(Name, Matr.-Nr, Unterschrift)

Klausur „Strömungsmechanik I“ (Bachelor) & „Technische Strömungslehre“ (Diplom)

11. 03. 2015

1. Aufgabe

a) Kräftegleichgewicht: Auftrieb = Gewichtskraft

$$mg = \rho_W g V_U + \rho_W g V_0$$

$$V_0 = \frac{m - V_U \rho_W}{\rho_W}$$

b)

$$p(H) = p_a + \rho_W g H$$

$$p_a V_0 = mRT = p(H) V_1$$

$$V_1 = p_a V_0 / p(H) = \frac{p_a (m - V_U \rho_W)}{\rho_W (p_a + \rho_W g H)}$$

c)Bedingung für positiven Auftrieb: $V_{1,neu} \geq V_0$:

$$\Delta V = V_0 - V_1 = V_0 \left(1 - \frac{p_a}{p_a + \rho_W g H}\right) = V_0 \frac{\rho_w g H}{p_a + \rho_w g H}$$

$$\Delta m = \Delta V \rho_L (z = H)$$

Ideales Gasgesetz: $p = \rho R T$

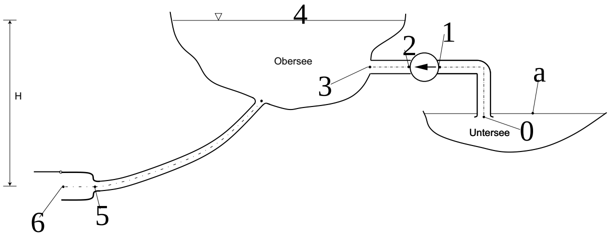
$$\frac{p_a}{\rho_L(z=0)} = \frac{(p_a + \rho_W g H)}{\rho_L(z=H)}$$

$$\rho_L(z=H) = \rho_L(z=0) \frac{p_a + \rho_W g H}{p_a}$$

$$\Delta m = V_0 \frac{\rho_w g H}{p_a + \rho_w g H} \rho_L(z=0) \frac{p_a + \rho_W g H}{p_a}$$

$$\Delta m = (m - V_U \rho_W) \frac{\rho_L(z=0) g H}{p_a}$$

2. Aufgabe



a) Leistung der Pumpe: $P = \dot{V} \triangle p_0$; $\triangle p_0 = p_2 - p_1$

Bernoulli a $\rightarrow$ 1: $p_a = p_1 + \frac{\rho_W}{2} v_1^2 (1 + 2\lambda \frac{L_1}{D_1}) + \rho_W g L_1$

Bernoulli 2 $\rightarrow$ 3: $p_2 + \frac{\rho_W}{2} v_2^2 = p_3 + \frac{\rho_W}{2} v_3^2 (1 + \lambda \frac{L_1}{D_1})$

HGG: $p_3 = p_a + \rho_W g h$; Konti: $v = v_1 = v_2 = v_3$

$\rightarrow p_2 - p_1 = \rho_W g(h + L_1) + \frac{\rho_W}{2} v^2 (1 + 3\lambda \frac{L_1}{D_1})$

mit $\dot{V} = \frac{\pi}{4} D_1^2 v$ folgt:

$P = \dot{V}[\rho_W g(h + L_1) + 8\rho_W (\frac{\dot{V}}{\pi D_1^2})^2 (1 + 3\lambda \frac{L_1}{D_1})]$

b) $p_{min} = p_1$ (Druck am Pumpeneintritt), mit Bernoulli aus a) folgt:

$p_1 = p_a - \frac{\rho_W}{2} v^2 (1 + 2\lambda \frac{L_1}{D_1}) - \rho_W g L_1 \overset{!}{>} p_D$

$\leftrightarrow v < (\frac{2(p_a - p_D - \rho_W g L_1)}{\rho_W (1 + 2\lambda \frac{L_1}{D_1})})^{\frac{1}{2}}$

$\rightarrow \dot{V}_{max} < \frac{\pi}{4} D_1^2 v = \frac{\pi}{4} D_1^2 (\frac{2(p_a - p_D - \rho_W g L_1)}{\rho_W (1 + 2\lambda \frac{L_1}{D_1})})^{\frac{1}{2}}$

c) instationäres Ausströmen:

Bernoulli $4 \rightarrow 6$: $p_a + \rho_W g H = p_6 + \frac{\rho_W}{2} v_6^2 + \rho_W \int_4^6 \frac{\partial v}{\partial t} ds + \triangle p_V$

mit $p_6(t \geq 0) = p_a$ und $\triangle p_V = \frac{\rho_W}{2} v_5^2 \lambda \frac{L_2}{D_2} + \frac{\rho_W}{2} v_6^2 \lambda \frac{L_3}{2D_2}$

Konti: $\frac{\pi}{4} D_2^2 v_5 = \frac{\pi}{4} D_6^2 v_6 \rightarrow \triangle p_V = \frac{\rho_W}{2} v_6^2 \lambda (\frac{L_3}{2D_2} + \frac{16 L_2}{D_2})$

für stationäres Ausströmen gilt: $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$

$\rightarrow v_{6,stat} = (\frac{2gH}{1 + \frac{\lambda}{D_2}(\frac{L_3}{2} + 16 L_2)})^{\frac{1}{2}}$

instationär:

$p_a + \rho_W g H = p_a + \frac{\rho_W}{2} v_6^2 (1 + \frac{\lambda}{D_2}(\frac{L_3}{2} + 16 L_2)) + \rho_W [\int_{L_2} \frac{\partial v_5}{\partial t} ds_5 + \int_{L_3} \frac{\partial v_6}{\partial t} ds_6]$

(ab jetzt $(1 + \frac{\lambda}{D_2}(\frac{L_3}{2} + 16 L_2)) := K$)

$\rightarrow \rho_W g H = \frac{\rho_W}{2} v_6^2 K + \rho_W \frac{dv_6}{dt} [(\frac{2D_2}{D_2})^2 L_2 + L_3]$

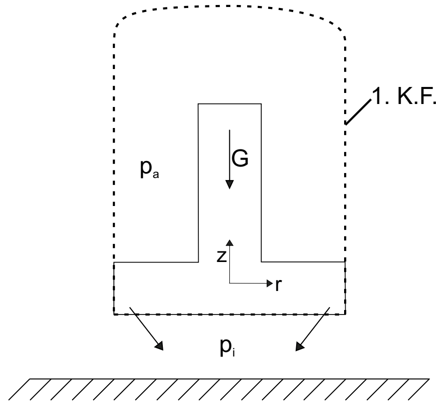
$\leftrightarrow \frac{2gH}{K} = v_{6,stat}^2 = v_6^2 + \frac{2}{K} \frac{dv_6}{dt} [4 L_2 + L_3]$

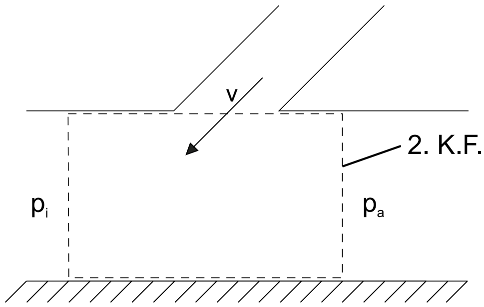
$\rightarrow \int_{\triangle T} dt = \frac{2}{K} (4 L_2 + L_3) \int_0^{0,5 v_{6,stat}} \frac{dv}{v_{6,stat}^2 - v^2}$

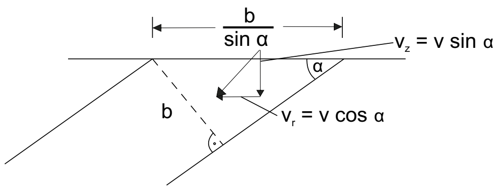
mit Hinweis $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} =... \rightarrow \triangle T = \frac{4L_2 + L_3}{K v_{6,stat}} ln(\frac{v_{6,stat} + v}{v_{6,stat} - v}|_0^{0,5 v_{6,stat}})$

$\rightarrow \triangle T = \frac{(4L_2 + L_3) ln(3)}{\sqrt{2gH(1 + \frac{\lambda}{D_2}(\frac{L_3}{2} + 16 L_2))}}$

3. Aufgabe







a) 1.KF. Impulssatz in z-Richtung

$$(p_i - p_a)\pi\frac{D^2}{4} - mg = -\varrho(v\sin(\alpha))^2\frac{b}{\sin(\alpha)}2\pi\frac{D}{2}$$

$$\Rightarrow (p_i - p_a)\pi\frac{D^2}{4} - mg = -\varrho v^2\sin(\alpha)b\pi D$$

2.KF. Impulssatz in radialer Richtung

$$(p_i - p_a)\pi Dh = \varrho v\sin(\alpha)v\cos(\alpha)\frac{b}{\sin(\alpha)}\pi D + \varrho v^2 b\pi D$$

$$\Rightarrow (p_i - p_a)\pi Dh = \varrho v^2 b\pi D(\cos(\alpha) + 1)$$

Einsetzen ergibt:

$$v = \sqrt{\frac{mg}{\varrho D\pi b(\sin(\alpha) + \frac{D}{4h}(1+\cos(\alpha)))}}$$

$$(p_i - p_a) = \frac{mg(\cos(\alpha)+1)}{hD\pi(\sin(\alpha) + \frac{D}{4h}(1+\cos(\alpha)))}$$

b) Bernoulli $\infty \rightarrow$ Austritt

$$p_a + \Delta p_G = p_a + \frac{\varrho}{2}v^2 \Rightarrow \Delta p_G = \frac{\varrho}{2}v^2$$

$$\dot{V} = \pi Dbv \Rightarrow P = \dot{V}\Delta p_G = \frac{\varrho}{2}\pi Dbv^3$$

c) P minimal, wenn v minimal

$$(\sin(\alpha) + \frac{D}{4h}\cos(\alpha)) = g(\alpha) = max!$$

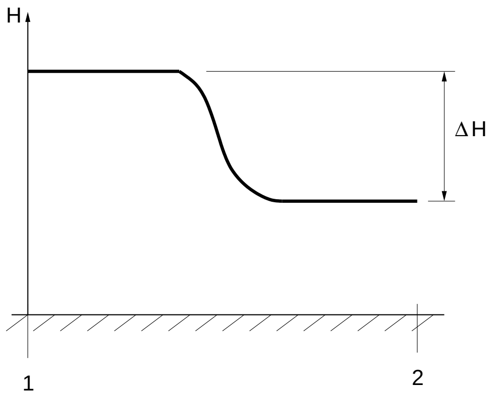
$$\frac{dg(\alpha)}{d\alpha} = \cos(\alpha) - \frac{D}{4h}\sin(\alpha) = 0$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha) = \frac{D}{4h}\sin(\alpha)$$

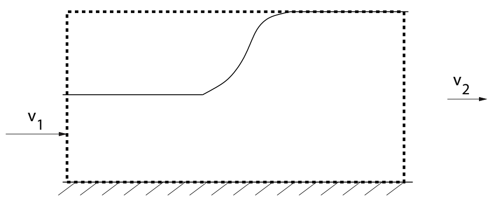
$$\Rightarrow \alpha = \arctan\frac{4h}{D}$$

4. Aufgabe

a) Skizze des Verlustes an Energiehöhe:



b) x-Impulssatz: $\dfrac{dI_x}{dt} = \sum F_x$



$$-\varrho v_1^2 z_1 b + \varrho v_2^2 z_2 b = b p_a (z_2 - z_1) + b \left(\int_0^{z_1} (p_a + \varrho g z)\,\mathrm{d}z - \int_0^{z_2} (p_a + \varrho g z)\,\mathrm{d}z \right)$$

$$\rightarrow\ \frac{1}{g}\left(v_2^2 z_2 - v_1^2 z_1\right) = \left(\frac{z_1^2}{2} - \frac{z_2^2}{2}\right)$$

Konti: $v_1 z_1 = v_2 z_2$

$$\rightarrow\ \frac{1}{g}\left(\frac{v_1^2 z_1^2}{z_2} - v_1^2 z_1\right) = \frac{1}{2}(z_1^2 - z_2^2)$$

$$\rightarrow\ \frac{v_1^2 z_1}{g z_2}\,(z_1 - z_2) = \frac{1}{2}(z_1 - z_2)(z_1 + z_2)$$

$$\rightarrow\ \frac{v_1^2 z_1}{g z_2} = \frac{1}{2}(z_1 + z_2)$$

$$\rightarrow\ z_2^2 + z_1 z_2 - 2\frac{v_1^2 z_1}{g} = 0, \quad \text{mit } Fr = \frac{v}{\sqrt{gz}}$$

$$\rightarrow\ z_2^2 + z_1 z_2 - 2 Fr_1^2 z_1^2 = 0$$

$$\rightarrow\ z_{2_{1,2}} = -\frac{z_1}{2} \pm \sqrt{\frac{z_1^2}{4} + 2 Fr_1^2 z_1^2}$$

Einzige, physikalisch sinnvolle Lösung: $z_2 = \dfrac{z_1}{2}\left(-1 + \sqrt{1 + 8 Fr_1^2}\right)$

c) Energiesatz: $z_1 + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{v_2^2}{2g} + \Delta H_{12}$

$\rightarrow z_1 + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{v_1^2 z_1^2}{2g z_2^2} + \Delta H_{12}$

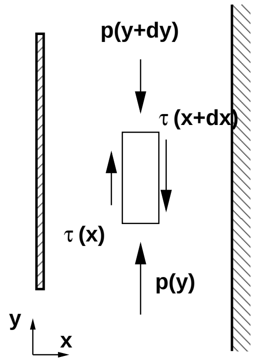
$\rightarrow \Delta H_{12} = z_1 \left(1 - \frac{z_2}{z_1} + \frac{Fr_1^2}{2}\left(1 - \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2\right)\right)$

5. Aufgabe

a) Kräftegleichgewicht in y-Richtung am infinitesimalen Element:

$$-\rho g\ dxdydz + \tau\ dydz - \left(\tau + \frac{\partial \tau}{\partial x}dx\right)\ dydz + p(y)\ dxdz - \left(p(y) + \frac{\partial p}{\partial y}dy\right)\ dxdz\ =\ 0$$

$$\Rightarrow -\rho g - \frac{\partial \tau}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$



1. Integration $\Rightarrow \tau(x) = -\left(\rho g + \frac{\partial p}{\partial y}\right) x + C_1$

Newtonsches Fluid, ausgebildete Strömung $\tau = -\eta \frac{dv}{dx}$

2. Integration $\Rightarrow v(x) = -\frac{1}{\eta}\int \tau dx = \frac{1}{\eta}\left(\rho g + \frac{\partial p}{\partial y}\right)\frac{x^2}{2} - \frac{C_1 x}{\eta} + C_2$

Randbedingungen: $v(x=0) = -v_P,\ v(x=B) = 0$

$v(x=0) = -v_P \Rightarrow C_2 = -v_P$

$v(x=B) = \frac{1}{\eta}\left(\rho g + \frac{\partial p}{\partial y}\right)\frac{B^2}{2} - \frac{C_1 B}{\eta} - v_P = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{1}{2}\left(\rho g + \frac{\partial p}{\partial y}\right) B - \frac{v_P \eta}{B}$

einsetzen liefert $v(x) = \frac{B^2}{2\eta}\left(\rho g + \frac{\partial p}{\partial y}\right)\left(\left(\frac{x}{B}\right)^2 - \frac{x}{B}\right) + v_P\left(\frac{x}{B} - 1\right)$

b) Konti: $\dot{m} = \rho \int\limits_0^B v\ dx = B\rho \int\limits_0^1 v\ d(\frac{x}{B}) \overset{!}{=} 0$

$$\rho B\left[\frac{B^2}{2\eta}\left(\rho g + \frac{\partial p}{\partial y}\right)\left(\frac{1}{3}\left(\frac{x}{B}\right)^3 - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{B}\right)^2\right) + v_P\left(\frac{1}{2}\left(\frac{x}{B}\right)^2 - \frac{x}{B}\right)\right]_0^1 \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{6 v_P \eta}{B^2} - \rho g$$

c) Kraft auf die Platte $F_R = 2T \cdot \int\limits_0^L\ \tau_W\ dy$

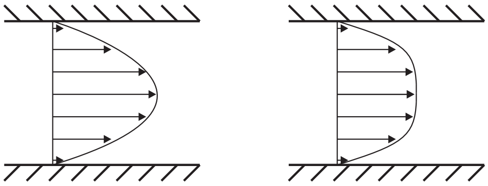
$\tau_W = -\tau(x=0) = -\frac{1}{2}\left(\rho g + \frac{\partial p}{\partial y}\right) B + \frac{v_P \eta}{B}$

mit $\frac{\partial p}{\partial y}$ aus b) $\Rightarrow \tau_W = \frac{4\eta v_P}{B} \neq f(y)$

$\Rightarrow F_R = 8\eta v_P LT/B$

6. Aufgabe

a) Laminares (links) und zeitlich gemitteltes, turbulentes (rechts) Geschwindigkeitsprofil



Das turbulente ist völliger als das laminare Geschwindigkeitsprofil, da der Impulsaustausch in radialer Richtung größer ist.

b) Die zähe Unterschicht y_t ist eine sehr dünne, wandnahe Schicht, in der die laminaren Schubspannungen über die turbulenten Schubspannungen dominieren und die Geschwindigkeitskomponente in Strömungsrichtung linear mit dem Wandabstand ansteigt.

c) Das logarithmische Wandgesetz gilt erst ab einem gewissen Abstand von der Wand außerhalb der zähen Unterschicht y_t. Daraus ergibt sich die Bedingung, dass $y > y_t$ sein muss.