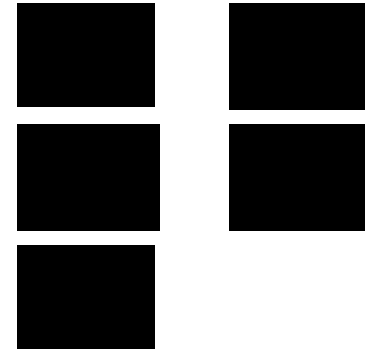


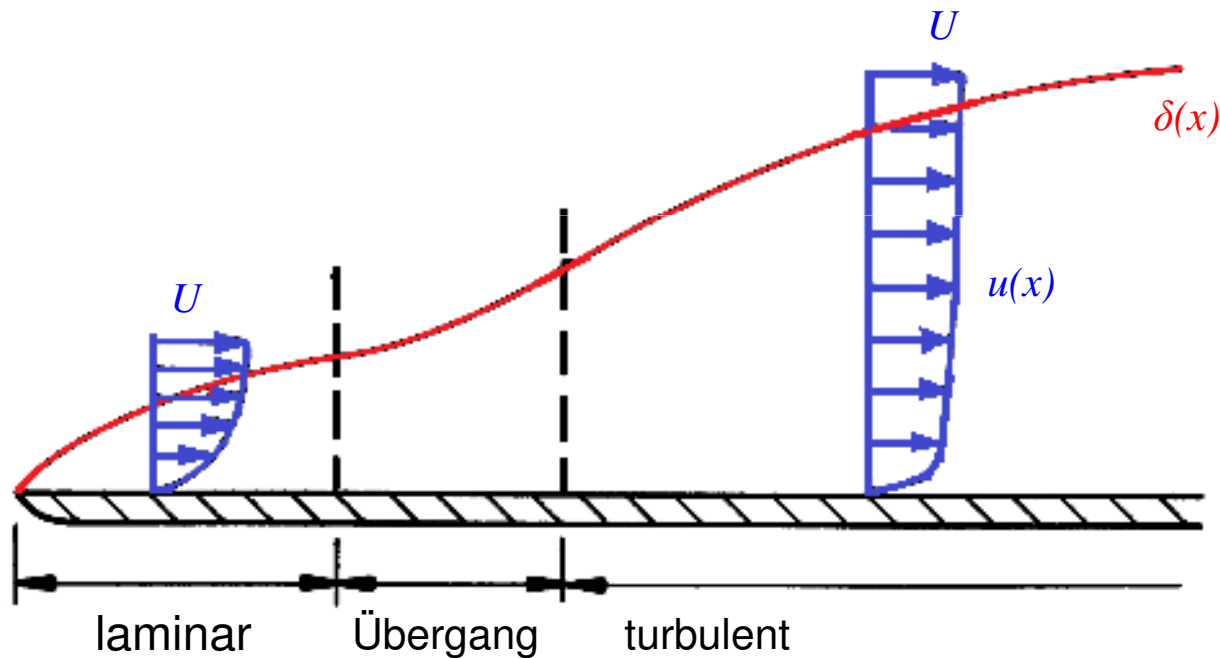
# Turbulente Grenzschichten



Vgl. Blasius-Experiment bis  $x \leq x_{kr}$  bzw.  $Re_x \leq Re_{kr}$  OK !

$Re_x > Re_{kr}$  Übergang laminar  $\rightarrow$  turbulent

$Re_{x_{kr}} = f$  ( Oberfläche, Geometrie der Vorderkante;  $U'$ ,  $V'$ ; etc. )



längsangeströmte ebene Platte :  $Re_{kr} \approx 5 \cdot 10^5$

laminare Grenzschicht :  $\delta \sim x^{1/2}$   
 $\tau_0 \sim U^{3/2}$

turbulente Grenzschicht :  $\delta \sim x^{4/5}$   
 $\tau_0 \sim U^{7/4}$

### Grenzschichtgleichungen der turbulenten Strömung

Erhaltungsgleichungen gültig für laminare und turbulente Strömungen ;

jedoch : Auflösung aller Skalen „unmöglich“

⇒ Strömung wird durch gemittelte Größen beschrieben

⇒ Reynolds Mittelung

hier : zeitliche Mittelung

Zerlegung nach Reynolds (siehe turbulente Rohrströmung)

$$f = \bar{f} + f'$$

mit

$$\bar{f} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f(x, y, z, t) dt \quad \text{zeitlicher Mittelwert}$$

$f'$  : Schwankungsanteil

Erhaltungsgleichungen in Divergenzform für inkompressibles Fluid

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho uw)}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \nabla^2 u$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v^2)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho vw)}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta \nabla^2 v$$

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uw)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho vw)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w^2)}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \eta \nabla^2 w$$

Kontinuitätsgleichung :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (\overline{u + u'}) + \frac{\partial}{\partial y} (\overline{v + v'}) + \frac{\partial}{\partial z} (\overline{w + w'}) &= \\ \frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w}}{\partial z} + \frac{\partial \overline{u'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w'}}{\partial z} &= \\ \frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w}}{\partial z} &= 0 \end{aligned}$$

x-Impulsgleichung :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} [\rho(\overline{u + u'})] + \frac{\partial}{\partial x} [\rho(\overline{u + u'})^2] + \frac{\partial}{\partial y} [\rho(\overline{u + u'})(\overline{v + v'})] + \frac{\partial}{\partial z} [\rho(\overline{u + u'})(\overline{w + w'})] \\ = -\frac{\partial}{\partial x} (\overline{p + p'}) + \eta \nabla^2 (\overline{u + u'}) \\ \frac{\partial \rho \overline{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [\rho(\overline{u^2} + \underline{\overline{u'^2}})] + \frac{\partial}{\partial y} [\rho(\overline{uv} + \underline{\overline{u'v'}})] + \frac{\partial}{\partial z} [\rho(\overline{uw} + \underline{\overline{u'w'}})] \\ = -\frac{\partial \overline{p}}{\partial x} + \eta \nabla^2 \overline{u} \end{aligned}$$

denn :

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho 2\bar{u}u'), \quad \frac{\partial}{\partial y} [\rho(\bar{u}v' + u'\bar{v})], \quad \frac{\partial}{\partial z} [\rho(\bar{u}w' + u'\bar{w})], \quad \frac{\partial \bar{p}'}{\partial x}, \nabla^2 \bar{u}' \rightarrow 0$$

y-Impuls , z-Impuls ebenso  $\Rightarrow$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0$$

$$\rho \left( \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \eta \nabla^2 \bar{u} - \rho \left[ \frac{\partial \bar{u}'^2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}'v'}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}'w'}{\partial z} \right]$$

$$\rho \left( \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \eta \nabla^2 \bar{v} - \rho \left[ \frac{\partial \bar{u}'v'}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}'^2}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}'w'}{\partial z} \right]$$

$$\rho \left( \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \eta \nabla^2 \bar{w} - \rho \left[ \frac{\partial \bar{u}'w'}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}'w'}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}'^2}{\partial z} \right]$$

die gemittelten Produkte der turbulenten Schwankungsgrößen ergeben den **turbulenten** oder **Reynoldsschen Spannungstensor**.

$$\begin{pmatrix} \sigma'_{xx} & \tau'_{xy} & \tau'_{xz} \\ \tau'_{xy} & \sigma'_{yy} & \tau'_{yz} \\ \tau'_{xz} & \tau'_{yz} & \sigma'_{zz} \end{pmatrix} = -\rho \begin{pmatrix} \overline{u'^2} & \overline{u'v'} & \overline{u'w'} \\ \overline{u'v'} & \overline{v'^2} & \overline{v'w'} \\ \overline{u'w'} & \overline{v'w'} & \overline{w'^2} \end{pmatrix}$$

$-\rho \overline{f'g'}$  : Reynolds- oder scheinbare Spannungen

turbulente Strömung :

Gesamtspannung = visk. Spannung + turbulente Spannung

i. a. gilt : turbulente Spannung  $\gg$  visk. Spannung

Vereinfachung obiger Erhaltungsgleichungen mittels

- ebene Strömung  $\bar{w} = 0, \frac{\partial}{\partial z} \rightarrow 0$

- Grenzschichtannahme  $\frac{\partial}{\partial x} \ll \frac{\partial}{\partial y}$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \overline{u'v'} \right]$$

Grenzschichtgleichungen turbulenter Strömungen

zusätzlicher Term :  $-\rho \overline{u'v'}$

Randbedingungen analog zur laminaren Strömung

Schließung des Gleichgewichtssystems durch die Prandtlsche Mischungsweghypothese

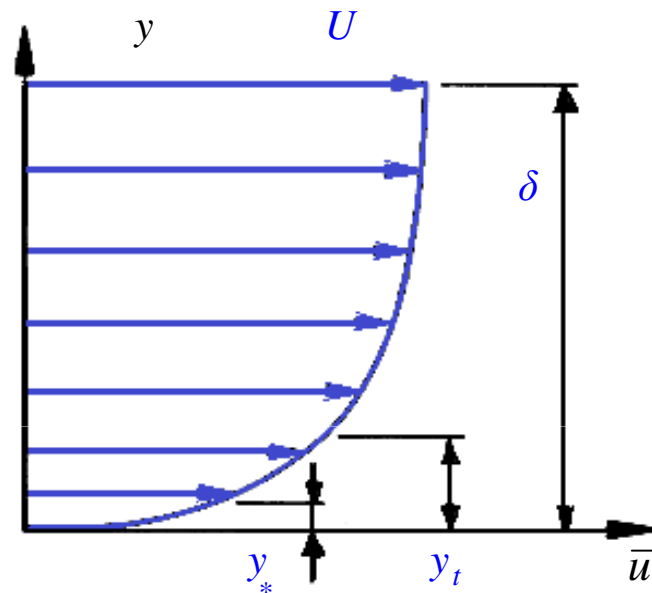
$$\tau_t = -\rho \overline{u'v'} = \rho l^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right| \frac{d\bar{u}}{dy} = \eta_t \frac{d\bar{u}}{dy}$$

$l = f$  (charakteristische Länge )

# Turbulente Plattengrenzschicht

Annahme : Grenzschicht ist turbulent ab  $x = 0$

$u(y)_{GS}$  vergleichbar mit  $u(y)_{Rohr}$



zähe Unterschicht  $y < y_*$

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = \frac{u_* y}{\nu} \quad \text{mit } u_* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$$

log. Schicht  $y_* < y$

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = 2.5 \ln \frac{y u_*}{\nu} + C \quad \text{univers. Wandgesetz}$$



**Achtung** : das **universelle Wandgesetz** gilt **nicht** in Wandnähe  $y < y_*$

### äußerer Grenzschichtbereich

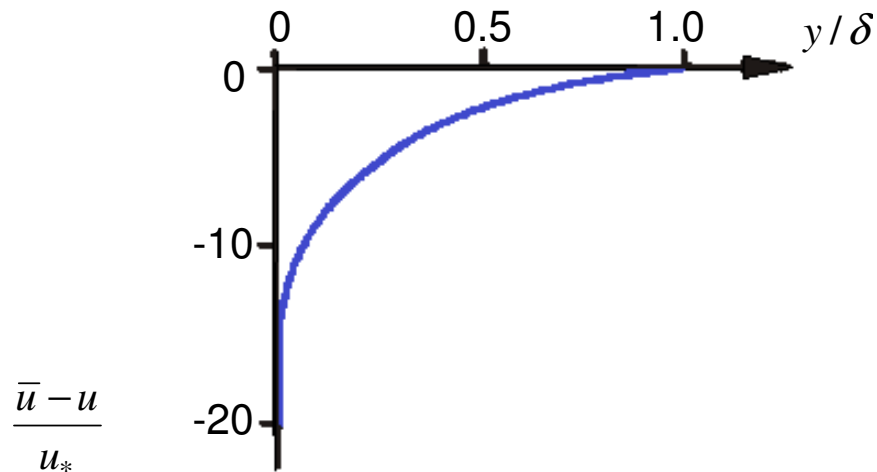
$y_* \ll y \leq \delta$  Abnahme der turbulenten Spannungen

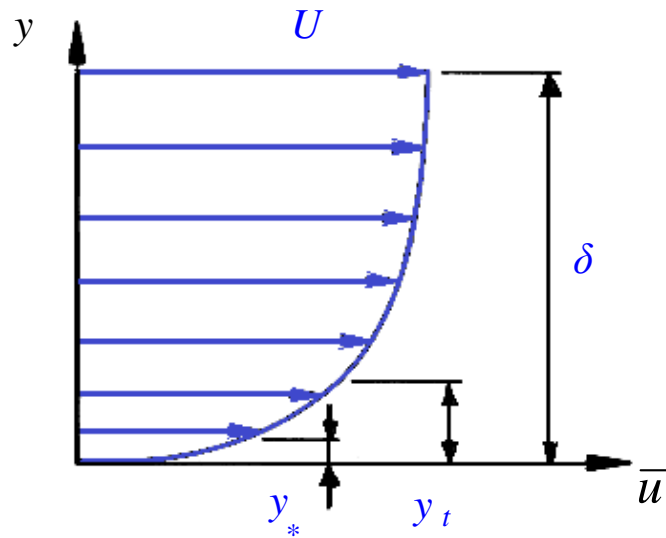
$$U - \bar{u} \sim \tau_w \text{ bzw. } u_* \Rightarrow$$

$$\frac{U - \bar{u}}{u_*} = f\left(\frac{y}{\delta}\right)$$

$f\left(\frac{y}{\delta}\right) : ?$  Annahme : universelles Wandgesetz gilt im Außenbereich

nach Prandtl :  $f\left(\frac{y}{\delta}\right) = \frac{1}{k} \ln \frac{y}{\delta}$



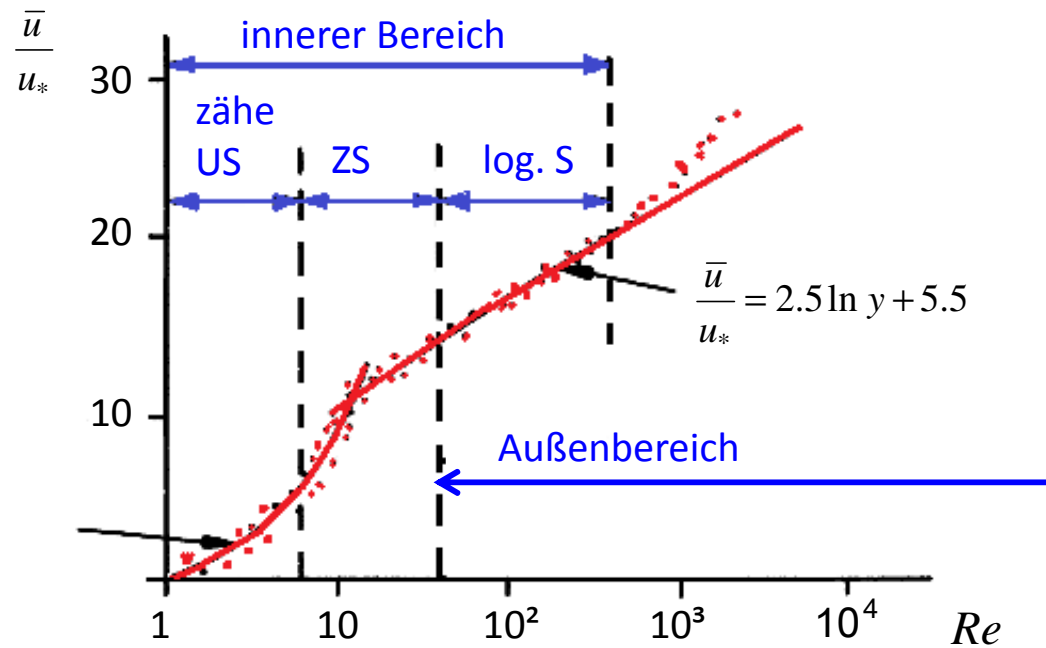


Zusammenfassung :

$0 \leq y \leq y_*$  zähe Unterschicht

$y_* < y < y_t$  Übergangsschicht

$y_t \leq y \leq \delta$  Außenbereich



## Herleitung des logarithmischen Gesetzes mittels Dimensionsbetrachtungen

- Geschwindigkeitsprofil in Wandnähe

$$\bar{u} = \bar{u}(u_*, y, \nu)$$

$\pi$  – Theorem : 4 Var. , 2 Ref. dim.

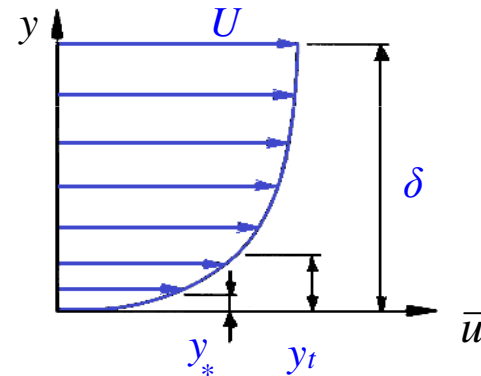
$$\Rightarrow \frac{\bar{u}}{u_*} = f\left(\frac{u_* y}{\nu}\right) = f(y^+)$$

zähe Unterschicht :

$$\tau_w = \eta \frac{d\bar{u}}{dy}$$

$$\bar{u} = \frac{y\tau_w}{\eta} = \frac{y\rho u_*^2}{\eta}$$

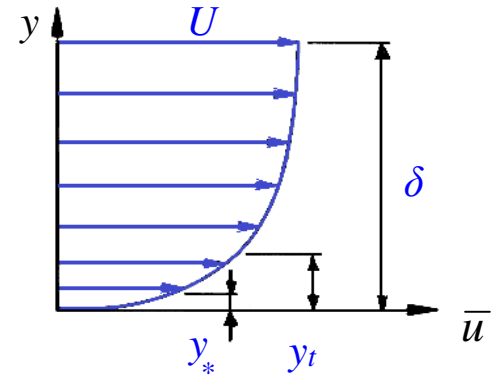
$$\frac{\bar{u}}{u_*} = \frac{y u_*}{\nu} = y_+$$



Außenbereich :

$$\bar{u} - U \sim u_*$$

$$\frac{\bar{u} - U}{u_*} = g\left(\frac{y}{\delta}\right) = g(\zeta)$$

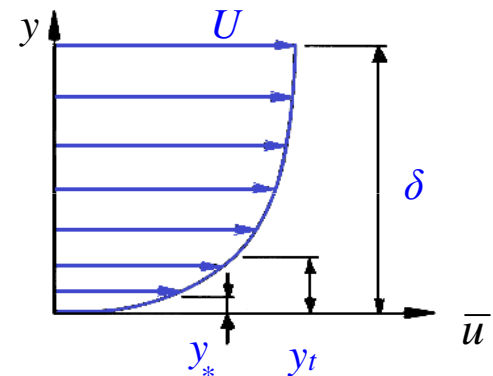


Gebiet zwischen Innen- und Außenbereich :

$$\frac{d\bar{u}}{dy} \text{ für } y_+ \rightarrow \infty$$

$$\zeta \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow f(y_+) \text{ und } g(\zeta)$$



Innenbereich :

$$\frac{d\bar{u}}{dy} = u_* \frac{dy_+}{dy} \frac{df}{dy_+} = \frac{u_*^2}{\nu} \frac{df}{dy_+}$$

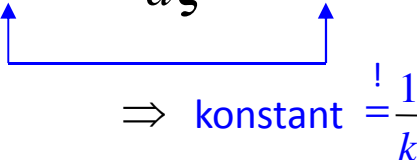
Außenbereich :

$$\frac{d\bar{u}}{dy} = u_* \frac{dg}{d(y/\delta)} \frac{d(y/\delta)}{dy} = \frac{u_*}{\delta} \frac{dg}{d(y/\delta)}$$

$$\left. \frac{d\bar{u}}{dy} \right|_{\text{Innen}} = \left. \frac{d\bar{u}}{dy} \right|_{\text{Außen}}$$

$$\frac{u_*^2}{\nu} \frac{df}{dy_+} = \frac{u_*}{\delta} \frac{dg}{d\zeta} \quad \left| \cdot \frac{y}{u_*} \right.$$

$$y_+ \frac{df}{dy_+} = h(y_+) = \zeta \frac{dg}{d\zeta} = r(\zeta)$$


  
 $\Rightarrow \text{konstant} = \frac{1}{k}$

$$\Rightarrow f(y^+) = \frac{1}{k} \ln y_+ + \alpha$$

$$g(y/\delta) = \frac{1}{k} \ln(y/\delta) + \beta$$

Experiment :  $k = 0.4$  ,  $\alpha = 5.5$  ,  $\beta = -1.0$

$$y_+ \text{ groß} : \frac{\bar{u}}{u_*} = 2.5 \ln y + 5.5 \quad (\text{log. Gesetz})$$

$$\zeta = \frac{y}{\delta} \text{ klein} : \frac{\bar{u} - U}{u_*} = 2.5 \ln\left(\frac{y}{\delta}\right) - 1.0 \quad (\text{Defektverteilung})$$

Näherung von  $\bar{u}(y)$  mittels

$$\frac{\bar{u}}{U} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/n}$$

Vgl. mit Experiment  $\rightarrow n = 7 \quad \Rightarrow$

Verdrängungsdicke  $\delta_1$

$$\delta_1 = \delta \int_0^1 \left(1 - \frac{\bar{u}}{U}\right) d\left(\frac{y}{\delta}\right) = \frac{\delta}{8}$$

Impulsverlustdicke  $\delta_2$

$$\delta_2 = \delta \int_0^1 \frac{\bar{u}}{U} \left(1 - \frac{\bar{u}}{U}\right) d\left(\frac{y}{\delta}\right) = \frac{7}{72} \delta$$

!  $\frac{\bar{u}}{U} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7}$  nicht gültig bei  $y = 0$  !

$\Rightarrow \tau_w$  aus der turbulenten Rohrströmung

Mit  $\lambda = \frac{0.316}{\sqrt[4]{\frac{\bar{u}d}{\nu}}}$  in  $\lambda = \frac{8\tau_w}{\rho\bar{u}^2}$  und  $\frac{\bar{u}}{U} = 0.8$  folgt

$$\frac{U}{u_*} = 8.74 \left( \frac{u_* R}{\nu} \right)^{1/7}$$

$$\Rightarrow u_* = 0.150 U^{7/8} \left( \frac{\nu}{\delta} \right)^{1/8} \quad \text{bzw.}$$

$$\tau_w = \rho u_*^2 = 0.0225 \rho U^{7/4} \left( \frac{\nu}{\delta} \right)^{1/4}$$

v. Karmansche Integralbeziehung

$$\frac{d\delta_2}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho U^2} = \underline{\underline{0.0225 \left( \frac{\nu}{\delta U} \right)^{1/4}}}$$

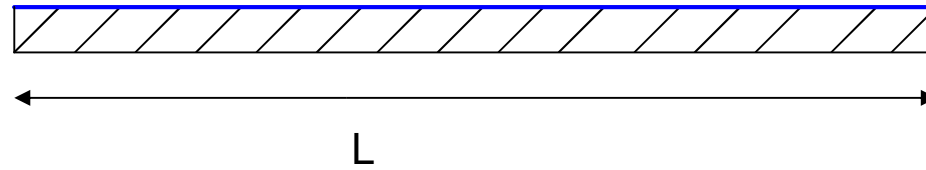
$$\rightarrow \frac{7}{72} \frac{d\delta}{dx} = \frac{d\delta_2}{dx}$$

$$\frac{\delta(x)}{x} = \frac{0.37}{\left( \frac{Ux}{\nu} \right)^{1/5}} = \frac{0.37}{(\text{Re}_x)^{1/5}}$$

D. h.  $\delta \sim x^{4/5}$  turbulente Grenzschicht

$\delta \sim x^{1/2}$  laminare Grenzschicht

Reibungskraft auf **einer** Seite



$$D = \int_0^L \tau_0 dx = 0.036 \rho U^2 \frac{L}{(\text{Re}_L)^{1/5}}$$

$$\Rightarrow D \sim L^{4/5} \quad \text{bzw.} \quad D \sim U^{9/5}$$

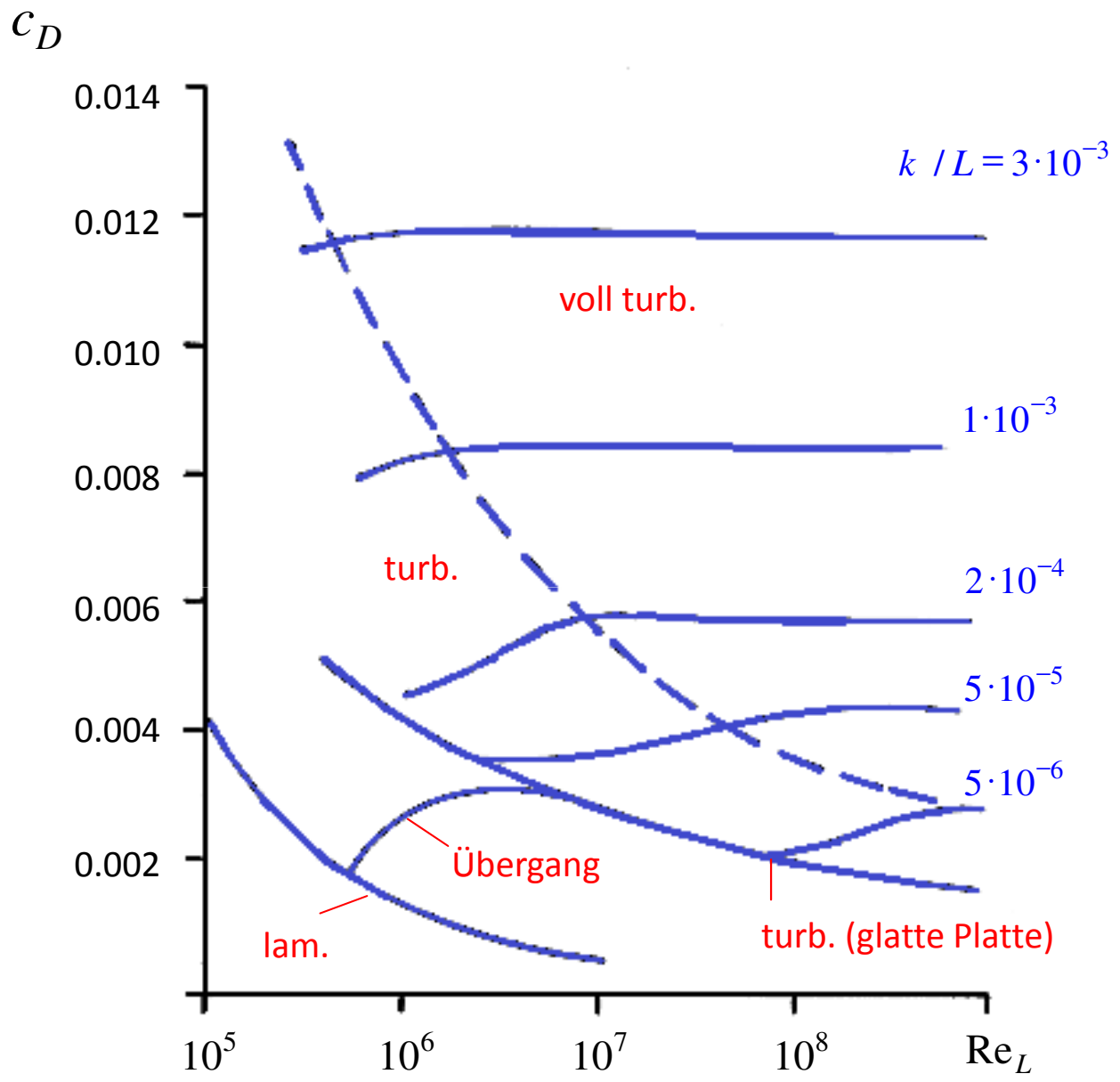
$$\left[ \text{lam.: } D \sim L^{1/2} \quad \text{bzw.} \quad D \sim U^{3/2} \right]$$

$$c_D = \frac{D}{\frac{1}{2} \rho U^2 L} = \frac{0.072}{(\text{Re}_L)^{1/5}} \quad \text{bzw.} \quad c_D = \frac{0.074}{(\text{Re}_2)^{1/5}} \quad (\text{Exp.})$$

allgemein :  $c_D = f(\text{Re}_2, k/L)$

bzw  $c_D = f(k/L)$  für  $\text{Re}_L$  sehr groß !





Zum Diagramm :

Übergangsbereich :

$$c_D = \frac{0.074}{\sqrt[5]{\text{Re}_L}} - \frac{1700}{\text{Re}_L}$$

glatte Platte :

$$c_D = \frac{0.455}{(\log \text{Re}_L)^{2.58}}$$

voll turbulentes Gebiet :

$$c_D = [1.89 - 1.62 \log(k/L)]^{-2.5}$$

## Bemerkungen zur Turbulenz

vorteilhaft :

- > Wärmeübergang zwischen Wand und Fluid
  - Klimaanlage
  - Kessel im Kraftwerk
  
- > Vermischung von Fluiden
  - Rauch aus Schornsteinen

laminare Strömung wünschenswert :

- > Druckverlust der Rohrströmung
- > Widerstand eines Tragflügels

jedoch : Vermeidung von Ablösung in turbulenten Strömungen  
=> größerer Auftrieb als mit Ablösung