....

(Name, Matr.-Nr, Unterschrift)

Klausur „Strömungsmechanik I Musterlösung“

07. 08. 2015

1. Aufgabe

a) $\rho = \rho(z) \neq konst \quad \Rightarrow$ differentielle Form der HGG:

$$\frac{dp}{dz} = -\rho(z)g$$

$$dp = -\rho(z)gdz$$

$$dp = -\rho_B \left(1 - K\frac{z}{H}\right) gdz$$

$$p(z) = -\rho_B \left(z - K\frac{z^2}{2H}\right) g + C$$

Randbedingung: $z = H$: $p(H) = p_a = -\rho_B \left(H - K\frac{H^2}{2H}\right) g + C$

$$C = p_a + \rho_B H \left(1 - \frac{K}{2}\right) g$$

$$p(z) = -\rho_B \left(z - K\frac{z^2}{2H}\right) g + p_a + \rho_B H \left(1 - \frac{K}{2}\right) g$$

$$p(z) = p_a + \rho_B g \left[(H - z) + \frac{K}{2H}(z^2 - H^2)\right]$$

b) Kräftegleichgewicht $\sum F = 0$ $G_K = (p_1 - p_2)A_K$

$$\rho_k g L^3 = (p_1 - p_2)L^2$$

$$\rho_k g L = p_1 - p_2 = p(z = h) - p(z = h + l)$$

$$\rho_k g L = p_a + \rho_B g \left[(H - h) + \frac{K}{2H}(h^2 - H^2)\right] - p_a - \rho_B g \left[(H - h - L) + \frac{K}{2H}((h + L)^2 - H^2)\right]$$

$$\rho_k L = \rho_B \left[(H - h - H + h + L) + \frac{K}{2H}(h^2 - H^2 - h^2 - 2hL - L^2 + H^2)\right]$$

$$\rho_k L = \rho_B \left[L + \frac{K}{2H}(-2hL - L^2)\right]$$

$$h = \frac{H}{K}\left(1 - \frac{\rho_k}{\rho_B}\right) - \frac{L}{2}$$

2. Aufgabe

a) Konti: $\dot{V}_1 = -uA \quad \dot{V}_2 = uA$

Bernoulli von Ballon 1 zu Ballon 2:

$$p_1 = p_2 + \rho \int_0^L b ds \quad \text{mit} \quad b = \dot{u}$$

$$p_2 - p_1 + \rho \dot{u} L = 0$$

Differenzieren der Bernoulli-Gleichung:

$$\dot{p_2} - \dot{p_1} + \rho L \ddot{u} = 0$$

$$p = p_a + C(V - V_0) \quad \text{und} \quad \dot{p} = C\dot{V}$$

Einsetzen in differenzierte Bernoulli-Gleichung:

$$\rho L \ddot{u} + CuA - (-CuA) = \rho L \ddot{u} + 2CuA = 0$$

$$\ddot{u} + \frac{2CA}{\rho L} u = 0$$

$$K = \sqrt{\frac{2CA}{\rho L}}$$

b) Allgemeine Änderung des Volumens von Ballon 2:

$$V_2(t) = V_0 - \Delta V \cos(Kt)$$

$$\dot{V}_2 = \Delta V k \sin(Kt) = uA$$

$$u(t) = \frac{\Delta V K}{A} \sin(Kt)$$

Maximale Geschwindigkeit für $\sin(Kt) = 1$:

$$u_{max} = \frac{\Delta V K}{A} = \Delta V \sqrt{\frac{2C}{\rho L A}}$$

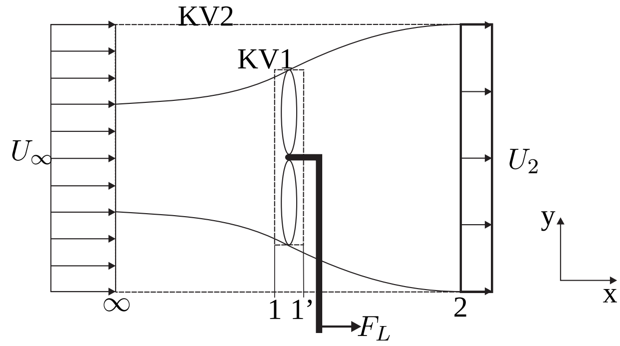
c) $(p_2 - p_1)_{max} = (\rho L \dot{u})_{max}$

$$\dot{u} = \frac{\Delta V k^2}{A} \cos(Kt)$$

$$\Rightarrow (p_2 - p_1)_{max} = \frac{\rho L \Delta V}{A} K^2$$

$$\Rightarrow (p_2 - p_1)_{max} = \Delta p_{max} = 2\Delta V C$$

3.Aufgabe



a) Eintrittsgeschwindigkeit im mitbewegten Koordinatensystem:

$U_\infty = v + u$

Geschwindigkeit in Propellerebene:

$$U' = \frac{U_\infty + U_2}{2}$$

Berechnung der Haltekraft F_L mit Kontrollvolumen KV 1:

$(p_{1'} - p_1)A_L = F_L$

Bernoulli von 0 nach 1 und von 1' nach 2:

$$p_a + \frac{\rho_L}{2}U_\infty^2 = p_1 + \frac{\rho_L}{2}U_1^2 \quad ; \quad p_1' + \frac{\rho_L}{2}U_{1'}^2 = p_a + \frac{\rho_L}{2}U_2^2$$

Gleichsetzen unter der Bedingung, dass $u_1 = u_1'$ ist, ergibt:

$$p_1 - p_{1'} = \frac{\rho_L}{2}(U_\infty^2 - U_2^2)$$

$$F_L = \frac{\rho_L}{2}(U_2^2 - U_\infty^2)A_L$$

Leistung:

$$P_L = -F_L U' = \frac{\rho_L}{4}U_\infty^3 \left[1 - \left(\frac{U_2}{U_\infty}\right)^2\right]\left(1 + \frac{U_2}{U_\infty}\right)A_L; \quad \frac{U_2}{U_\infty} = \xi$$

$$= \frac{\rho_L}{4}U_\infty^3 A_L(1-\xi^2)(1+\xi)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \xi} = 0 = \frac{\rho_L}{4}U_\infty^3 A_L\left((1+\xi)(-2\xi) + 1 - \xi^2\right)$$

$$\left((1+\xi)(-2\xi) + 1 - \xi^2\right) = 0$$

$$\Rightarrow \xi_{1,2} = -\frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{3}{9}} = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \xi = \frac{1}{3}$$

b) $P_{L,opt} = -F_{L,opt}U'_{opt} = \dfrac{8}{27}\rho_L U_\infty^3 A_L$

$$F_{W,opt} = -F_{L,opt} = \frac{4}{9}\rho_L U_\infty^2 A_L = \frac{4}{9}\rho_L (u+v)^2 A_L$$

4. Aufgabe

a) Pumpleistung:

$$P = \Delta p \dot{V}_1$$

$$\Delta p = \frac{P}{\dot{V}}$$

Bernoulli für Druckdifferenz Δp:

$$p_a + \rho g h + \Delta p = p_a + \rho g (L + z_1) + \frac{\rho}{2} v_1^2$$

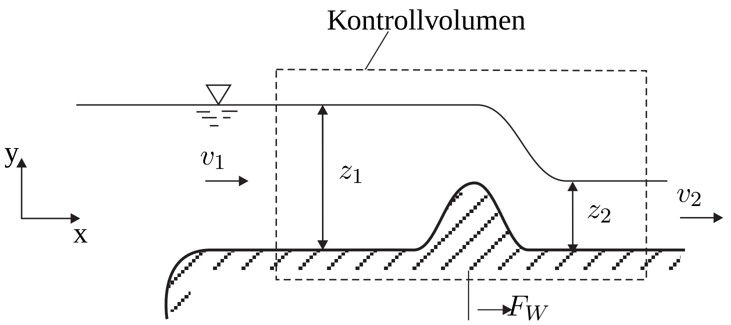
$$h + \frac{\Delta p}{\rho g} = L + \underbrace{z_1 + \frac{v_1^2}{2g}}_{H_1}$$

$$H_1 = h - L + \frac{\Delta p}{\rho g}$$

$$H_{min} = \frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{\dot{V}_1^2}{g b^2}}$$

$$y_{gr} = H_1 - H_{min}$$

b) Berechnung der Kraft auf das Wehr über Impulssatz:



$$\frac{dI_x}{dt} = \int_{KV} \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA = -\rho v_1^2 z_1 b + \rho v_2^2 z_2 b = F_p + F_W$$

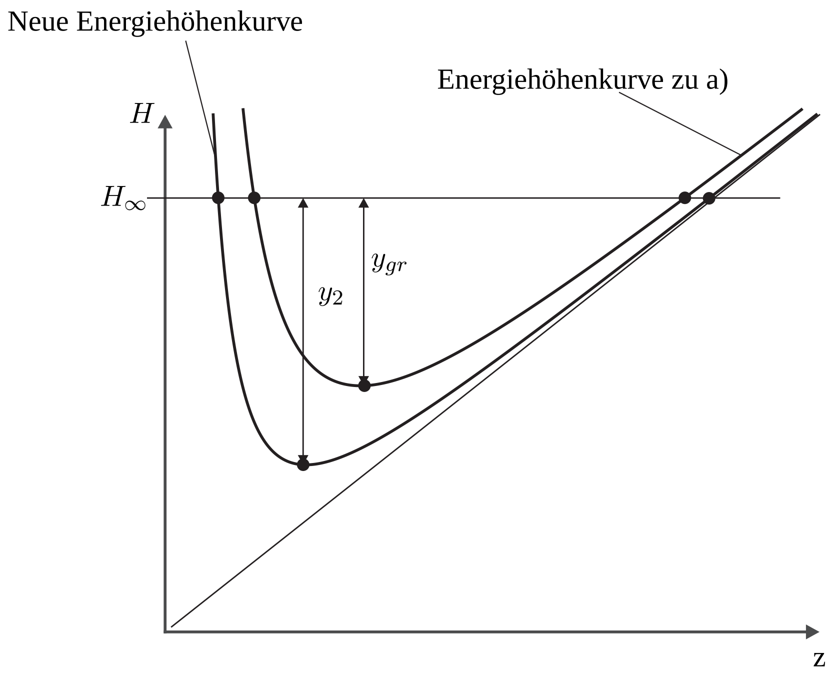
$$v_1 = \frac{\dot{V}_1}{b z_1} \quad v_2 = \frac{\dot{V}_1}{b z_2} = \frac{5 \dot{V}_1}{b z_1}$$

$$F_p = \int_0^{z_1} \rho g z b dz - \int_0^{z_2} \rho g z b dz = \frac{\rho g b}{2} (z_1^2 - z_2^2) = \frac{12}{25} \rho g b z_1^2$$

$$F_W = \rho b \left[\left(\frac{5 \dot{V}_1}{b z_1} \right)^2 \frac{z_1}{5} - \left(\frac{\dot{V}_1}{b z_1} \right)^2 z_1 - \frac{12}{25} g z_1^2 \right]$$

$$F_W = \rho \left[\frac{4 \dot{V}_1^2}{b z_1} - \frac{12}{25} g b z_1^2 \right]$$

c) Da die Pumpleistung konstant ist kann die Pumpe den alten Volumenstrom nicht über die Wehrhöhe y_2 fördern. Der Volumenstrom wird sinken, bis die Wehrhöhe y_2 die neue Grenzwehrhöhe ist.



5. Aufgabe

a) $0 = \tau dxdz - \left(\tau + \frac{\partial \tau}{\partial y} dy\right) dxdz + \rho g \sin\alpha dxdydz$

$$\frac{\partial \tau}{\partial y} = \rho g \sin\alpha$$

Integration:

$$\tau = \rho g sin\alpha \cdot y + C_1$$

R.B.: $\tau(y = d) = 0 \Rightarrow C_1 = -\rho g \sin\alpha d \Rightarrow \tau(y) = \rho \sin\alpha(y - d)$

Aus Hinweis: $\tau = -K \left|\frac{du}{dy}\right| \frac{du}{dy}$

die Geschwindigkeit nimmt für $y > 0$ stetig zu $\Rightarrow \frac{du}{dy} > 0$

$$\Rightarrow \tau = -K \left(\frac{du}{dy}\right)^2 \Rightarrow \frac{du}{dy} = \sqrt{-\frac{1}{K} \rho g \sin\alpha(y - d)}$$

Integration:

$$u(y) = \int \sqrt{\frac{\rho g \sin\alpha}{K}(d - y)} dy$$

$$= -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{\rho g \sin\alpha}{K}}(d - y)^{\frac{3}{2}} + C_2$$

R.B.: $u(y = 0) = -u_B \Rightarrow C_2 = -u_B + \sqrt{\frac{\rho g \sin\alpha}{K}} \cdot \frac{2}{3} d^{\frac{3}{2}}$

$$\Rightarrow u(y) = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{\rho g \sin\alpha}{K}} \left[d^{\frac{3}{2}} - (d - y)^{\frac{3}{2}}\right] - u_B$$

b) $\dot{V} = \int_0^d u(y) dy = 0$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{\frac{\rho g \sin\alpha}{K}} \left[d^{\frac{3}{2}} y - \frac{2}{5}(-1)(d - y)^{\frac{5}{2}}\right]_0^d - [u_B y]_0^d$$

$$\Rightarrow u_B = \frac{2}{5}\sqrt{\frac{\rho g \sin\alpha}{K}} d^{\frac{3}{2}}$$

6. Aufgabe

a)
- Stromlinie: Die Linien, die tangential zum Geschwindigkeitsfeld verlaufen werden Stromlinien genannt.
- Bahnlinie: Die Bahnlinie ist die Trajektorie eines speziellen Fluidpartikels in einem gewissen Zeitintervall.
- Rauchlinie: Die Rauchlinie definiert den momentanen Ort der Fluidpartikel, die zu einer vorherigen Zeit denselben festen räumlichen Punkt passiert haben.

b) In stationären Strömungen fallen Stromlinie, Bahnlinie und Rauchlinie zusammen.

c) Viskose Unterschicht: Die Viskose Unterschicht ist eine sehr dünne Schicht in unmittelbarer Wandhähe, in der die laminare Schubspannung gegenüber den turbulenten Schubspannung dominiert.

d) $k > y_*$
Die Rauheitsstärke k ist größer als die Dicke der viskosen Unterschicht y_*.

e) $\tau = \tau_t + \tau_l = -\rho\overline{u'v'} + \eta\frac{d\bar{u}}{dr}$

f) Die Reynoldssche Mittelung beschreibt die Strömungsgröße f als Summe aus zeitlichem Mittelwert $\bar{f}$ und Schwankungsanteil f .

g) $\sum \vec{M} = \int_{KF} (\vec{r} \times \vec{v})\rho(\vec{v} \cdot \vec{n})dA = 0$