

.....
(Matr.-Nr, Unterschrift)

Klausur „Strömungsmechanik I“ (Bachelor)

14. 08. 2020

1. Aufgabe

a) Ohne Ölfilm: $G = A$

$$\pi r^2 \varrho_S g D \pi = \frac{1}{2} \pi r^2 \varrho_W g D \pi$$

$$\rightarrow \varrho_S = \frac{\varrho_W}{2}$$

b) Druck auf der Unterseite des Schlauches:

$$p_u = p_a + h_{max} \varrho_{\ddot{O}l} g + (2r - h_{max}) \varrho_W g = p_a + r \varrho_W g$$

$$\rightarrow h_{max} = \frac{r}{1 - \frac{\varrho_{\ddot{O}l}}{\varrho_W}} = \frac{8}{5} r$$

c) Volumenkonstanz für $D \gg r$: $V_{\ddot{O}l} = \frac{D^2 \pi}{4} h_{max} = \frac{m_{\ddot{O}l}}{\varrho_{\ddot{O}l}}$

$$\rightarrow D = \sqrt{\frac{m_{\ddot{O}l}}{\varrho_{\ddot{O}l}} \frac{4(1 - \frac{\varrho_{\ddot{O}l}}{\varrho_W})}{\pi r}} = \sqrt{\frac{20}{3} \frac{m_{\ddot{O}l}}{\varrho_W \pi r}}$$

d) Radialkraft:

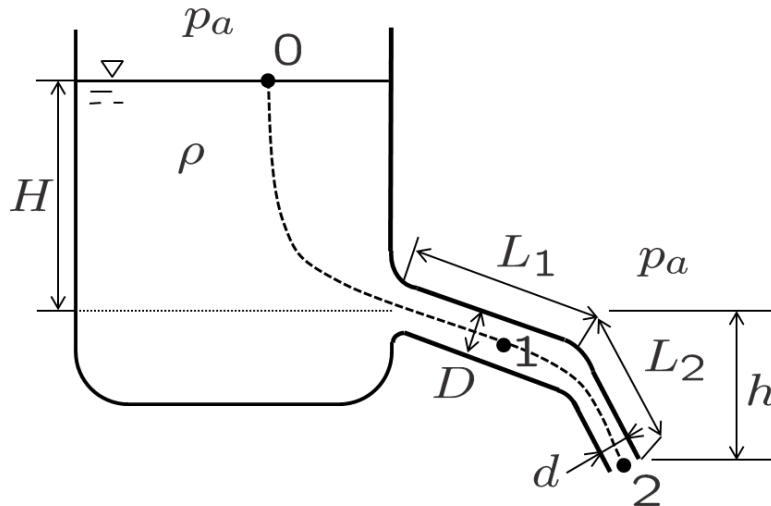
$$F_R = dl \left[\int_0^{2r} (p_a + \varrho_{\ddot{O}l} g s_1) ds_1 - \int_r^{2r} p_a ds_2 - \int_0^r (p_a + \varrho_W g s_3) ds_3 \right]$$

$$\rightarrow F_R = dl \left[\frac{\varrho_{\ddot{O}l}}{2} g 4r^2 - \frac{\varrho_W}{2} g r^2 \right] = \frac{1}{4} \varrho_W g r^2$$

2. Aufgabe

- a) Kontinuitätsgleichung: Masse
Bernoulligleichung: mechanische Energie

- b) Skizze:



Bernoulli 0-2

$$p_a + \rho g(H + h) = p_2 + \frac{1}{2}\rho u_2^2 + \frac{1}{2}\rho u_2^2 \lambda \frac{L_2}{d} + \frac{1}{2}\rho u_1^2 \lambda \frac{L_1}{D}$$

Am Auslass herrscht Umgebungsdruck:

$$p_2 = p_a$$

Kontinuitätsgleichung 1-2:

$$u_1 A_1 = u_2 A_2 \rightarrow u_1 \frac{\pi D^2}{4} = u_2 \frac{\pi d^2}{4} \rightarrow u_1 = u_2 \frac{d^2}{D^2}$$

Einsetzen in die Bernoulli Gleichung

$$g(H + h) = \frac{1}{2}u_2^2 + \frac{1}{2}u_2^2 \lambda \frac{L_2}{d} + \frac{1}{2}u_2^2 \lambda \frac{d^4}{D^4} \frac{L_1}{D}$$

$$g(H + h) = \frac{1}{2}u_2^2 \left[1 + \lambda \frac{L_2}{d} + \lambda \frac{d^4}{D^4} \frac{L_1}{D} \right]$$

Auflösen nach u_2 :

$$\sqrt{\frac{2g(H + h)}{\left[1 + \lambda \frac{L_2}{d} + \lambda \frac{d^4 L_1}{D^5} \right]}} = u_2$$

Volumenstrom bestimmen:

$$\dot{V}_2 = u_2 A_2 = u_2 \frac{\pi d^2}{4} = \sqrt{\frac{2g(H + h)}{\left[1 + \lambda \frac{L_2}{d} + \lambda \frac{d^4 L_1}{D^5} \right]}} \frac{\pi d^2}{4}$$

c) instationärer Bernoulli 0-2

$$p_a + \rho g(H + h) = p_2 + \frac{1}{2}\rho u_2^2 + \frac{1}{2}\rho u_2^2 \lambda \frac{L_2}{d} + \frac{1}{2}\rho u_1^2 \lambda \frac{L_1}{D} + \rho \int_0^2 \frac{\partial u}{\partial t} ds$$

Aufteilen des Integrals:

$$\rho \int_0^2 \frac{\partial u}{\partial t} ds = \rho \int_0^1 \frac{\partial u_1}{\partial t} ds + \rho \int_1^2 \frac{\partial u_2}{\partial t} ds$$

Mit $L_1 \gg D$ und $L_2 \gg d$:

$$\int_0^1 \frac{\partial u_1}{\partial t} ds = \int_0^1 \frac{du_1}{dt} ds = \frac{du_1}{dt} L_1 \quad \int_1^2 \frac{\partial u_2}{\partial t} ds = \int_1^2 \frac{du_2}{dt} ds = \frac{du_2}{dt} L_2$$

Unter Berücksichtigung der Kontinuitätsgleichung und $p_2 = p_a$ ergibt sich:

$$g(H + h) = \frac{1}{2}u_2^2 \left[1 + \lambda \frac{L_2}{d} + \lambda \frac{d^4 L_1}{D^5} \right] + \frac{du_2}{dt} \left[\frac{d^2}{D^2} L_1 + L_2 \right]$$

bzw.

$$\frac{du_2}{dt} = \frac{g(H+h) - \frac{1}{2}u_2^2 \overbrace{\left[1 + \lambda \frac{L_2}{d} + \lambda \frac{d^4 L_1}{D^5}\right]}{:=K_1}}{\underbrace{\left[\frac{d^2}{D^2} L_1 + L_2\right]}{:=K_2}} = \frac{g(H+h) - \frac{1}{2}u_2^2 K_1}{K_2}$$

Trennen der Variablen:

$$\frac{dt}{K_2} = \frac{1}{g(H+h)} \frac{du_2}{1 - \underbrace{\frac{u_2^2 K_1}{2g(H+h)}}{:=x^2}} = \frac{1}{g(H+h)} \frac{dx \left(\sqrt{\frac{K_1}{2g(H+h)}}\right)^{-1}}{1-x^2} = \frac{1}{g(H+h) \sqrt{\frac{K_1}{2g(H+h)}}} \frac{dx}{1-x^2}$$

Da $u_2(t=0) = 0$ ist und als maximale Austrittsgeschwindigkeit $u_2 = \sqrt{2g(H+h)K_1}$ erreicht werden kann, folgt:

$$x = \frac{u_2 \sqrt{K_1}}{\sqrt{2g(H+h)K_1}} < 1 \Rightarrow \int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{artanh}(x) = \tanh^{-1}(x)$$

Somit ergibt sich:

$$\tanh^{-1}(x) = t \frac{g(H+h) \sqrt{\frac{K_1}{2g(H+h)}}}{K_2} \Leftrightarrow \tanh^{-1}\left(\frac{u_2 \sqrt{K_1}}{\sqrt{2g(H+h)K_1}}\right) = t \frac{g(H+h) \sqrt{\frac{K_1}{2g(H+h)}}}{K_2}$$

Umgeformt nach $u_2(t)$ erhält man:

$$u_2(t) = \frac{\sqrt{2g(H+h)}}{\sqrt{\left[1 + \lambda \frac{L_2}{d} + \lambda \frac{d^4 L_1}{D^5}\right]}} \tanh\left(t \frac{g(H+h) \sqrt{\frac{\left[1 + \lambda \frac{L_2}{d} + \lambda \frac{d^4 L_1}{D^5}\right]}{2g(H+h)}}}{\left[\frac{d^2}{D^2} L_1 + L_2\right]}\right)$$

Der Volumenstrom ergibt sich zu:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= u_2 A_2 = u_2 \frac{\pi d^2}{4} \\ &= \frac{\pi d^2}{4} \cdot \frac{\sqrt{2g(H+h)}}{\sqrt{\left[1 + \lambda \frac{L_2}{d} + \lambda \frac{d^4 L_1}{D^5}\right]}} \tanh\left(t \frac{g(H+h) \sqrt{\frac{\left[1 + \lambda \frac{L_2}{d} + \lambda \frac{d^4 L_1}{D^5}\right]}{2g(H+h)}}}{\left[\frac{d^2}{D^2} L_1 + L_2\right]}\right) \end{aligned}$$

3. Aufgabe

a) Impulssatz in X-Richtung:

$$\sum \vec{F}_i = \int \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA$$

$$F_H = 2\pi\rho \int_0^R u_1(r)^2 r dr$$

$$= 2\pi\rho u_{max1}^2 \int_0^R \left(1 - 2\frac{r^2}{R^2} + \frac{r^4}{R^4}\right) r dr$$

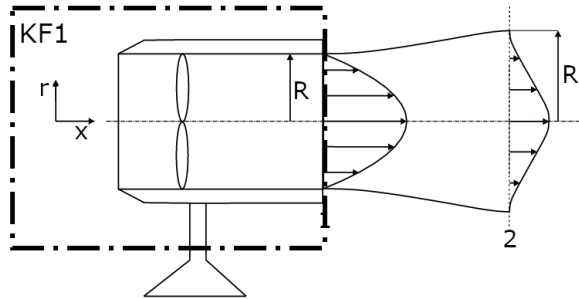
$$F_H = 2\pi\rho u_{max1}^2 \left(\frac{R^2}{2} - \frac{R^4}{2R^2} + \frac{R^6}{6R^4}\right)$$

$$= \pi\rho u_{max1}^2 \frac{R^2}{3}$$

$$P = F_H \cdot u_m$$

$$u_m = \frac{2\pi}{\pi R^2} \int_0^R u_{max1} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) r dr = 2\frac{u_{max1}}{R^2} \left(\frac{R^2}{2} - \frac{R^2}{4}\right) = \frac{u_{max1}}{2}$$

$$\Rightarrow P = \pi\rho u_{max1}^3 \frac{R^2}{6} \quad [W]$$



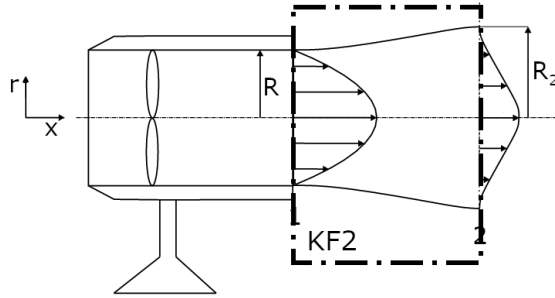
b) Kontinuitätsgleichung:

$$2\pi \int_0^R u_{max1} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) r dr = 2\pi \int_0^{R_2} u_{max2} \left(1 - \frac{r}{R_2}\right) r dr$$

$$u_{max1} \left(\frac{R^2}{2} - \frac{R^2}{4}\right) = u_{max2} \int_0^{R_2} \left(r - \frac{r^2}{R_2}\right) dr$$

$$u_{max1} \frac{R^2}{4} = u_{max2} \left[\frac{r^2}{2} - \frac{1}{3} \frac{r^3}{R_2}\right]_0^{R_2} = \frac{1}{6} R_2^2 u_{max2}$$

$$u_{max1} = \frac{2}{3} \frac{R_2^2}{R^2} u_{max2}$$



Impulssatz in x-Richtung:

$$2\pi\rho \int_0^R u_{max1}^2 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^2 r dr = 2\pi\rho \int_0^{R_2} u_{max2}^2 \left(1 - \frac{r}{R_2}\right)^2 r dr$$

$$u_{max1}^2 \left(\frac{R^2}{2} - \frac{R^2}{2} + \frac{R^2}{6}\right) = u_{max2}^2 \int_0^{R_2} \left(r - 2\frac{r^2}{R_2} + \frac{r^3}{R_2^2}\right) dr$$

$$u_{max1}^2 \frac{R^2}{6} = u_{max2}^2 \left(\frac{R_2^2}{2} - 2\frac{1}{3}R_2^2 + \frac{1}{4}R_2^2\right)$$

$$\frac{R^2}{6} u_{max1}^2 = \frac{1}{12} R_2^2 u_{max2}^2$$

$$u_{max1} = \sqrt{\frac{1}{2} \frac{R_2}{R}} u_{max2}$$

Einsetzen in Kontinuitätsgleichung:

$$\sqrt{\frac{1}{2} \frac{R_2}{R}} u_{max2} = \frac{2R_2^2}{3R^2} u_{max2}$$

$$\Rightarrow R_2 = \sqrt{\frac{1}{2} \frac{3}{2}} R \quad [m]$$

4. Aufgabe

a) Da $y_W > y_{gr}$ ist, folgt $F_{r_{gr}} = 1$ und somit $z_W = z_{gr}$: Es gilt:

$$1 = \frac{v_{gr}}{\sqrt{gz_{gr}}}$$

$$z_W = z_{gr} = \sqrt[3]{\frac{z_1^2 v_1^2}{g}}$$

Massenerhaltung liefert:

$$bz_1 v_1 = bz_{gr} v_{gr}$$

v_{gr} berechnet sich zu:

$$v_{gr} = \frac{\dot{V}}{z_{gr} b} = \frac{v_1 z_1}{\sqrt[3]{\frac{z_1^2 v_1^2}{g}}}$$

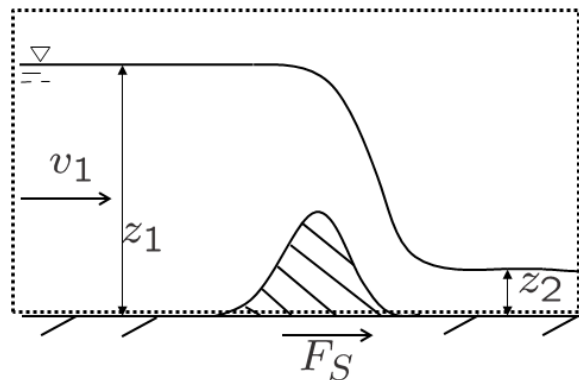
b)

$$y_{gr} = H_1 - H_{min}$$

$$\dot{V} = v_1 z_1 b$$

$$H_1 = z_1 + \frac{v_1^2}{2g} \Rightarrow y_{gr} = z_1 + \frac{v_1^2}{2g} - \frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{v_1^2 z_1^2}{g}}$$

c) Impulssatz in x-Richtung:



$$-v_1^2 z_1 b \rho + \rho b z_2 v_2^2 = \rho b g \left(\frac{z_1^2}{2} - \frac{z_2^2}{2} \right) + F_S$$

$$\Rightarrow F_W = -F_S = -\rho b (v_2^2 z_2 - v_1^2 z_1) + \rho g b \left(\frac{z_1^2}{2} - \frac{z_2^2}{2} \right)$$

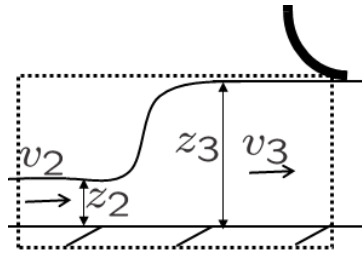
Kontinuitätsgleichung ergibt:

$$v_2 z_2 = v_1 z_1 \quad \Rightarrow \quad z_2 = \frac{v_1}{v_2} z_1$$

Einsetzen in die Impulsgleichung:

$$F_W = -\rho b \left(v_2^2 \frac{v_1}{v_2} z_1 - v_1^2 z_1 \right) + \rho g b \left(\frac{z_1^2}{2} - \frac{\left(\frac{v_1}{v_2} z_1 \right)^2}{2} \right)$$

d) Impulssatz in x-Richtung:



$$-v_2^2 z_2 b \rho + \rho b z_3 v_3^2 = \rho b g \left(\frac{z_2^2}{2} - \frac{z_3^2}{2} \right)$$

Konti:

$$v_2 z_2 b = v_3 z_3 b \quad \Rightarrow \quad v_3 = v_2 \frac{z_2}{z_3} = v_2 \frac{\frac{v_1}{v_2} z_1}{z_3}$$

Einsetzen:

$$\begin{aligned} v_2^2 z_2 (z_2 - z_3) &= \frac{1}{2} z_3 (z_2 - z_3) (z_2 + z_3) g \\ \Rightarrow \left(z_3 + \frac{z_2}{2} \right)^2 &= \frac{2 z_2}{g} v_2^2 + \frac{z_2^2}{4} \\ \Rightarrow z_3 &= -\frac{z_2}{2} \pm \sqrt{\frac{2 z_2}{g} v_2^2 + \frac{z_2^2}{4}} \end{aligned}$$

Da $z_3 < 0$ physikalisch nicht möglich ist, gilt:

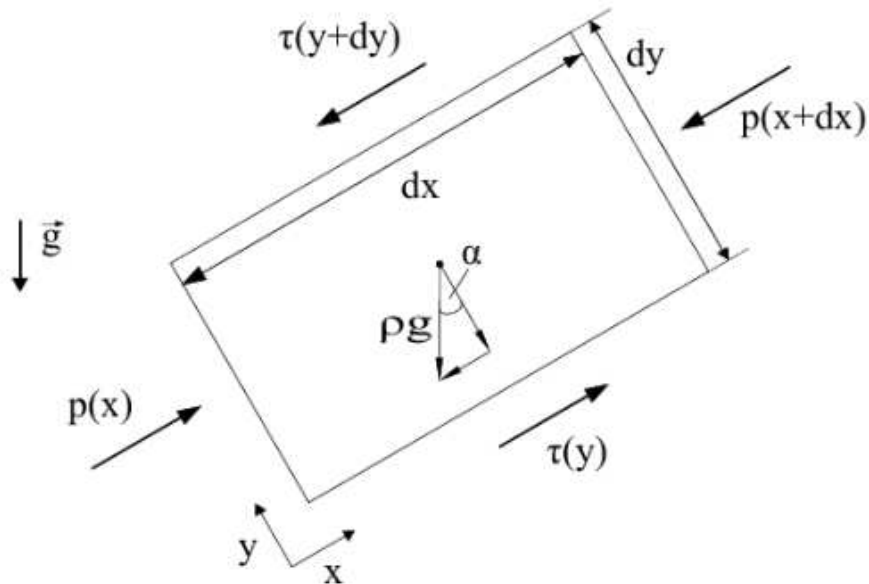
$$z_3 = -\frac{z_2}{2} + \sqrt{\frac{2 z_2}{g} v_2^2 + \frac{z_2^2}{4}} = -\frac{\frac{v_1}{v_2} z_1}{2} + \sqrt{\frac{2 \frac{v_1}{v_2} z_1}{g} v_2^2 + \frac{\left(\frac{v_1}{v_2} \right)^2 z_1^2}{4}}$$

Für v_3 ergibt sich:

$$v_3 = v_2 \frac{\frac{v_1}{v_2} z_1}{-\frac{\frac{v_1}{v_2} z_1}{2} + \sqrt{\frac{2 \frac{v_1}{v_2} z_1}{g} v_2^2 + \frac{\left(\frac{v_1}{v_2} \right)^2 z_1^2}{4}}}$$

5. Aufgabe

a) ausgebildete Strömung:



$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow \frac{d\tau}{dy} = -\rho g \sin \alpha - \frac{dp}{dx}$$

1. Integration:

$$\tau(y) = -\left(\rho g \sin \alpha + \frac{dp}{dx}\right) y + c_1$$

Newtonsches Fluid: $\tau(y) = -\eta \frac{du}{dy}$

$$\Rightarrow \frac{du}{dy} = \frac{1}{\eta} \left(\rho g \sin \alpha + \frac{dp}{dx}\right) y - \frac{c_1}{\eta}$$

2. Integration:

$$u(y) = \frac{1}{2\eta} \left(\rho g \sin \alpha + \frac{dp}{dx}\right) y^2 - \frac{c_1}{\eta} y + c_2$$

$$1.RB : \quad u(y=0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$2.RB : \quad u(y=\delta) = u_B \Rightarrow c_1 = \frac{1}{2} \left(\rho g \sin \alpha + \frac{dp}{dx}\right) \delta - \frac{u_B \eta}{\delta}$$

$$\Rightarrow u(y) = \frac{1}{2\eta} \left(\rho g \sin \alpha + \frac{dp}{dx} \right) (y^2 - y\delta) + u_B \frac{y}{\delta}$$

$$\tau(y) = -\eta \frac{u_B}{\delta} + \frac{1}{2} \left(\rho g \sin \alpha + \frac{dp}{dx} \right) (\delta - 2y)$$

$$\frac{dp}{dx} = \frac{\Delta p}{L} = \frac{p_2 - p_1}{L}; \quad \text{mit} \quad p_2 = p_a + \rho g h_2, p_1 = p_a + \rho g h_1$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{dx} = \rho g \frac{h_2 - h_1}{L}$$

$$u(y) = \frac{1}{2\eta} \left(\rho g \sin \alpha + \rho g \frac{h_2 - h_1}{L} \right) (y^2 - y\delta) + u_B \frac{y}{\delta}$$

$$\tau(y) = -\eta \frac{u_B}{\delta} + \frac{1}{2} \left(\rho g \sin \alpha + \rho g \frac{h_2 - h_1}{L} \right) (\delta - 2y)$$



b)

$$\frac{P}{B} = u_B F_B; \quad F_B = \int_0^L \tau_B dx; \quad \tau_B = -\eta \frac{du}{dy} \Big|_{y=\delta}$$

$$\tau_B = -\frac{\rho g}{2} \left(\sin \alpha + \frac{h_2 - h_1}{L} \right) \delta - u_B \frac{\eta}{\delta}$$

$$\Rightarrow \frac{P}{B} = u_B L \left[-\frac{\rho g}{2} \left(\sin \alpha + \frac{h_2 - h_1}{L} \right) \delta - u_B \frac{\eta}{\delta} \right]$$

6. Aufgabe

- a) Anhand der Eulerschen Turbinengleichung wird das Drehmoment einer Turbine berechnet. Sie lautet:

$$M = \dot{m}(v_{t,aus}r_{aus} - v_{t,ein}r_{ein})$$

- b) Für die gegebene Beziehung

$$\frac{\eta_t}{\eta} = \frac{y^+ \cdot (u_\tau H - y^+ \nu)}{u_\tau H} - 1$$

sind zunächst die Größen u_τ sowie y^+ zu bestimmen. Es gilt:

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_W}{\rho}}$$

Daraus folgt für y^+ :

$$y^+ = \frac{u_\tau \cdot \bar{y}}{\nu} = \frac{u_\tau \cdot \frac{H}{4}}{\nu}$$

Somit ergibt sich für das Verhältnis von turbulenter zu molekularer Viskosität:

$$\begin{aligned} \frac{\eta_t}{\eta} &= \frac{\frac{\sqrt{\frac{\tau_W}{\rho} \cdot \frac{H}{4}}}{\nu} \cdot (\sqrt{\frac{\tau_W}{\rho}} H - \frac{\sqrt{\frac{\tau_W}{\rho} \cdot \frac{H}{4}}}{\nu} \nu)}{\sqrt{\frac{\tau_W}{\rho}} H} - 1 \\ &= \frac{\frac{3}{16} H \sqrt{\frac{\tau_W}{\rho}}}{\nu} - 1 \end{aligned}$$

- c) Für die turbulente Viskosität η_t gilt die Beziehung:

$$\eta_t = \rho l^2 \left| \frac{du}{dy} \right|,$$

wobei l die Prandtl'sche Mischungsweglänge beschreibt. Die Ableitung des angegebenen Geschwindigkeitsprofils an der Stelle $r = \frac{3}{4}H$ ergibt:

$$\left(\left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right| \right)_{\frac{3}{4}H} = - \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)_{\frac{3}{4}H} = \left(-\frac{\bar{u}_{max}}{7H} \left(1 - \frac{y}{H} \right)^{-\frac{6}{7}} \right)_{\frac{3}{4}H} = \left(-\frac{\bar{u}_{max}}{7H} \left(\frac{1}{4} \right)^{-\frac{6}{7}} \right)$$

Nach der Mischungsweglänge l aufgelöst, ergibt sich:

$$l = \sqrt{\frac{\eta_t}{\rho \left(\left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right| \right)}} = \sqrt{\frac{\eta_t}{\rho \left(-\frac{\bar{u}_{max}}{7H} \left(\frac{1}{4} \right)^{-\frac{6}{7}} \right)}} \quad (1)$$

- d) Es gilt:

$$\bar{u} = \frac{1}{A} \int_0^A u(y) dA^* = \frac{1}{2BH} \int_{-H}^H u(y) B dy$$

Die Integration liefert:

$$\bar{u} = \frac{\bar{u}_{max}}{2H} \int_{-H}^H \left| 1 - \frac{y}{H} \right|^{\frac{1}{7}} dy = \frac{\bar{u}_{max}}{2H} \left[-\frac{7}{8} H \left| 1 - \frac{y}{H} \right|^{\frac{8}{7}} \right]_{-H}^H = \frac{7}{8} \frac{2^{\frac{8}{7}}}{2} \bar{u}_{max}$$