\tau + \frac{d\tau}{dr}dr\right) = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{dp}{dx} - \frac{d\tau}{dr} - \frac{\tau}{r} - \frac{d\tau}{r} = 0$$

wobei $\frac{d\tau}{r}$ von höherer Ordnung klein ist

$$\Rightarrow \frac{dp}{dx} = -\frac{1}{r}\frac{d(\tau r)}{dr}$$

1. Integration:

$$\tau = -\frac{r}{2}\frac{dp}{dx} + \frac{C_1}{r}$$

mit RB: $\tau(r=0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$
Newton'sches Fließgesetz: $\tau = -\eta \frac{du}{dr} = -\frac{r}{2}\frac{dp}{dx}$ mit $-\frac{dp}{dx} = \frac{p_1 - p_2}{L}$
2. Integration:

$$u(r) = \frac{1}{2\eta}\frac{dp}{dx}\frac{r^2}{2} + C_2$$

mit RB: $u(r=R) = 0$

$$\Rightarrow C_2 = -\frac{1}{2\eta}\frac{dp}{dx}\frac{R^2}{2}$$

$$\Rightarrow u(r) = \frac{R^2}{4\eta}\frac{p_1 - p_2}{L}\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right)$$

b) Wandschubspannung τ_w und mittlere Geschindigkeit u_m:

$$\tau_w = -\tau(r=R) = -\frac{R}{2}\frac{p_1 - p_2}{L}$$

mit $u_m = \frac{\dot{V}}{A}, A = \pi R^2$

$$\dot{V} = \int_0^R u(r) 2\pi r dr = \frac{\pi R^4}{2\eta}\frac{p_1 - p_2}{L}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{r}{R}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{r}{R}\right)^4\right]_0^R = \frac{\pi R^4}{8\eta}\frac{p_1 - p_2}{L}$$

$$\Rightarrow u_m = \frac{R^2}{8\eta}\frac{p_1 - p_2}{L}$$

c) Rohrreibungsbeiwert λ:
mit $\Delta p = p_1 - p_2$

$$\Rightarrow \Delta p = \lambda \frac{L}{D}\frac{\varrho}{2}u_m^2$$

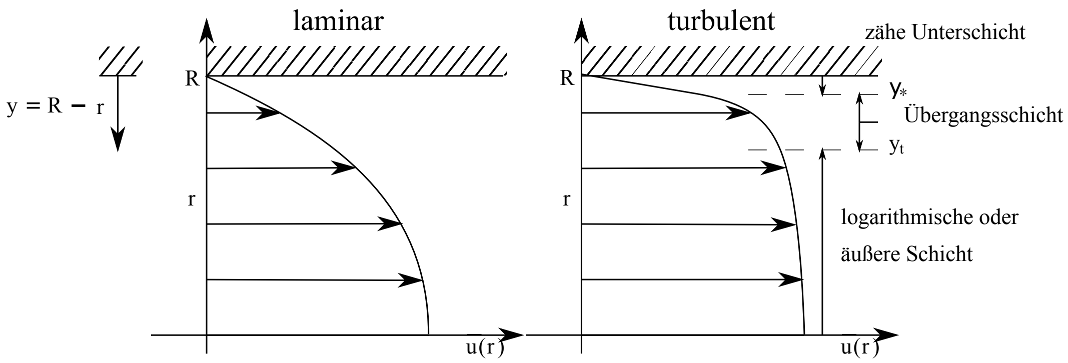
$$u_m = \frac{R^2}{8\eta}\frac{p_1 - p_2}{L} \Leftrightarrow \frac{p_1 - p_2}{\frac{\varrho}{2}u_m^2} = \frac{16\eta L}{\varrho u_m R^2} = \frac{64\eta}{\varrho u_m D}\frac{L}{D} \Rightarrow \lambda = \frac{64}{Re_D}$$

6. Aufgabe

a) Die Reynoldssche Mittelung ist die Aufteilung von Strömungsgrößen in einen zeitlichen Mittelwert und einen Schwankungsterm. Die Reynoldssche Schubspannung resultiert aus den konvektiven Beschleunigungstermen.

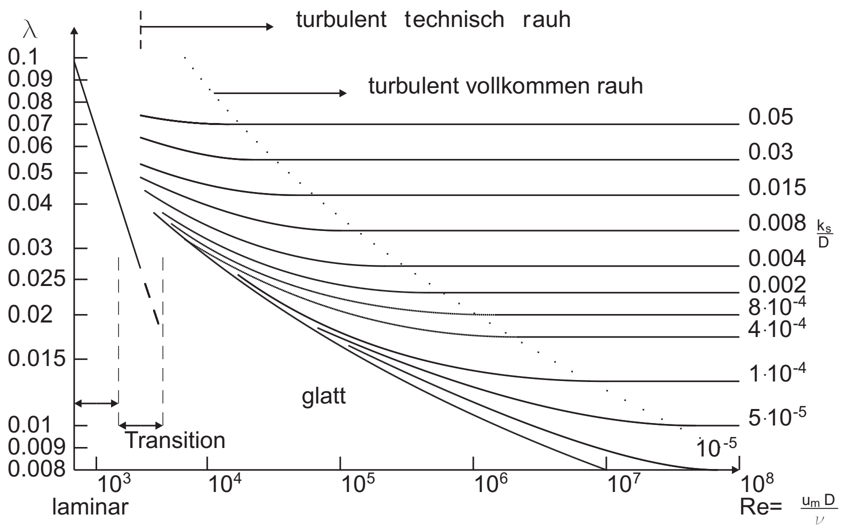
b) Das universelle logarithmische Wandgesetz beschreibt das Geschwindigkeitsprofil einer turbulenten Rohrströmung außerhalb der viskosen Unterschicht.

c)



d) Abklingende Geschwindigkeitsschwankungen, $\tau_l >> \tau_t$, linearer Geschwindigkeitsverlauf normal zur Wand, großer Geschwindigkeitsgradient

e) Das Moody-Diagramm stellt den Verlustbeiwert von Rohrströmungen in Abhängigkeit von der Reynoldszahl sowie der Oberflächenbeschaffenheit dar.



f) $Tu = \frac{1}{u_\infty}\sqrt{\frac{1}{3}\left(\overline{u'^2}+\overline{v'^2}+\overline{w'^2}\right)}$