

Aerodynamisches Laboratorium

Numerische Simulation von Profilmströmungen

Zusammenfassung

In diesem Versuch werden numerische Lösungen für Profilmströmungen vorgestellt. Zunächst werden die wichtigsten Ansätze, die seit den 60er Jahren entwickelt wurden, kurz beschrieben, sowie deren Voraussetzungen zur Anwendung und möglicher Einsatzbereich diskutiert. Danach werden die Grundzüge zur numerischen Lösung von Differentialgleichungen am Beispiel der Laplace-Gleichung erläutert. Dies beinhaltet die Diskretisierung der partiellen Ableitungen, sowie die iterative Lösung des daraus entstehenden algebraischen Gleichungssystems. In der Versuchsdurchführung werden Lösungen für verschiedene Profilgeometrien vorgestellt, die mit Hilfe verschiedener mathematischer Modelle erzielt wurden. Dabei wird jeweils erläutert welche Aussagen sich aus den Lösungen ableiten lassen. Zusätzlich wird demonstriert welchen Einfluß verschiedene Faktoren, wie die Qualität der Rechnetze oder Fehlerordnung des Diskretisierungsverfahrens, auf die Genauigkeit der Lösung haben.

1 Vorbemerkungen

Seit den sechziger Jahren werden mit Hilfe von Computern Strömungssimulationen durch numerische Lösung von Differentialgleichungen durchgeführt. Die Weiterentwicklung der Computer Hardware ermöglichte seitdem etwa alle zwei Jahre eine Steigerung der Rechengeschwindigkeit um das Doppelte. Durch die gleichzeitig stattfindende Weiterentwicklung der Lösungsalgorithmen konnte insgesamt eine Steigerung der Rechenleistung von mehr als 5 Größenordnungen erzielt werden. Diese phantastische Entwicklung ist mit Hilfe der numerischen Fluidmechanik (Computational Fluid Mechanics bzw. CFD) nach dem Push- und Pull Prinzip vorangetrieben und ausgenutzt worden, um ein tieferes Verständnis komplexer Strömungsvorgänge zu gewinnen. Für den Wissenschaftler und den Ingenieur besitzt die numerische Fluidmechanik inzwischen die Möglichkeit, neue Wege in der Analyse der Strömungsphänomene zu gehen und neue Ansätze in den Designprozess von um- oder durchströmten Objekten einfließen zu lassen – vorausgesetzt ihr Potential wird sinnvoll eingesetzt. Eine kritische und sorgfältige Überprüfung der berechneten Ergebnisse ist ebenso wichtig wie eine genaue Analyse im Hinblick auf das Verständnis der erzielten Resultate.

Bevor im einzelnen die Grundlagen für eine numerische Lösung von Differentialgleichungen, hier am Beispiel der Laplace-Gleichung, vorgestellt werden, werden verschiedene mathematische Modelle als Grundlage für die Strömungssimulationen diskutiert. Es werden vier Kategorien vorgestellt, für die einerseits der Zeitraum der Entwicklung maßgebend ist, andererseits die mathematische Formulierung als Unterscheidungsmerkmal dient. Dabei wird insbesondere die Verbindung zwischen zu untersuchendem Strömungsproblem, zu verwendendem CFD

Verfahren und dem damit zusammenhängenden Rechenaufwand erläutert.

2 Entwicklung der CFD-Verfahren

Lineare Potentialgleichungen

Mitte der 60er wurden Methoden zur Lösung der linearen Potentialgleichungen vorgestellt. Die Gleichungen und die zugehörigen Randbedingungen werden als Oberflächenintegral formuliert, so daß lediglich die Oberflächengeometrie in einzelne Elemente aufzuteilen ist, denen ein Singularitätentyp (Quelle, Dipol, etc.) zugeordnet wird. Die Lösung ergibt sich, indem die Singularitätenstärke derart bestimmt wird, daß die kinematische Strömungsbedingung (verschwindende Geschwindigkeitskomponente normal zur Oberfläche) in einem Kontrollpunkt auf jedem Element erfüllt wird. Abhängig von der Oberflächendarstellung (gemittelte oder tatsächliche Oberfläche), sowie vom Typ und der funktionalen Form der Singularitäten (konstante oder lineare Quellen- oder Dipolverteilung) erhält man verschiedene Verfahren. Die Vortex-Lattice Methoden beinhalten eine gemittelte Oberflächendarstellung sowie Wirbelfadensingularitäten, während bei den Panel-Verfahren die tatsächliche Oberfläche berücksichtigt wird.

Die Einfachheit der mathematischen Formulierung beschränkt die Gültigkeit der Methoden auf rein subsonische und supersonische, reibungsfreie Strömungen. Trotzdem werden sie aufgrund ihres leichten Einsatzes und ihres geringen Rechenaufwands standardmäßig in Konzept- und Designstudien eingesetzt. Ein erfahrener Anwender kann in wenigen Stunden ein Rechenmodell für eine komplexe Konfiguration wie ein Flugzeug aufbereiten. Die Rechenzeit beträgt auf den Anlagen der 90er Jahre wenige Sekunden auf einem Großrechner oder wenige Minuten auf einer Workstation. Jedoch ist die Erfahrung des Anwenders für die korrekte Interpretation der Ergebnisse entscheidend. Diese Verfahren liefern im allgemeinen gute Abschätzungen für Druckverteilungen, Auftrieb, induzierten Widerstand und Momentenbeiwerte in stationären Strömungen. Es dauerte ungefähr 15 bis 20 Jahre bis diese Methoden das heutige hohe Maß an Zuverlässigkeit erreicht hatten.

Nichtlineare Potentialgleichungen

Um transonische Strömungen mit Stößen simulieren zu können, entwickelte man in den 70er Jahren nichtlineare Potentialmethoden, die entweder auf den Gleichungen transonischer kleiner Störungen (transonic small perturbation TSP) oder auf den vollen Potentialgleichungen (full-potential equations FPE) beruhen. Die Ausdehnung auf den transonischen Strömungsbereich steigert jedoch den Rechenaufwand erheblich, da die nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen im gesamten Strömungsfeld, nicht mehr nur auf der Körperoberfläche zu lösen sind. Dabei muß der ein Objekt umgebende komplette Strömungsbereich in kleine Elemente - sogenannte Zellen oder Volumina - zerlegt werden. Die Erfahrung zeigt, daß besonders für komplexe Geometrien aufgrund einer einfacheren Handhabung der Randbedingungen TSP-Verfahren leichter als FPE-Methoden zu verwenden sind. Während in TSP-Verfahren eine gemittelte Oberfläche herangezogen wird, ist in FPE-Methoden die tatsächliche Kontur zu berücksichtigen.

sichtigen, so daß in TSP-Systemen kartesische Zellaufteilungen -sogenannte Netze- verwendet werden, in FPE-Verfahren jedoch aufwendigere körperangepaßte Netze verwendet werden müssen. Aufgrund der vereinfachten Behandlung der Randbedingungen ergeben sich Restriktionen hinsichtlich der Geometrien, die mit TSP-Verfahren zu analysieren sind. Da transonische Strömungen sehr empfindlich gegenüber Reibungseffekten verbunden mit Stoß-Grenzschicht-Wechselwirkungen sind, sind erhebliche Anstrengungen in die Kopplung von TSP-Verfahren und Methoden zur Lösung der Grenzschichtgleichungen gegangen.

Euler-Gleichungen

Die Methoden der 70er haben nicht die Akzeptanz der linearen Verfahren erreicht. Zum einen bereitete die Erzeugung geeigneter räumlicher Netze erhebliche Schwierigkeiten, zum anderen verschlechterte sich, wie von der mathematischen Formulierung zu erwarten war, die Genauigkeit der Lösung erheblich, sofern Strömungen mit stärkeren Stößen und größeren Wirbelgebieten analysiert wurden. Somit war der Nutzen im Vergleich zum Aufwand zu gering.

In den 80er Jahren wurden erhebliche Fortschritte in der Lösung der Euler-Gleichungen, die reibungsfreie, drehungsbehaftete Strömungen mit schwachen und starken Stößen beschreiben, erzielt. Damit gelten nicht mehr die Einschränkungen der Potential-Methoden, jedoch wird die allgemeinere Anwendbarkeit durch einen deutlich gesteigerten Rechenaufwand erkauft, da statt einer partiellen Differentialgleichung 2. Ordnung 5 gekoppelte partielle Differentialgleichungen 1. Ordnung zu lösen sind. Das Interesse an den Euler-Verfahren wurde unterstützt durch deutlich verbesserte Netzgeneratoren, Steigerung der Computerleistung, Entwicklung effizienter Algorithmen, sowie dem Finite-Volumen Konzept, wodurch die Berechnung von Strömungen um allgemeine Konfigurationen erleichtert wurde.

Die wesentlichen Unterscheidungsmerkmale der zahlreichen Euler-Verfahren sind einerseits in der Gitterstruktur begründet, ob z. B. strukturierte oder unstrukturierte Netze zu bevorzugen sind, wird auch noch in den 90er Jahren diskutiert, und liegen andererseits in der unterschiedlichen Approximation der zeitlichen und räumlichen Differentialausdrücke. Es werden sowohl explizite als auch implizite Methoden mit upwind oder zentralen Diskretisierungen erfolgreich eingesetzt. Darüber hinaus werden viele verschiedene Konzepte angewendet, um die Konvergenz der Algorithmen zu beschleunigen und dadurch die Rechenzeit zu verkürzen.

Die Euler-Gleichungen beschreiben reibungsfreie Strömungen vom subsonischen bis in den hypersonischen Strömungsbereich. Da anders als bei den Potential- oder TSP-Verfahren die Einschränkung der Drehungsfreiheit entfällt, sind sie bedeutend allgemeiner einsetzbar. Seit Beginn der 90er werden sie bereits zu Designstudien herangezogen. Zur Berücksichtigung von Reibungseffekten werden Lösungen der Euler-Gleichungen mit den Grenzschichtgleichungen gekoppelt. Jedoch ist dieser Ansatz im allgemeinen nur bei anliegenden Strömungen gültig, so daß die Zuwendung zur Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen zu Beginn der 90er wiederum eine Konsequenz der eingeschränkten Anwendbarkeit war.

Navier-Stokes-Gleichungen

Die Navier-Stokes-Gleichungen beinhalten zusätzlich zu den Termen der Euler-Gleichungen die Diffusions- und Dissipationsterme. Dieser auf den ersten Blick geringfügige Unterschied hat jedoch große Auswirkungen auf den Aufwand zur Lösung der Gleichungen, da die Dissipations- und Diffusionsterme u. a. bei Außenströmungen mit hohen Reynoldszahlen besonders in den dünnen wandnahen Grenzschichten groß werden. Zur Auflösung der Grenzschichten müssen die Netze in der Nähe der Profilloberfläche stark verfeinert werden. Dies hat sowohl eine deutliche Steigerung des Aufwands bezüglich der Gittergenerierung zur Folge als auch erhebliche Auswirkungen auf das Konvergenzverhalten und Speicheranforderungen der Algorithmen. Trotzdem ist man seit Mitte der 80er Jahre imstande, laminare dreidimensionale Strömungsfelder mit hoher Genauigkeit zu simulieren. Bei turbulenten Strömungen muß jedoch mit Hilfe von Modellen der erhöhte Impuls- und Wärmeaustausch berücksichtigt werden, da eine direkte Simulation der turbulenten Strömung für hohe Reynoldszahlen auch zukünftig wegen des zu hohen Rechenaufwandes nicht durchführbar sein wird. Für realistische Konfigurationen wird daher auf die über turbulente Zeitskalen gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen zurückgegriffen und diese mit einem Turbulenzmodell geschlossen. Eines der entscheidenden Probleme der Lösung turbulenter Strömungen mit Hilfe von CFD-Verfahren ist die Formulierung eines Turbulenzmodells, das für ein breites Spektrum ingenieurwissenschaftlicher Fragestellungen die wesentlichen strömungsphysikalischen Phänomene bei einem akzeptablen Rechenaufwand beinhalten muß. Mitte der 90er Jahre werden die meisten turbulenten Strömungsprobleme mit Hilfe von algebraischen und Zwei-Gleichungsturbulenzmodellen simuliert. Neben der Turbulenzmodellierung ist die Generierung von Rechennetzen hoher Qualität für komplizierte Geometrien weiterhin sehr aufwendig. Eine Netzgenerierung für komplette Flugzeugkonfigurationen kann u. U. mehrere Wochen in Anspruch nehmen. Die Beschleunigung der Lösungsalgorithmen, die verbesserte Turbulenzmodellierung und die Vereinfachung der Gittergenerierung zur Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen sind derzeit Gegenstand von Forschungsprojekten.

Die Stufen der CFD-Verfahren sind in einer Komplexitätspyramide in Bild 1 zusammengefaßt. Ergänzend dazu gibt Bild 2 für externe Strömungen einen groben Überblick, in welchem Geschwindigkeitsbereich abhängig vom Anströmwinkel auf welche mathematische Formulierung innerhalb der Kontinuumsmechanik zurückzugreifen ist. Es ist bei dieser vereinfachten Darstellung zu bedenken, daß Reibungs- und Rotationseffekte außer acht gelassen worden sind.

Die Bedeutung der CFD-Technologie wird in den nächsten Jahren weiter zunehmen. Sinnvoll eingesetzt, können mit ihr die Entwicklungskosten weiter reduziert und die Qualität der Produkte verbessert werden. Kräfte und Momente werden benötigt, um die Leistung der Produkte (Flugzeuge, Raketen, Autos, Züge, etc.) zu ermitteln, Druck- und Temperaturverteilungen auf der Oberfläche sind wichtige Daten für deren Strukturmechanik und Details aus dem kompletten Strömungsfeld vereinfachen die Gesamtintegration des Systems. Es ist zu teuer und zu zeitaufwendig die notwendigen Daten für den Integrationsprozess lediglich mit experimentellen und analytischen Methoden zu gewinnen. Für den Erfolg der Projekte ist es günstiger eine Mischung der drei Entwicklungspfeiler –Experiment, theoretische Analyse und numerische Simulation– anzuwenden. Dabei wird jedoch in Zukunft besonders im Hinblick auf die interdisziplinäre Verzahnung, die bereits in der Studien- und Konzeptphase stets signifikanter wird,

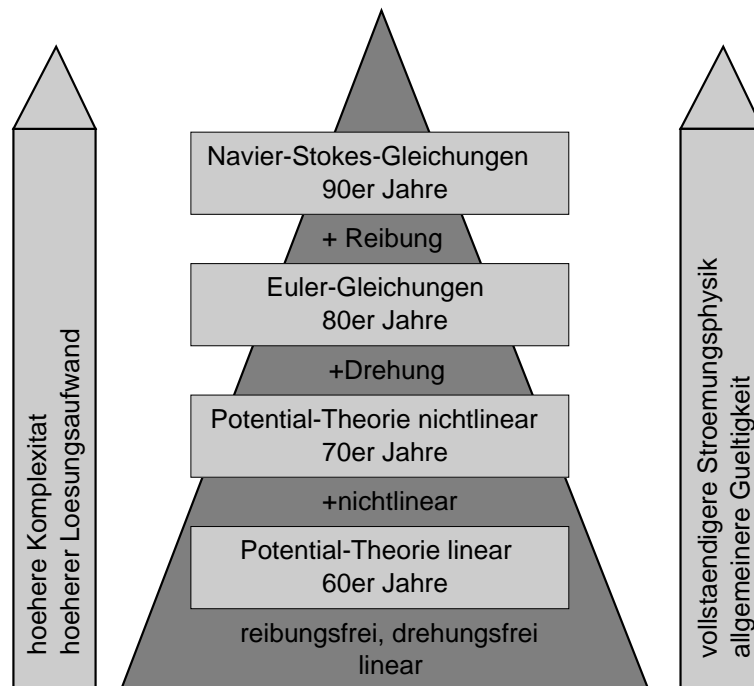


Abbildung 1: Pyramide der CFD-Verfahren

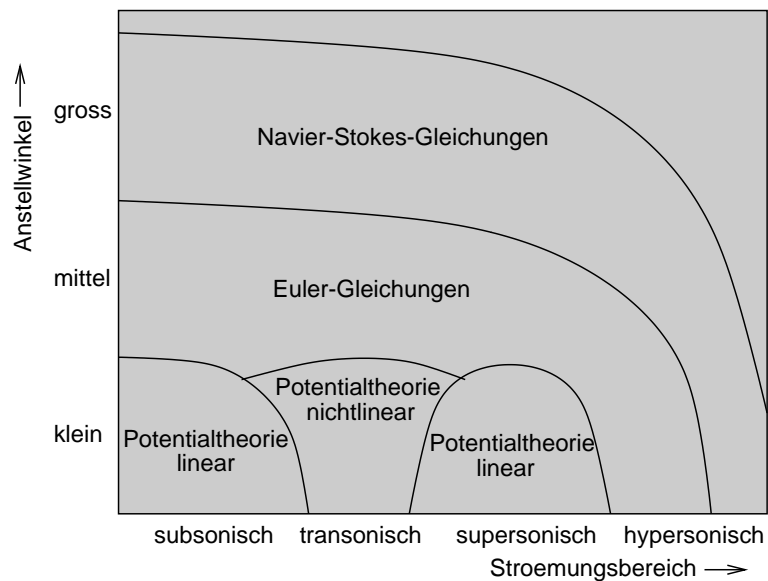


Abbildung 2: CFD-Verfahren abhängig von Anstellwinkel und Machzahl

den CFD-Verfahren eine führende Rolle zukommen.

3 Numerische Analyse

Die Grundlage jeder numerischen Strömungssimulation bilden die zur Beschreibung des jeweiligen Strömungsproblems herangezogenen Erhaltungsgleichungen entweder in Integral- oder in

Differentialform sowie die Anfangs- und Randbedingungen. Diese Gleichungen können im allgemeinen nicht geschlossen gelöst werden, so daß auf numerische Methoden zurückgegriffen wird, um das Strömungsfeld zu bestimmen. Heutzutage werden in der Fluidmechanik im wesentlichen drei Verfahren zur Lösung der Ausgangsgleichungen verwendet: 1. Finite-Differenzen-Methode (FDM), 2. Finite-Volumen-Methode (FVM), 3. Finite-Elemente-Methode (FEM). Die Methoden der Finiten-Elemente und der Finiten-Volumen werden auf die Integralform der Erhaltungsgleichungen angesetzt, wobei bei FV-Verfahren der Integraloperator approximiert wird und bei FE-Methoden eine Näherungslösung in die exakten Gleichungen eingesetzt wird. Bei den Finite-Differenzen-Verfahren werden die partiellen Ableitungen der differentiell formulierten Ausgangsgleichungen diskretisiert. Wir beschränken uns im folgenden auf die Darstellung der Grundlagen der FD-Methoden.

Bei den Finite-Differenzen-Verfahren wird das Strömungsfeld mit einem feinmaschigen Rechengitter überdeckt, an dessen Gitterpunkten die stetigen Funktionen der Geschwindigkeit, des Druckes etc. durch diskrete Werte, die für diese Punkte berechnet worden sind, approximiert werden. Die Ableitungen der Funktionen werden durch Differenzenquotienten dargestellt, so daß die Differentialgleichungen in ein System algebraischer Gleichungen überführt werden, das im allgemeinen mit iterativen Verfahren gelöst wird.

Anhand des folgenden Beispiels, in dem die Stromlinien einer stationären, reibungsfreien Strömung eines inkompressiblen Fluids über einen Kreiszyylinder mittels Lösung der Laplace-Gleichung für die Stromfunktion Ψ

$$\nabla^2\Psi = \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} = 0$$

zu bestimmen sind, wird die grundlegende Verfahrensweise der Finite-Differenzen-Methoden erläutert. Zunächst wird das Strömungsgebiet definiert und ein geeignetes Netz für das Differenzschema erstellt (Bild 3). Da wir von einer symmetrischen Umströmung des Kreiszyinders ausgehen, ist es ausreichend, das Strömungsfeld über den oberen Halbzylinder zu analysieren. Den Ein- und Ausströmrand sowie die obere Berandung des Integrationsgebietes (Bild 3: (1), (2), (5)) ordnen wir weit entfernt vom Kreiszyylinder an, da dort die durch die Umströmung verursachten Störungen vernachlässigt werden können. Werden diese Ränder zu nah am Zylinder angeordnet, werden durch die nicht zutreffenden Annahmen, die auf diesen künstlichen Berandungen getroffen werden, Fehler in der Lösung erzeugt. Befinden sich die Ränder in größerem Abstand als notwendig, wächst das zu berechnende Strömungsgebiet, wodurch sowohl Rechenzeit als auch Speicherkapazität ansteigen, so daß die Lösung des Problems unnötig aufwendig wird. Der untere Rand entspricht der Staustromlinie (3) bzw. der Kreiszyylinderkontur (4) (Bild 3).

Nachdem das Integrationsgebiet festgelegt ist, wird ein geeignetes Netz zur Bestimmung des Strömungsfeldes ermittelt. Ist das Gitter einerseits zu grob, kann die numerische Lösung die möglichen feinskaligen Strukturen nicht enthalten. Andererseits erfordert ein zu feines Gitter erheblich mehr Rechenzeit und Speicherplatz. Insgesamt ist festzustellen, daß die Netzerzeugung eine wichtige Voraussetzung zur erfolgreichen und genauen Lösung in der numerischen Strömungsmechanik ist. Sie hat sich zu einem der wichtigen Teilgebiete des CFD-Bereiches entwickelt. In diesem Beispiels wird auf ein einfaches kartesisch angeordnetes, äquidistantes

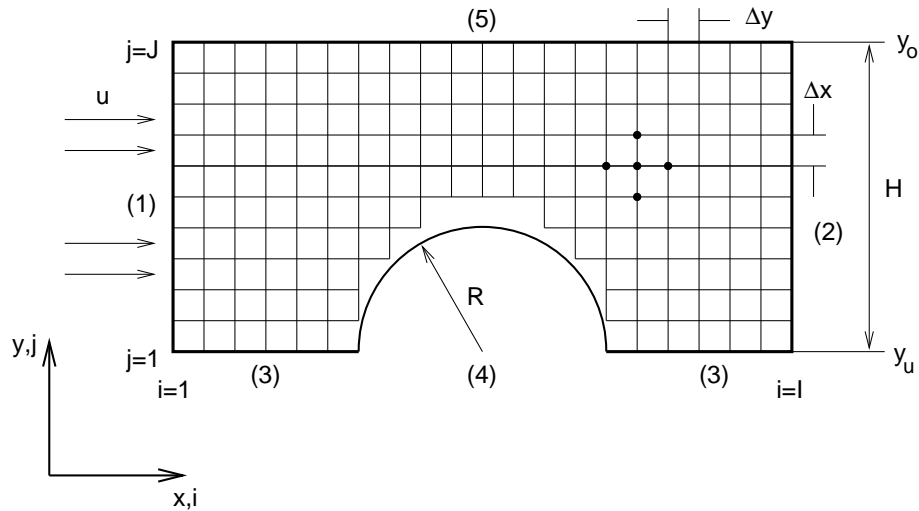


Abbildung 3: Integrationsgebiet und Rechennetz für eine Zylinderumströmung

Gitter in x - und y -Richtung zurückgegriffen, d. h. die Schrittweiten Δx und Δy und somit die Zellflächen sind konstant.

Zur vollständigen Beschreibung des Problems müssen Anfangs- und Randbedingungen angegeben werden. Die untere und obere Berandung sind Stromlinien deren Stromfunktionswert Ψ_u und Ψ_o vorgeschrieben werden, wobei Ψ_o sich aus dem über den Einströmrand tretenden Massenstrom uH und der Größe Ψ_u zu $\Psi_o = uH + \Psi_u$ errechnet. Die Stromfunktionswerte auf dem Ein- und Ausströmrand ergeben sich aus der Bedingung

$$\Psi_u \leq \Psi(y) = \int_{y_u}^{y_o} u dy \leq \Psi_o$$

Die Differentialausdrücke in den Erhaltungsgleichungen werden z. Bsp. mittels Taylor-Reihen angenähert. Für den Term $\frac{\partial f}{\partial x}$ erhält man aus

$$f(x_1 + \Delta x) = f(x_1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Delta x^n}{n!} \frac{\partial^n f}{\partial x^n}$$

die Beziehung

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_1} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\Delta x^2}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} - \dots$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_1} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

Sie stellt eine einseitige Approximation von $\frac{\partial f}{\partial x}$ dar, da der Differenzenausdruck nur Funktionswerte aus dem Bereich $x > x_1$ enthält. Ausgehend von $\Delta x \ll 1$ weist der vernachlässigte Term

$\frac{\Delta x}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ den größten Δx -Koeffizienten auf, der als Maß für die Genauigkeit der Näherung herangezogen wird. Somit wird das Differential 1. Ordnung genau $O(\Delta x)$ approximiert bzw. der Abbruchfehler der Taylorreihenentwicklung ist von 1. Ordnung. Führt man die Indexschreibweise ein, d.h. $x_i = x_o + i\Delta x$, ergibt sich

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

Erhöht man den numerischen Abhängigkeitsbereich, indem man neben dem Intervall $[i, i + 1]$ auch das Intervall $[i - 1, i]$ berücksichtigt, erhält man aus

$$\begin{aligned} f_{i+1} &= f_i + \Delta x \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\Delta x^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \dots \\ f_{i-1} &= f_i - \Delta x \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\Delta x^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \dots \end{aligned}$$

eine zentrale Diskretisierung für $\frac{\partial f}{\partial x}$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2)$$

die eine Genauigkeit 2. Ordnung aufweist. Analog ergibt sich für die 2. Ableitungen der Laplace-Gleichung

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \right|_{i,j} &= \frac{\Psi_{i+1,j} - 2\Psi_{i,j} + \Psi_{i-1,j}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) \\ \left. \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right|_{i,j} &= \frac{\Psi_{i,j+1} - 2\Psi_{i,j} + \Psi_{i,j-1}}{\Delta y^2} + O(\Delta y^2) \end{aligned}$$

wobei für die y -Richtung der Index j eingeführt worden ist.

Setzt man diese Approximationen in die Ausgangsgleichung ein, folgt die diskrete Form der Laplace-Gleichung, die für jeden Punkt x, y bzw. i, j des Rechnernetzes zu formulieren ist.

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \frac{\Psi_{i+1,j} - 2\Psi_{i,j} + \Psi_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{\Psi_{i,j+1} - 2\Psi_{i,j} + \Psi_{i,j-1}}{\Delta y^2} = 0$$

Aufgelöst nach $\Psi_{i,j}$ erhält man

$$\Psi_{i,j}^\nu = \frac{1}{2(\Delta x^2 + \Delta y^2)} (\Delta y^2 (\Psi_{i+1,j}^{\nu-1} + \Psi_{i-1,j}^\nu) + \Delta x^2 (\Psi_{i,j+1}^{\nu-1} + \Psi_{i,j-1}^\nu))$$

wobei die Größe ν einen Iterationsindex darstellt. Somit werden bei der Berechnung von $\Psi_{i,j}^\nu$ die Werte an den Stellen $x + \Delta x, y$ bzw. $i + 1, j$ und $x, y + \Delta y$ bzw. $i, j + 1$ aus dem letzten Iterationsschritt $\nu - 1$ verwendet, während an den Punkten $i - 1, j$ und $i, j - 1$ auf die Werte der aktuellen Iteration ν zurückgegriffen wird (Bild 4). Dieses Iterationsverfahren wird Punkt-Gauß-Seidel Methode genannt.

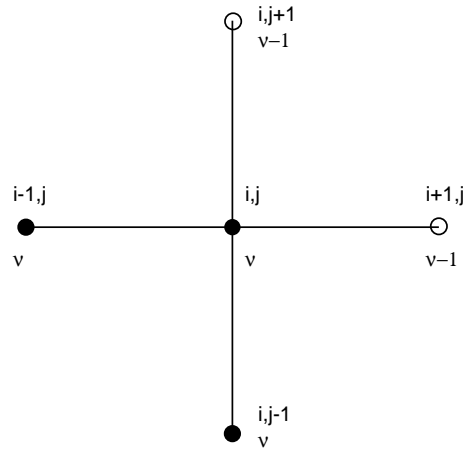


Abbildung 4: Differenzenstern der Diskretisierung und Iterationsindex ν .

Unter Berücksichtigung der Randbedingungen

$$\begin{aligned}
 \Psi_{i,1} &= \Psi_u & i &= 1, \dots, I \\
 \Psi_{i,J} &= \Psi_o & i &= 1, \dots, I \\
 \Psi_{1,j} &= \Psi_{I,j} = \Psi_u + u\Delta y(j-1) & j &= 1, \dots, J
 \end{aligned}$$

wird somit in jedem Iterationsschritt ν für jede Stelle i, j im Integrationsbereich ein neuer Stromfunktionswert bestimmt, d.h. eine neue Verteilung für die Stromfunktion $\Psi(x, y)$ bestimmt. Die Iteration kann beendet werden, sofern die diskrete Form der Laplace-Gleichung die Bedingung

$$\epsilon_{i,j} = \frac{\Psi_{i+1,j}^\nu - 2\Psi_{i,j}^\nu + \Psi_{i-1,j}^\nu}{\Delta x^2} + \frac{\Psi_{i,j+1}^\nu - 2\Psi_{i,j}^\nu + \Psi_{i,j-1}^\nu}{\Delta y^2}$$

$$\left(\frac{1}{IJ} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \epsilon_{i,j}^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \epsilon$$

mit $\epsilon = 10^{-9}$ (z. Bsp.) erfüllt.

Diese grundlegenden Schritte, die in diesem Beispiel kurz diskutiert worden sind, Auswahl des mathematischen Modelles, Formulierung der Randbedingungen, Festlegung des Integrationsbereichs, Erzeugung eines Rechnernetzes, Diskretisierung der Erhaltungsgleichungen und der Randbedingungen, Verwendung eines Iterationsalgorithmus, sind Teil eines jeden CFD-Verfahrens. Es ist jedoch zu bedenken, daß mit der Komplexität des zu analysierenden Strömungsproblems auch die Struktur der zu verwendenden CFD-Methode erheblich anspruchsvoller wird. [1, 4].

4 Versuchsdurchführung

In Anlehnung an die experimentelle Untersuchung der Profilströmung im Versuch 6 werden im folgenden verschiedene CFD-Verfahren zur Berechnung von Profilmströmungen vorgestellt. Das erste ist ein Verfahren, was auf der nichtlinearen Potentialtheorie basiert. Dazu wird ein Lösungsverfahren nach Murman und Cole verwendet. Dieses Verfahren ist ein Diskretisierungsverfahren mit vier verschiedenen Diskretisierungsoperatoren für die verschiedenen möglichen Zustände im Strömungsgebiet. Das Programm mit dem Lösungsalgorithmus wird vorgestellt, und es werden Lösungen für verschiedene Machzahlen berechnet.

Als zweites Beispiel werden Lösungen der Euler-Gleichungen für die gleiche Profilgeometrie gezeigt. Die Lösungen werden mit einer Diskretisierung basierend auf der advective-upstream-splitting Methode, [3], erzielt. Dabei werden Lösungen mit verschiedener Fehlerordnung verglichen und die Unterschiede diskutiert.

Abschließend werden Simulationen für Profilmströmungen auf Basis der Navier-Stokes-Gleichungen durchgeführt. Dabei wird ein algebraisches Turbulenzmodell nach Baldwin und Lomax, [2], eingesetzt. Anhand der Druckverteilungen und Reibungsbeiwerte werden Lösungen, die mit verschiedenen Rechennetzen erzielt wurden, verglichen. Eine derartige Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen ist in Bild 5 zusammen mit einem Rechennetz dargestellt.

Insgesamt soll durch den Versuch deutlich werden, welche Informationen mit welchem Lösungsverfahren erzielt werden können und welchen Einfluß verschiedene Einflußfaktoren auf die Qualität der Lösung haben.

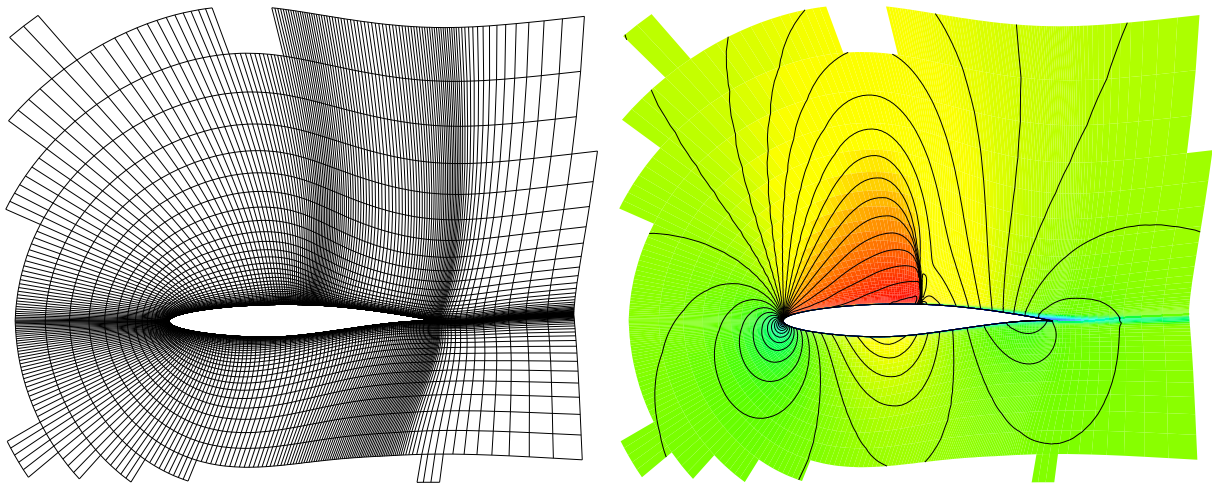


Abbildung 5: Rechennetz und Darstellung der Lösung für ein transonisch angeströmtes RAE2822-Profil. Die Machzahl der freien Anströmung beträgt 0.73, der Anstellwinkel 2.79 Grad und die Reynoldszahl 6.5 Millionen. Dargestellt sind in Graustufen die Machzahl und Isobaren. Zu erkennen ist ein Verdichtungsstoß über der Oberseite des Profils.

Literatur

- [1] D. A. Anderson, J. C. Tannehill, and R. H. Pletcher. *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*. Hemisphere Publishing Company, Washington, 1984.
- [2] B. S. Baldwin and H. Lomax. Thin layer approximation and algebraic model for separated turbulent flows. In *AIAA 16th Aerospace Sciences Meeting*, 1978. AIAA Pap. 78-257.
- [3] M. S. Liou and C. J. Steffen Jr. A new flux splitting scheme. *J. Comput. Phys.*, 107:23–39, 1993.
- [4] R. Peyret and T. D. Taylor. *Computational Methods for Fluid Flow*. Springer Series in Computational Physics. Springer Verlag, 1983.

Name, Vorname	Matr.-Nr.
Studienrichtung	Testat

Auswertung Aerodynamisches Labor • Versuch *Numerik*

5 Aufgaben

- Leiten Sie mit Hilfe von Taylorreihen eine zentrale Differenzenapproximation einer zweiten Ableitung her und ermitteln Sie den Abbruchfehler. Nehmen Sie dazu eine äquidistante Verteilung von Stützstellen an.
- Erläutern Sie die Einschränkungen und Unterschiede bei der gekoppelten Lösung der Euler- mit den Grenzschichtgleichungen und der Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen.
- Für ein Tragflügelprofil soll in einem ersten Fall die Druckverteilung bei einer Anströmmachzahl von 0.4 und einem Anstellwinkel von 1 Grad bestimmt werden. Im zweiten Fall soll diese für eine Machzahl von 0.85 und einem Anstellwinkel von 6 Grad vorhergesagt werden. Erläutern Sie welche mathematischen Modelle für diese Probleme geeignet sind.
- Gegeben ist in Bild 6 eine Druckverteilung und der Verlauf eines Reibungsbeiwertes für eine Profilmströmung. Erläutern Sie anhand der beiden Diagramme die physikalischen Phänomene, die in der Strömung auftreten. Geben Sie den ungefähren Bereich der Machzahl und des Anstellwinkels der Anströmung an

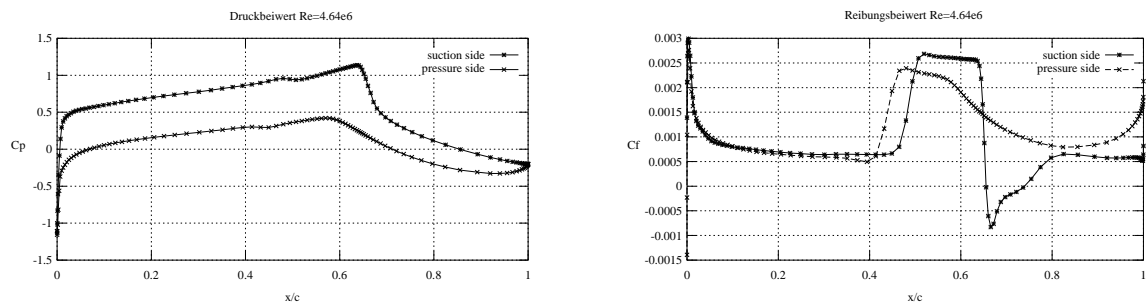


Abbildung 6: Druck- und Reibungsbeiwerte für eine Strömung um ein Tragflächenprofil