

AERODYNAMISCHES INSTITUT  
der Rheinisch - Westfälischen  
Technischen Hochschule Aachen  
Univ.-Prof. Dr.-Ing. W. Schröder

Klausur

Aerodynamik II

14. 02. 2022

M U S T E R L Ö S U N G  
E I N S I C H T N A H M E

**Hinweis:**

Achten Sie darauf, ob Sie alle Aufgaben erhalten haben.

Die Lösungen dürfen ausschließlich die gegebenen Größen enthalten.

**Klausur Aerodynamik II**

Fragenteil, Skelett-Theorie, Überschall und numerische Verfahren

# Integrale und Additionstheoreme

## Additionstheoreme

- $\sin(x \pm y) = \sin(x) \cdot \cos(y) \pm \sin(y) \cdot \cos(x)$
- $\cos(x \pm y) = \cos(x) \cdot \cos(y) \mp \sin(x) \cdot \sin(y)$
- $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
- $\sin(2x) = 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$
- $\sin(x) = 2 \cdot \sin(x/2) \cdot \cos(x/2)$
- $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$
- $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$
- $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$
- $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$
- $\tan\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \sin(x) = 1 - \cos(x)$
- $\sin(x) \cdot \sin(nx) = -\frac{1}{2}(\cos[(n+1)x] - \cos[(n-1)x])$
- $\sin[(n+1)x] - \sin[(n-1)x] = 2 \cdot \cos(nx) \cdot \sin(x)$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(n\varphi_p) \cdot \sin(n\varphi) = \frac{1}{4} \ln\left(\frac{1 - \cos(\varphi_p + \varphi)}{1 - \cos(\varphi_p - \varphi)}\right)$

## Integrale

- $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \cdot \ln(ax+b)$
- $\int \frac{x}{ax+b} dx = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2} \cdot \ln(ax+b)$
- $\int \frac{x^2}{X} dx = \frac{1}{a^3} \left[ \frac{1}{2}(X) - 2b(X) + b^2 \ln(X) \right]$   
mit  $X = ax+b$
- $\int \sin(ax) dx = -\frac{\cos(ax)}{a}$
- $\int \cos(ax) dx = +\frac{\sin(ax)}{a}$
- $\int \sin^2(ax) dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4a} \sin(2ax)$
- $\int \cos^2(ax) dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4a} \sin(2ax)$
- $\int \sin^3(ax) dx = \frac{\cos^3(ax)}{3a} - \frac{\cos(ax)}{a}$
- $\int \cos^3(ax) dx = -\frac{\sin^3(ax)}{3a} + \frac{\sin(ax)}{a}$
- $\int \cos^4(ax) dx = \frac{3}{8}x + \frac{\sin(2ax)}{4a} + \frac{\sin(4ax)}{32a}$
- $\int \sin(ax) \cos(ax) dx = \frac{\sin^2(ax)}{2a}$
- $\int_0^{\pi} \cos(n \cdot \varphi) \cdot \cos(p \cdot \varphi) d\varphi = \begin{cases} \pi/2 & n = p \\ 0 & n \neq p \end{cases}$
- $\int_0^{\pi} \sin(n \cdot \varphi) \cdot \sin(p \cdot \varphi) d\varphi = \begin{cases} \pi/2 & n = p \\ 0 & n \neq p \end{cases}$
- Glauert-Integral  
 $\int_0^{\pi} \frac{\cos(n \cdot \varphi')}{\cos(\varphi) - \cos(\varphi')} d\varphi' = -\pi \cdot \frac{\sin(n \cdot \varphi)}{\sin(\varphi)}$
- $\int \cos(ax) \cdot \cos(bx) dx = \frac{\sin[(a-b)x]}{2(a-b)} + \frac{\sin[(a+b)x]}{2(a+b)} \quad \forall |a| \neq |b|$

## 1. Aufgabe: Fragenteil ( 14 Punkte)

1. Gegeben ist eine reibungsfreie Strömung über eine Wellenoberfläche mit der Kontur  $y = \epsilon \sin(\alpha x)$  bei zwei Machzahlen  $M_{\infty,1} > 1$  und  $M_{\infty,2} < 1$ .

Skizzieren Sie das Stromlinienbild über die Wellenoberfläche für diese beiden Machzahlen und erklären Sie stichpunktartig die Ursache für die Entstehung des Wellenwiderstandes.

Ordnen Sie die folgenden Ausdrücke für den Druckbeiwert den beiden Machzahlen zu und begründen Sie Ihre Antwort:

(a)  $c_p = -\frac{2\epsilon\alpha}{\sqrt{|M_\infty^2 - 1|}} \sin(\alpha x)$

(b)  $c_p = -\frac{2\epsilon\alpha}{\sqrt{|M_\infty^2 - 1|}} \cos(\alpha x)$

2. Zeichnen Sie qualitativ den Widerstandsbeiwert als Funktion der Machzahl  $0 \leq Ma \leq 1$  für ein klassisches Profil. Erläutern Sie die Begriffe kritische Machzahl  $Ma_{krit}$  und Divergenzmachzahl  $Ma_{div}$  und tragen Sie diese in Ihre Skizze ein.

3. Gegeben ist ein unverwundener Tragflügel mit elliptischem Grundriss, der anhand der Prandtl'schen Traglinientheorie untersucht werden soll. Zeichnen Sie qualitativ die folgenden Funktionen

(a) Zirkulationsverteilung  $\Gamma(y)$ ,

(b) Auftriebsbeiwert  $C_l(y)$  und

(c) induzierten Anstellwinkel  $\alpha_i(y)$

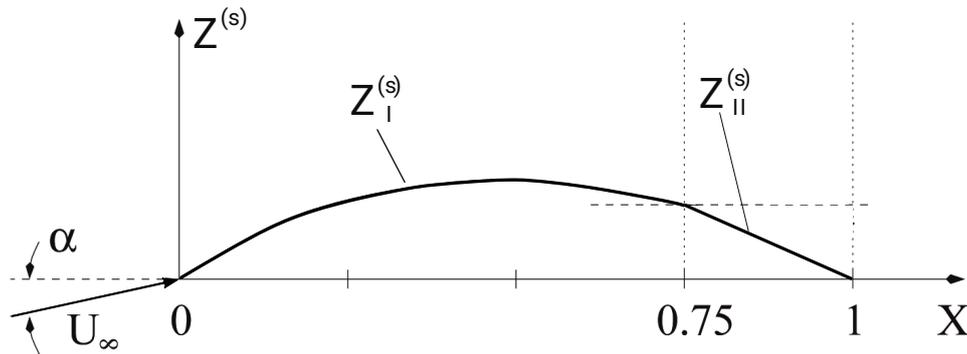
entlang der Spannweite  $y$ .

Erläutern Sie wie sich die Verläufe für einen unverwundenen Tragflügel mit rechtwinkligem Grundriss verhalten würden.

Wie lässt sich die Zirkulationsverteilung für den rechtwinkligen Tragflügel hinsichtlich des induzierten Widerstandes verbessern?

## 2. Aufgabe: Skelett-Theorie ( 18 Punkte)

Ein Tragflügelprofil der Länge  $l$  mit Heckklappe wird durch seine Skelettlinie dargestellt. Das Profil liegt in einer Parallelströmung mit der Anströmgeschwindigkeit  $U_\infty$  und dem Anstellwinkel  $\alpha$ .



Die Gleichungen der Skelettlinie des vorderen, starren Profiltails  $Z_I^{(s)}(X)$  und der hinteren Heckklappe  $Z_{II}^{(s)}(X)$  sind in dimensionslosen Koordinaten gegeben durch:

$$Z_I^{(s)}(X) = \frac{4}{45}(X - X^2) \quad \text{für } 0 \leq X \leq 0.75$$

$$Z_{II}^{(s)}(X) = C - D(X - 0.75) \quad \text{für } 0.75 \leq X \leq 1$$

mit  $X = \frac{x}{l}$ ,  $Z^{(s)} = \frac{z^{(s)}}{l}$  und den Profilkonstanten  $C$  und  $D$ .

- Leiten Sie die Gleichung für die kinematische Strömungsbedingung der Skelett-Theorie her.
- Ermitteln Sie die Koeffizienten  $A_i$  der ersten und zweiten Birnbaum-Ackermanschen Normalverteilungen in Abhängigkeit der gegebenen Größen.
- Leiten Sie die allgemeine Formel für die Druckbeiwertdifferenz  $\Delta c_p = \frac{2\gamma(X)}{U_\infty}$  aus dem Energiesatz für inkompressible Strömungen (Satz von Bernoulli) her und bestimmen Sie diese für das gegebene Skelett.
- Bestimmen Sie den Auftriebsbeiwert  $c_l$  und den Nullauftriebswinkel  $\alpha_0$  des untersuchten Profils. Zeigen Sie dafür, dass der Zusammenhang  $c_l = 2\pi(A_0 + \frac{A_1}{2})$  gilt.
- Bestimmen Sie die Koeffizienten  $C$  und  $D$  so, dass sich die abgebildete valide Skelettlinie ergibt.

Gegeben: Anstellwinkel  $\alpha$ , Anströmgeschwindigkeit  $U_\infty$ , Sehnenlänge  $l$

Hinweise:

- Koordinatentransformation:

$$X = \frac{1}{2}(1 + \cos(\varphi))$$

- Birnbaum-Ackermansche Zirkulationsverteilung und dimensionslose, induzierte Abwärtsgeschwindigkeit:

$$\gamma(\varphi) = 2U_\infty \left( A_0 \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \sum_{n=1}^N A_n \sin(n\varphi) \right)$$

$$w_a(\varphi) = \frac{w}{U_\infty} = -A_0 - \sum_{n=1}^N A_n \cos(n\varphi)$$

- dimensionslose, induzierte Störgeschwindigkeit:

$$u_a(\varphi) = \pm \frac{\gamma(\varphi)}{2}$$

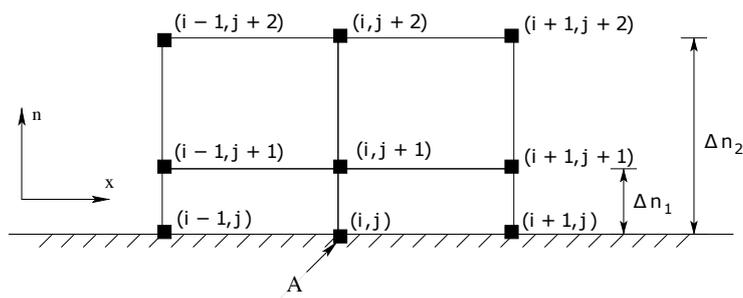
### 3. Aufgabe: Überschall und numerische Verfahren (18 Punkte)

Die Umströmung eines schlanken bikonvexen Überschallprofils mit stumpfer Hinterkante wird bei einer Machzahl von  $Ma_1 = 3.5$  untersucht. Der Öffnungswinkel an der Vorderkante beträgt  $\epsilon = 20^\circ$  und der Hinterkanthenwinkel  $\zeta = 5^\circ$ . Durch Messungen wurde gezeigt, dass die Strömung an der Hinterkante symmetrisch mit einem Winkel von  $\eta = 20^\circ$  abströmt. Der Anstellwinkel beträgt  $\alpha = 0^\circ$  und es wird von einer zweidimensionalen Strömung ausgegangen.



- Übertragen Sie die obere Skizze in Ihre Aufgabenblätter und skizzieren Sie sorgfältig das zu erwartende Strömungsfeld unter Berücksichtigung möglicher Verdichtungsstöße, Expansionsfächer sowie Machschen Linien. Vervollständigen Sie weiterhin den Verlauf der in der Skizze eingezeichneten Stromlinie S.
- Zeichnen Sie qualitativ die Zustandsänderungen für die Strömung entlang der gesamten Stromlinie S in der Hodographenebene.
- Bestimmen Sie die relativen Werte des statischen Druckes auf der Oberseite des Profils für die einzelnen Zustände 2 (unmittelbar stromab der Vorderkante), 3 (unmittelbar stromauf der Hinterkante) und 4 (an der stumpfen Hinterkante) bezogen auf den statischen Druck der Anströmung  $\left(\frac{p_2}{p_1}, \frac{p_3}{p_1}, \frac{p_4}{p_1}\right)$ .
- Bestimmen Sie den Auftrieb des untersuchten Profils.
- Ergänzen Sie Ihre Skizze um ein sinnvolles unstrukturiertes kartesisches Gitter mit dem die zu erwartenden Überschalleffekte erfasst werden können.
- Die Profilloberfläche wird als adiabatisch angenommen. Formulieren Sie die mathematische Randbedingung für den statischen Druck auf der Profilloberfläche. Leiten Sie nun aus der Taylor-Reihenentwicklung die numerische Bestimmungsgleichung für den statischen Druck ( $p_{i,j}$ ) auf der Profilloberfläche im Punkt A mittels einseitiger Differenzen für das gegebene Gitter her. Vernachlässigen Sie dabei Terme dritter und höherer Ordnung.

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m f(x_0)}{\partial x^m} (x-x_0)^m$$



Gegeben:  $Ma_1 = 3.5$ ,  $\eta = 20^\circ$ ,  $\zeta = 5^\circ$  und  $\epsilon = 20^\circ$ .

Hinweise:

Beachten Sie die gegebenen Abb. 3.1-3.4

$\alpha$	$10^\circ \pm 2^\circ$	$15^\circ \pm 2^\circ$	$20^\circ \pm 2^\circ$	$25^\circ \pm 2^\circ$	$30^\circ \pm 2^\circ$	$35^\circ \pm 2^\circ$
$\sin \alpha \approx$	1/6	1/4	1/3	3/7	1/2	3/5

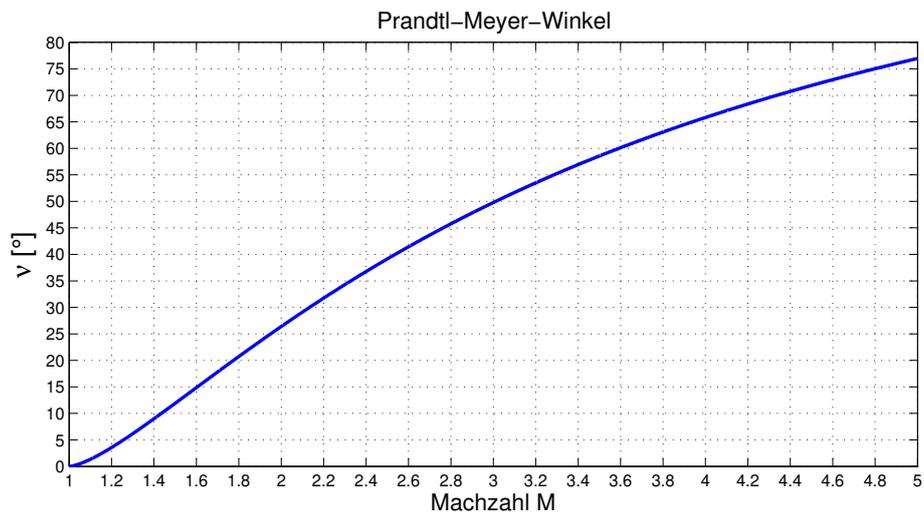


Abbildung 3.1: Prandtl-Meyer-Winkel  $\nu$  über Machzahl  $M$

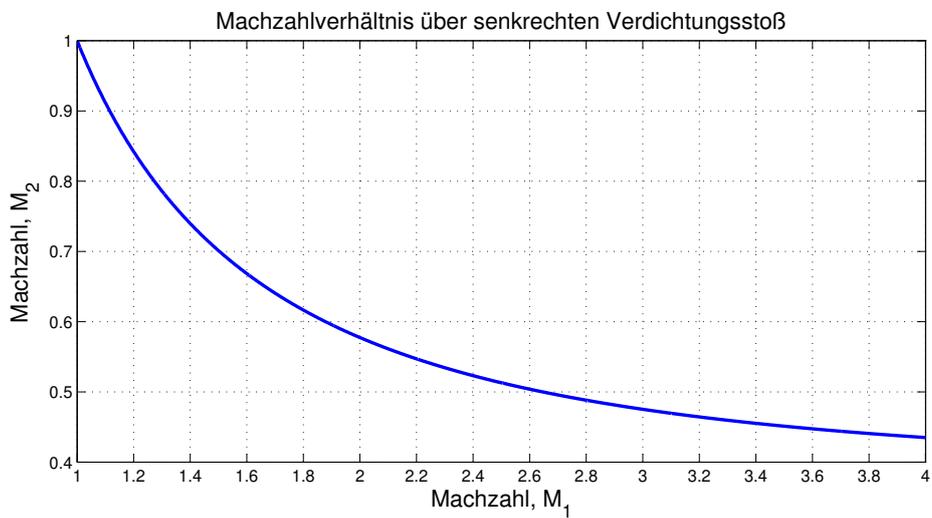


Abbildung 3.2: Machzahlverhältnis  $M_1$  zu  $M_2$  über einen senkrechten Verdichtungsstoß

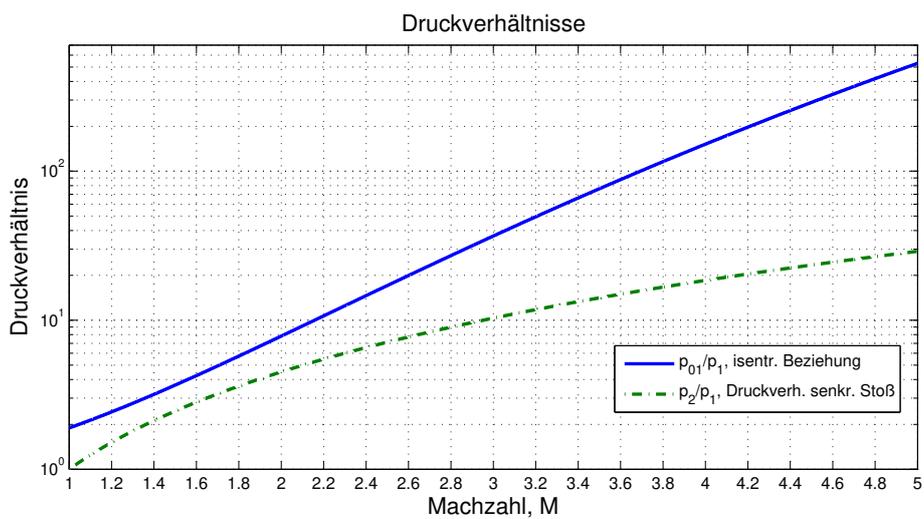


Abbildung 3.3: Druckverhältnisse über senkrechten Verdichtungsstoß und isentropes Druckverhältnis über der Machzahl  $M$

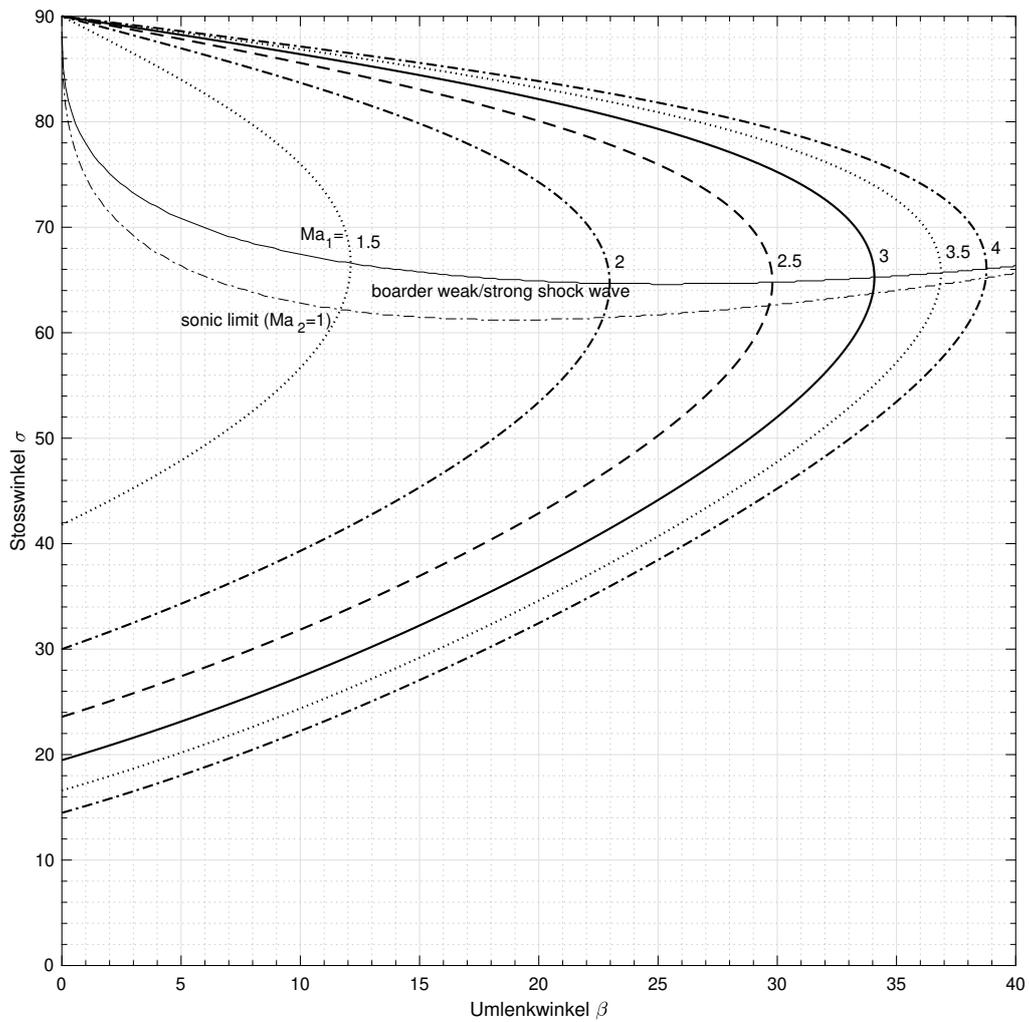
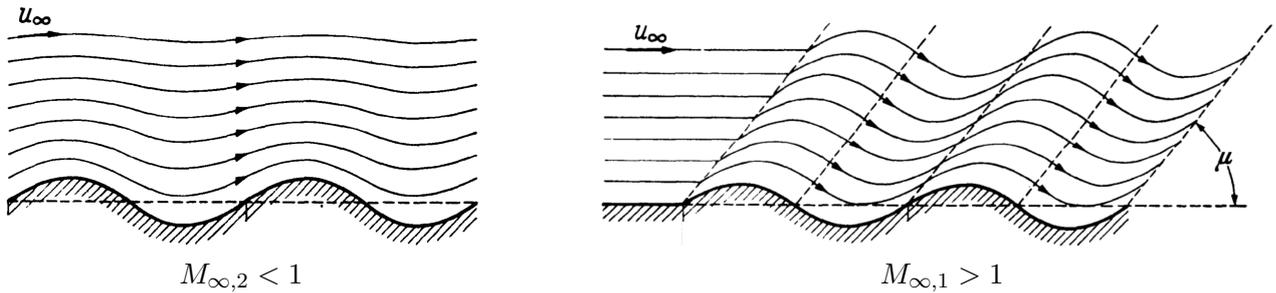


Abbildung 3.4: Änderung des Stoßwinkels in Abhängigkeit vom Umlenk Winkel für verschiedene Anström-Machzahlen  $M_\infty$

# Lösung 1. Aufgabe: Fragenteil (14 Punkte)

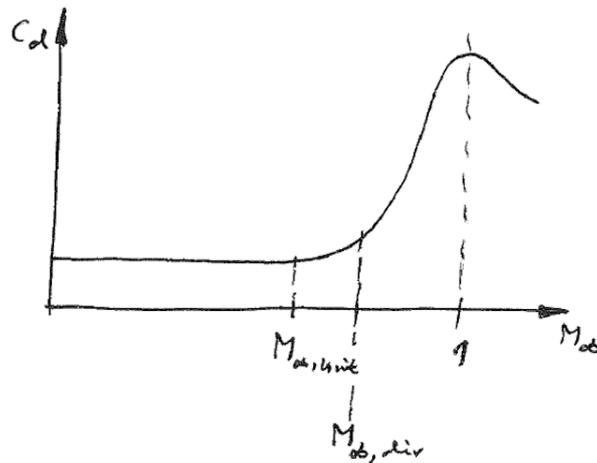
1. Strömungsverhältnisse über der Wellenoberfläche:



Wegen der Vorzeichenumkehr in der linearisierten Potentialgleichung  $(1 - M_\infty^2)\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0$  im Überschall durch den Term  $(1 - M_\infty^2)$  wird diese zur Wellengleichung. Die Strömungsinformationen breiten sich nun nur stromab entlang der Charakteristiken aus. Die Druckänderungen erfolgen nur aufgrund lokaler Änderungen der Oberfläche (Prandtl-Meyer: positive Krümmung  $\rightarrow$  Kompression, negative Krümmung  $\rightarrow$  Expansion, oder Formel  $c_p = \frac{2 \frac{dy}{dx}}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}$ ). Die sich daraus ergebende Druckverteilung auf der Wellenoberfläche  $c_p \approx \cos(x)$  ist phasenverschoben zum Oberflächenverlauf. Dies ergibt eine finite resultierende Kraft von der Strömung auf die Oberfläche in axialer Richtung, die als Wellenwiderstand bezeichnet wird.

Die Machzahl  $M_{\infty,2}$  gehört zum  $c_p$  Ausdruck a), da für diesen Fall die Wellenoberfläche und der Druckbeiwert ohne Phasenverschiebung zueinander laufen. Die Machzahl  $M_{\infty,1}$  gehört zum  $c_p$  Ausdruck b), da für diesen Fall die Wellenoberfläche und der Druckbeiwert mit Phasenverschiebung zueinander laufen.

2. Widerstandsbeiwert für transsonische Profilströmung:

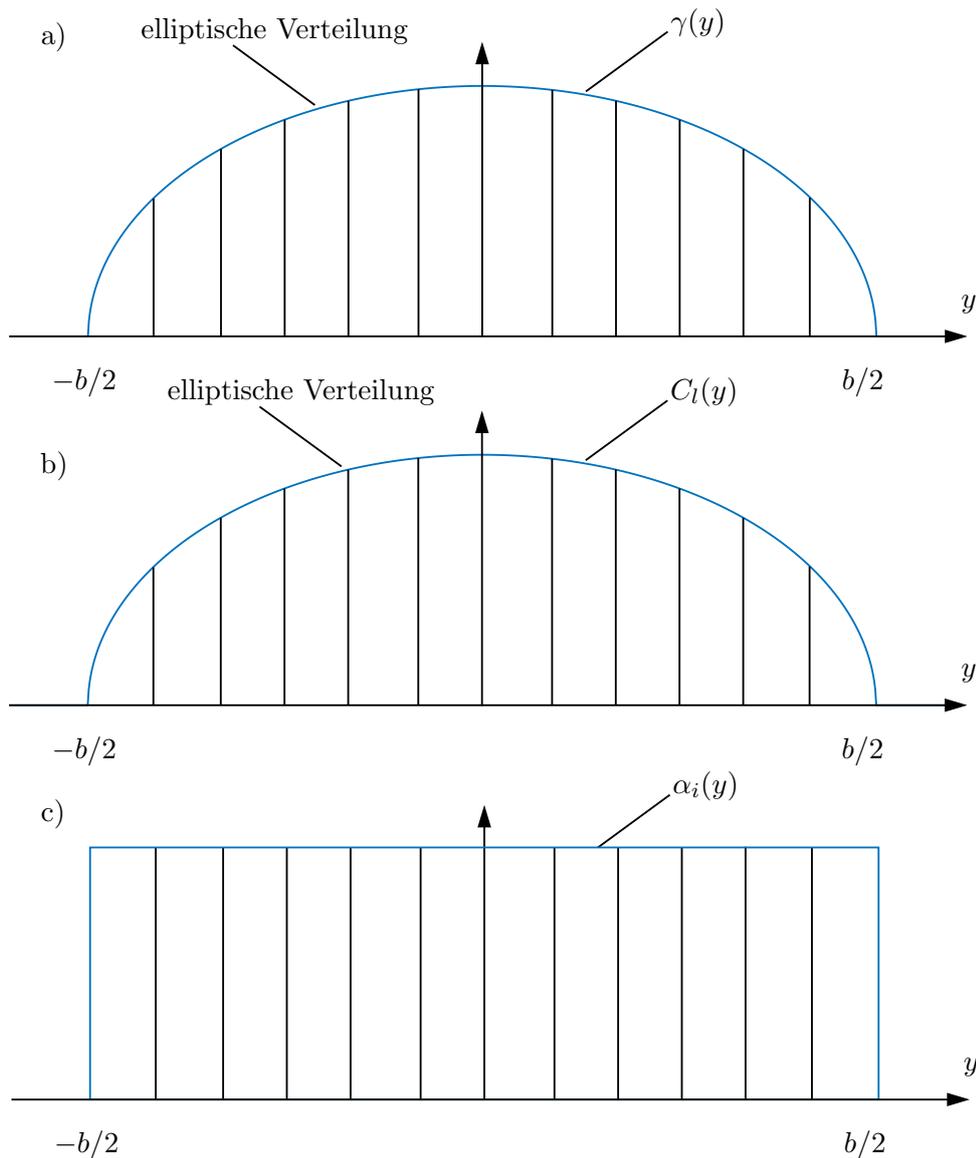


Bei der kritischen Machzahl der Anströmung tritt erstmalig an einem Punkt des Strömungsfeldes des Tragflügels Schallgeschwindigkeit auf.

Die Divergenzmachzahl ist die Machzahl der Anströmung, ab der ein starker Anstieg des Widerstandes zu beobachten ist. Im Allgemeinen wird in der angewandten Literatur der starke Anstieg mit  $\geq 20$  Drag Counts angesetzt.

### 3. Prandtl'sche Traglinientheorie:

Für einen unverwundenen, elliptischen Tragflügel:



Für einen unverwundenen Rechteckflügel ergibt sich eine weitestgehend konstante Zirkulations- und Auftriebsbeiwert- verteilung, die an den Flügelspitzen zu Null abfällt. Der induzierte Anstellwinkel ist an den Flügelspitzen erhöht.

Der induzierte Widerstand des unverwundenen Rechteckflügels ist aufgrund der nicht elliptischen Auftriebsverteilung höher als der induzierte Widerstand eines unverwundenen Flügels mit elliptischem Grundriss. Der Rechteckflügel kann aerodynamisch oder geometrisch verwunden werden, um eine elliptische Auftriebsverteilung anzunähern und somit den induzierten Widerstand zu reduzieren.

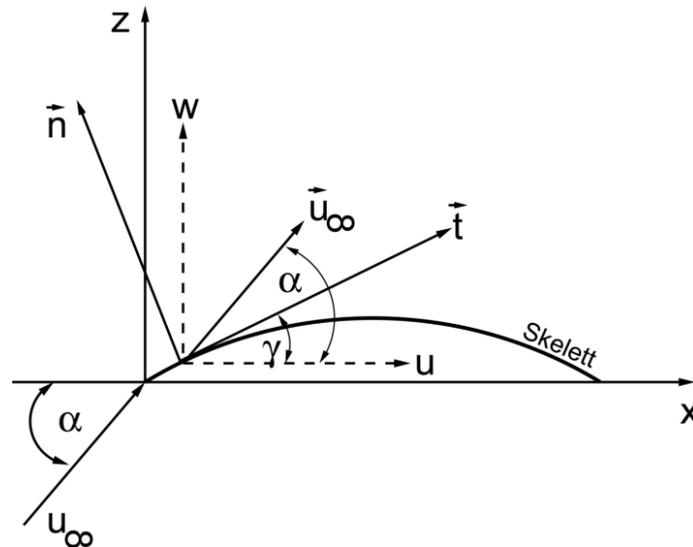
$$c_D = \frac{c_L^2}{\pi\Lambda} (1 + \delta)$$

In der Formel entspricht dies einer Reduktion von  $\delta$ , welches für den elliptischen Tragflügel Null ist. Alternativ kann die Streckung  $\Lambda$  erhöht werden.

## Lösung 2. Aufgabe: Lösung: Skelett-Theorie

1. Die Verteilung der Wirbeldichte über die Sehne ergibt sich aus der kinematischen Strömungsbedingung, demnach die Skelettlinie eine Stromlinie ist, d.h. die Normalkomponente der Geschwindigkeit ist Null.  
Herleitung über  $U_{\infty,s} = 0$ : Die Geschwindigkeit normal zur Skelettlinie ist Null:

$$U_{\infty,n} + w_n = 0$$



$$\begin{aligned} 0 &= U_\infty \sin(\alpha - \gamma) - u \sin(\gamma) + w \cos(\gamma) \\ \Leftrightarrow 0 &= U_\infty [\sin(\alpha) \cos(\gamma) - \sin(\gamma) \cos(\alpha)] - u \sin(\gamma) + w \cos(\gamma) \quad | : \cos(\gamma) \\ \Leftrightarrow 0 &= U_\infty [\sin(\alpha) - \tan(\gamma) \cos(\alpha)] - u \tan(\gamma) + w \end{aligned}$$

Linearisieren mit  $\sin(\alpha) \approx \alpha$ ,  $\cos(\alpha) \approx 1$ ,  $u \cdot \tan(\gamma) \approx 0$  führt auf die Gleichung der Skelettlinie:

$$\frac{\partial Z^{(s)}(X)}{\partial X} = \alpha + \frac{w}{U_\infty} = \alpha + w_a$$

Darin stellt

$$\tan(\gamma) = \frac{\partial Z^{(s)}(X)}{\partial X}$$

die Steigung der Skelettlinie dar.

Alternative Herleitung: über die Definitionsgleichung der Stromlinienfunktion:

$$\frac{\partial Z^{(s)}(X)}{\partial X} = \frac{w_k}{u_k} = \frac{U_\infty \sin(\alpha) + w}{U_\infty \cos(\alpha) + u}$$

Mit den Annäherungen für kleine Winkel ( $\sin(\alpha) \approx \alpha$ ,  $\cos(\alpha) \approx 1$ ) und  $u \ll U_\infty$  folgt

$$\frac{\partial Z^{(s)}(X)}{\partial X} = \frac{U_\infty \alpha + w}{U_\infty} = \alpha + w_a.$$

2. Mit der gegebenen Koordinatentransformation:

$$X = \frac{1}{2} \cdot (1 + \cos(\varphi)) \quad , \quad \frac{dX}{d\varphi} = -\frac{1}{2} \sin(\varphi)$$

lässt sich der Winkel  $\varphi$  an der Stelle  $X = 0.75$  zu

$$0.75 = \frac{1}{2} \cdot (1 + \cos(\varphi)) \quad \Leftrightarrow \quad \varphi = \frac{1}{3}\pi$$

bestimmen. Die Steigung der Skelett-Linie in  $X$ -Koordinaten setzt sich aus:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z_I^{(s)}(X)}{\partial X} &= \frac{4}{45} (1 - 2X) \quad \text{für } X \leq 0.75 \\ \frac{\partial Z_I^{(s)}(X)}{\partial X} &= -D \quad \text{für } X > 0.75 \end{aligned}$$

zusammen. Nach Transformation in  $\varphi$  ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z_I^{(s)}(\varphi)}{\partial X} &= -\frac{4}{45} \cos(\varphi) \quad \text{für } \frac{\pi}{3} \leq \varphi \leq \pi \\ \frac{\partial Z_I^{(s)}(\varphi)}{\partial X} &= -D \quad \text{für } 0 \leq \varphi < \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

Der gegebene Ansatz der Birnbaum-Ackermannschen Normalverteilungen für die dimensionslose Geschwindigkeit

$$w_a(\varphi) = -A_0 - \sum_{n=1}^N A_n \cdot \cos(n\varphi)$$

wird in die kinematische Strömungsbedingung eingesetzt.

$$A_0 + \sum_{n=1}^N A_n \cdot \cos(n\varphi) = -\frac{\partial Z^{(s)}(\varphi)}{\partial X} + \alpha$$

Nach Anwenden der Methode der universellen Multiplikation von  $\cos(n\varphi)$  mit  $n=0$  und Integration über  $\varphi$  ergibt sich

$$\int_0^\pi \left( A_0 + \sum_{n=1}^N A_n \cdot \cos(n\varphi) - \alpha \right) d\varphi = - \int_0^\pi \frac{dZ^{(s)}}{dX} d\varphi.$$

Für die Summe auf der linken Seite ergibt sich

$$\int_0^\pi A_n \cdot \cos(n\varphi) d\varphi = \frac{A_n}{n} \sin(\varphi) \Big|_0^\pi = 0.$$

Insgesamt folgt

$$\begin{aligned} \Rightarrow (A_0 - \alpha) \cdot \pi &= - \int_0^\pi \frac{dZ^{(s)}}{dX} d\varphi \\ \Leftrightarrow A_0 &= \alpha - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{dZ^{(s)}}{dX} d\varphi. \end{aligned}$$

Das Integral über die Profilsteigung wird in die Teilgebiete aufgeteilt und die Steigungen eingesetzt.

$$\begin{aligned}
&= \alpha - \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{1}{3}\pi} \frac{dZ_{II}^{(s)}}{dX} d\varphi - \frac{1}{\pi} \int_{\frac{1}{3}\pi}^{\pi} \frac{dZ_I^{(s)}}{dX} d\varphi \\
&= \alpha + \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{1}{3}\pi} D d\varphi - \frac{1}{\pi} \int_{\frac{1}{3}\pi}^{\pi} -\frac{4}{45} \cos(\varphi) d\varphi \\
&= \alpha + \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{3} \pi D + \frac{1}{\pi} \left[ \frac{4}{45} \sin(\varphi) \right]_{\frac{1}{3}\pi}^{\pi} \\
\Rightarrow A_0 &= \alpha + \frac{1}{3} D - \frac{2}{15\pi\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

Bei Anwenden der Methode der universellen Multiplikation von  $\cos(n\varphi)$  und Integration über  $\varphi$  ergibt sich:

$$\int_0^{\pi} \left( A_0 + \sum_{n=1}^N A_n \cos(n\varphi) - \alpha \right) \cos(p\varphi) d\varphi = - \int_0^{\pi} \frac{dZ^{(s)}}{dX} \cdot \cos(p\varphi) d\varphi \quad p \in N$$

Die Summe auf der linken Seite lässt sich durch

$$\int_0^{\pi} (A_0 - \alpha) \cos(n\varphi) d\varphi = 0$$

und

$$\sum_{n=1}^N \int_0^{\pi} A_n \cdot \cos(p\varphi) \cdot \cos(p\varphi) d\varphi = \begin{cases} A_n \cdot \frac{\pi}{2} & \text{für } n = p \\ 0 & \text{für } n \neq p \end{cases}$$

vereinfachen. Freistellen nach  $A_n$  ergibt

$$\begin{aligned}
\Rightarrow -A_n \frac{\pi}{2} &= \int_0^{\pi} \frac{dZ^{(s)}}{dX} \cos(p\varphi) d\varphi \\
\Leftrightarrow A_n &= -\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{dZ^{(s)}}{dX} \cos(p\varphi) d\varphi
\end{aligned}$$

Für  $n = 1$  folgt:

$$\Rightarrow A_1 = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{dZ^{(s)}}{dX} \cdot \cos(\varphi) d\varphi$$

Aufteilen des Integrals und Einsetzen der Profilsteigungen ergibt

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{1}{3}\pi} D \cos(\varphi) d\varphi + \frac{2}{\pi} \int_{\frac{1}{3}\pi}^{\pi} \frac{4}{45} \cos^2(\varphi) d\varphi \\
&= \frac{2}{\pi} [D \sin(\varphi)]_0^{\frac{1}{3}\pi} + \frac{2}{\pi} \frac{4}{45} \left[ \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{4} \sin(2\varphi) \right]_{\frac{1}{3}\pi}^{\pi} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{\pi} D + \frac{4}{45} \left( 1 - \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \right) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{\pi} D + \frac{8}{135} - \frac{\sqrt{3}}{45\pi}
\end{aligned}$$

3. Bernoulli:

$$\begin{aligned}
p_o - p_{\infty} &= +\frac{\rho_{\infty}}{2} \cdot (U_{\infty}^2 - u_o^2) \\
p_u - p_{\infty} &= +\frac{\rho_{\infty}}{2} \cdot (U_{\infty}^2 - u_u^2)
\end{aligned}$$

mit den induzierten Geschwindigkeiten

$$u_o = U_\infty + u$$

$$u_u = U_\infty - u$$

Mit Vernachlässigung der höheren Terme ( $u^2$ ) folgt

$$p_o - p_\infty = -\frac{\rho_\infty}{2} \cdot (2uU_\infty)$$

$$p_u - p_\infty = +\frac{\rho_\infty}{2} \cdot (2uU_\infty).$$

Für den Druckbeiwert ergibt sich:

$$\begin{aligned} \Delta c_p &= c_{pu} - c_{po} = \frac{p_u - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2} - \frac{p_o - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2} \\ &= \frac{4|u|}{U_\infty} = \frac{2\gamma(\varphi)}{U_\infty} \\ &= 4 \cdot \left( A_0 \cdot \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) + A_1 \cdot \sin(\varphi) \right) \\ &= 4 \cdot \left[ \left( \alpha + \frac{1}{3}D - \frac{2}{15\pi\sqrt{3}} \right) \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \left( \frac{\sqrt{3}}{\pi}D + \frac{8}{135} - \frac{\sqrt{3}}{45\pi} \right) \sin(\varphi) \right] \end{aligned}$$

Die Rücktransformation in  $X$  ergibt schließlich:

$$\Delta c_p = 4 \cdot \left[ \left( \alpha + \frac{1}{3}D - \frac{2}{15\pi\sqrt{3}} \right) \frac{1-x}{\sqrt{x-x^2}} + \left( \frac{\sqrt{3}}{\pi}D + \frac{8}{135} - \frac{\sqrt{3}}{45\pi} \right) 2\sqrt{x-x^2} \right]$$

4. Für den Auftriebskoeffizienten gilt:

$$c_l = \int_0^1 \Delta c_p dX$$

mit der gegebenen Koordinatentransformation sowie  $\Delta c_p$  aus dem vorangegangenen Aufgabenteil folgt:

$$c_l = \frac{1}{U_\infty} \int_0^\pi \gamma(\varphi) \sin(\varphi) d\varphi$$

Die Zirkulationsverteilung für die ersten beiden Birnbaum-Ackermann'schen Normalverteilungen lautet:

$$\gamma(\varphi) = 2U_\infty \left( A_0 \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) + A_1 \sin(\varphi) \right)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow c_l &= 2 \int_0^\pi \left( A_0 \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) + A_1 \sin(\varphi) \right) \sin(\varphi) d\varphi \\ &= 2 \left[ \int_0^\pi A_0 \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin(\varphi) d\varphi + \int_0^\pi A_1 \sin^2(\varphi) d\varphi \right] \\ &= 2 \int_0^\pi A_0 (1 - \cos(\varphi)) d\varphi + 2 A_1 \left[ \frac{\varphi}{2} - \frac{1}{4} \sin(2\varphi) \right]_0^\pi \\ &= 2A_0\pi + 2 A_1 \frac{\pi}{2} \\ &= 2\pi \left( A_0 + \frac{A_1}{2} \right) \end{aligned}$$

Unter Verwendung der Koeffizienten  $A_0 = \alpha + \frac{1}{3}D - \frac{2}{15\pi\sqrt{3}}$  und  $A_1 = \frac{\sqrt{3}}{\pi}D + \frac{8}{135} - \frac{\sqrt{3}}{45\pi}$  sowie dem Zusammenhang  $c_l = 2\pi(\alpha - \alpha_0)$  folgt:

$$c_l = 2\pi \left( A_0 + \frac{A_1}{2} \right) = 2\pi \left( \alpha + \frac{1}{3}D - \frac{2}{15\pi\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2\pi}D + \frac{4}{135} - \frac{\sqrt{3}}{90\pi} \right) = 2\pi(\alpha - \alpha_0)$$

somit folgt für den Nullauftriebswinkel  $\alpha_0$ :

$$\alpha_0 = -D \left( \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \right) + \frac{2}{15\pi\sqrt{3}} - \frac{4}{135} + \frac{\sqrt{3}}{90\pi}$$

5. Bestimmung des Profilparameters  $C$ :

Eine valide Skelett-linie bzw. Profilkontur muss stetig sein, sodass

$$\begin{aligned} Z_I^{(s)}(0.75) &= Z_{II}^{(s)}(0.75) \quad \text{gelten muss.} \\ \frac{4}{45} \left( \frac{3}{4} - \frac{3^2}{4^2} \right) &= C \\ \frac{4}{45} \cdot \frac{3}{16} &= C \\ \frac{1}{60} &= C \end{aligned}$$

Für die abgebildete valide Skelett-Linie gilt außerdem:

$$\begin{aligned} Z_{II}^{(s)}(1.0) &= 0 \\ C - 0.25D &= 0 \end{aligned}$$

Somit ergibt sich

$$D = 4C = \frac{1}{15}$$

### Lösung 3. Aufgabe: Überschall und numerische Verfahren (18 Punkte)

1. + 4. Stoßsystem und numerisches Gitter: (3 Punkte)

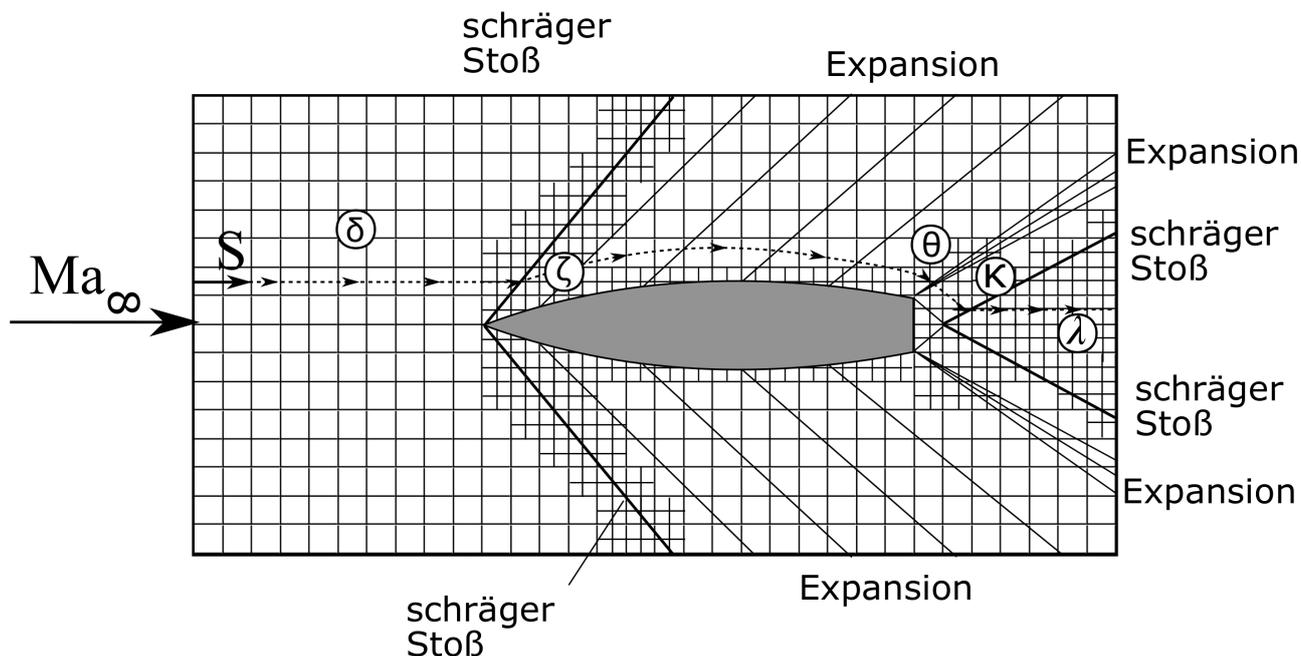
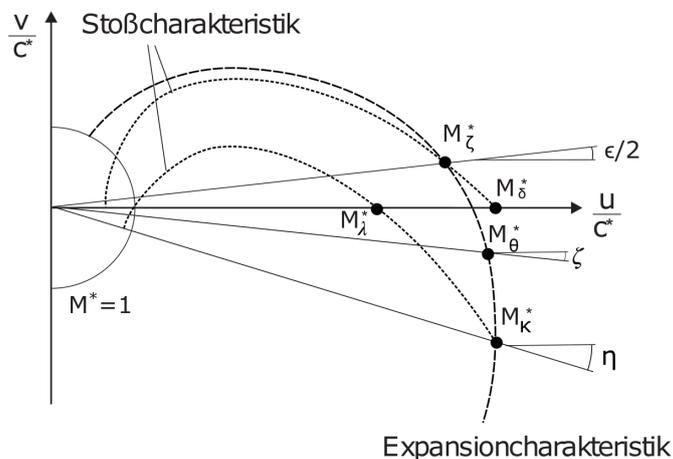


Abbildung 3.1: Stoßsystem und Gitter

2. (2-3 Punkte) Hodograph entlang der Stromlinie:



3. (3 + 2 + 1 Punkte) Zustandsänderungen für die Oberseite:

$$\text{Kompression von 1 nach 2} \Rightarrow \beta_{1,2} = \epsilon/2 = 10^\circ$$

$$M_1 = 3.5 \quad (\text{Abb. 3.4}) \Rightarrow \sigma_{1,2} \approx 25^\circ$$

$$M_{1n} = 3.5 \cdot \sin 25^\circ \approx (\text{Tabelle aus dem Hinweis}) \frac{7}{2} \cdot \frac{3}{7} = 1.5$$

Für das gesuchte Druckverhältnis folgt:

$$(\text{Abb. 3.3}) \Rightarrow \frac{p_2}{p_1}(M_{1n} = 1.5) \approx 2.5$$

Bestimmung des Zustandes 2:

$$M_{1n} = 1.5 \quad (\text{Abb. 3.2}) \quad \Rightarrow \quad M_{2n} \approx 0.7$$

$$M_2 = \frac{M_{2n}}{\sin(\sigma_{1,2} - \beta_{1,2})} = \frac{0.7}{\sin(25^\circ - 10^\circ)} = \frac{0.7}{\sin 15^\circ} \approx (\text{Tabelle aus dem Hinweis}) \quad 0.7 \cdot 4 = 2.8$$

Expansion von 2 nach 3  $\Rightarrow \quad \nu_3 = \nu_2 + |\epsilon/2| + |\zeta|$

$$M_2 = 2.8 \quad (\text{Abb. 3.1}) \Rightarrow \quad \nu_2 = 45^\circ \quad \Rightarrow \quad \nu_3 = 45^\circ + 10^\circ + 5^\circ = 60^\circ \quad (\text{Abb. 3.1}) \Rightarrow \quad M_3 \approx 3.6$$

Für das gesuchte Druckverhältnis folgt:

$$\frac{p_3}{p_1} = \frac{p_3}{p_{02}} \cdot \frac{p_{02}}{p_2} \cdot \frac{p_2}{p_1}$$

$$(\text{Abb. 3.3}) \quad \Rightarrow \quad \frac{p_{03}}{p_3}(M_3 = 3.6) \approx 90, \quad \frac{p_{02}}{p_2}(M_2 = 2.8) \approx 30$$

$$\frac{p_3}{p_1} = \frac{1}{90} \cdot 30 \cdot 2.5 = \frac{5}{6}$$

Expansion von 3 nach 4  $\Rightarrow \quad \nu_4 = \nu_3 + |\eta| - |\zeta|$

$$\nu_4 = 60^\circ + 15^\circ = 75^\circ \quad (\text{Abb. 3.1}) \Rightarrow \quad M_4 \approx 4.8$$

Für das gesuchte Druckverhältnis folgt:

$$\frac{p_4}{p_1} = \frac{p_4}{p_{02}} \cdot \frac{p_{02}}{p_2} \cdot \frac{p_2}{p_1}$$

Und für isentrope Expansion gilt:

$$p_{02} = p_{03} = p_{04}$$

$$(\text{Abb. 3.3}) \quad \Rightarrow \quad \frac{p_{04}}{p_4}(M_4 = 4.8) \approx 400$$

$$\frac{p_4}{p_1} = \frac{1}{400} \cdot 30 \cdot 2.5 = \frac{3}{16}$$

4. (1 Punkt) Es handelt sich um ein symmetrisches Profil, welches sich in einer symmetrischen Strömung befindet. Der Auftrieb ist in diesem Fall  $A = 0$
5. (2 Punkte) Siehe Unterpunkt 1.
6. (1 + 2-3 Punkte) Mathematische Formulierung der Randbedingung:  $\frac{\partial p}{\partial n} = 0$

Numerische Bestimmungsgleichung:

$$p_{i,j+1} = p_{i,j} + \frac{\partial p}{\partial n} \Big|_{i,j} \Delta n_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial n^2} \Big|_{i,j} \Delta n_1^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 p}{\partial n^3} \Big|_{i,j} \Delta n_1^3$$

$$p_{i,j+2} = p_{i,j} + \frac{\partial p}{\partial n} \Big|_{i,j} \Delta n_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial n^2} \Big|_{i,j} \Delta n_2^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 p}{\partial n^3} \Big|_{i,j} \Delta n_2^3$$

Nach dem Einsetzen der mathematischen Randbedingung  $\frac{\partial p}{\partial n}|_{i,j} = 0$  folgt:

$$\begin{aligned} p_{i,j+1} &= p_{i,j} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial n^2} \Big|_{i,j} \Delta n_1^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 p}{\partial n^3} \Big|_{i,j} \Delta n_1^3 \\ p_{i,j+2} &= p_{i,j} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial n^2} \Big|_{i,j} \Delta n_2^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 p}{\partial n^3} \Big|_{i,j} \Delta n_2^3 \end{aligned}$$

Eliminierung von  $\frac{\partial^2 p}{\partial n^2}|_{i,j}$  durch Multiplikation der 1. Gleichung mit  $\Delta n_2^2$ , der 2. Gleichung mit  $\Delta n_1^2$  und Subtraktion der beiden Gleichungen:

$$p_{i,j+1} \Delta n_2^2 - p_{i,j+2} \Delta n_1^2 = p_{i,j} (\Delta n_2^2 - \Delta n_1^2) + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 p}{\partial n^3} \Big|_{i,j} \Delta n_1^2 \Delta n_2^2 (\Delta n_1 - \Delta n_2)$$

Somit folgt für  $p_{i,j}$ :

$$p_{i,j} = \frac{p_{i,j+1} \Delta n_2^2 - p_{i,j+2} \Delta n_1^2}{\Delta n_2^2 - \Delta n_1^2} + O(h^3)$$