

Grundlagen

Satz von Kutta-Zhukovskij

Satz von Thomson

Sätze von Helmholtz

Biot-Savartsches Gesetz

Croccoscher Wirbelsatz

Potentialgleichung

Ähnlichkeitsregeln

Grundlagen

Satz von Kutta - Zhukhovskij

Zirkulation : $\Gamma = \oint \vec{v} \cdot d\vec{r}$

beliebige, ebene Körperformen
(einf. geschlossen)

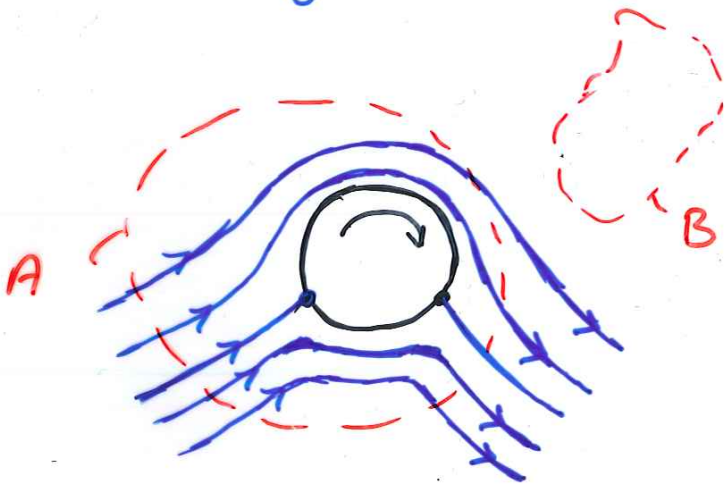
Zshg. zwischen Γ u. L

$\rightarrow L = \rho u_{\infty} \Gamma$

Potentialtheorie :

Parallelströg. + Dipol + Potential =
Wirbel \Rightarrow

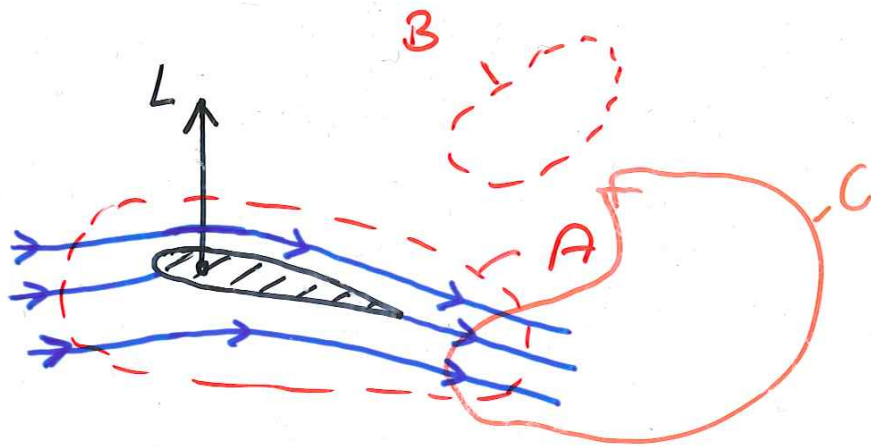
Kreiszyylinderströg. mit Auftrieb



$$\oint_A \vec{v} \cdot d\vec{r} = \Gamma$$

$$\oint_B \vec{v} \cdot d\vec{r} = 0$$

analog für Profil



$$\oint_A \vec{v} \cdot d\vec{r} = \Gamma$$

$$\oint_B \vec{v} \cdot d\vec{r} = 0$$

Profil: Wirbelverteilung innerhalb
d. Profils od. auf d. Oberfl.;
Wirbel besitzen Sing. in $\vec{\nabla} \times \vec{v}$
 $\Rightarrow \Gamma \rightarrow L$

Satz v. Kutta-Zhukhovskij ist die
Grundlage d. Traglinien - und der
Tragflächentheorie.

Bemerkung:

Ursache d. Auftriebs ist die
Druck- u. Schubspgverteilung

Zirkulation ist eine Konsequenz
d. Druck- u. Schubspgverteilung;
 Γ wird durch d. Spg. bestimmt.

Potentialtheorie:

Bestg. v. Γ entlang einer
geschl. Kurve einfacher als
d. Berechnung d. Druckverteilg.
auf d. Oberfläche

⇒ wie ermitteln wir Γ
für eine bekannte Kontur?
(Profil od. Tragflügel)

Satz von Thomson bzw.

Zirkulationstheorem von Kelvin

stationäre Profilmström.

→ Kutta'sche Abflußbedingung:

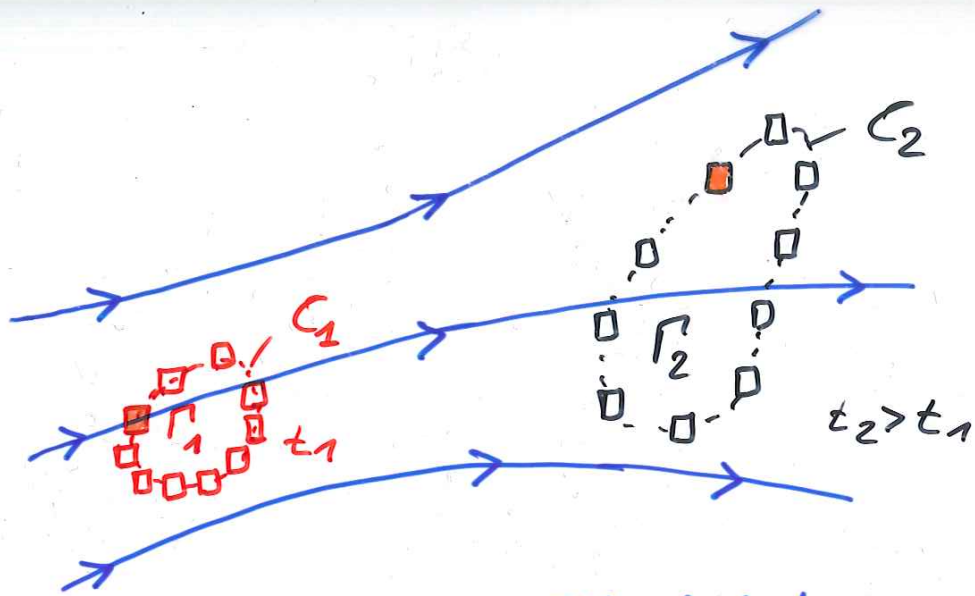
- Anstellwinkel d. Profils α ;
 Γ so groß, daß Ström. glatt abfließt

-  β endlich $\Rightarrow t \hat{=} \text{Staupkt.}$

- $\beta \rightarrow 0$: $\vec{v}_{\text{oben}} = \vec{v}_{\text{unten}}$

Wie entsteht Γ ?

Annahme: reibungsfreie inkompressible Ström., keine Vol. Kräfte



C_1, C_2 : gleiche Fluidelemente

$$\Gamma_1 = \oint_{C_1} \vec{v} \cdot d\vec{r}$$

$$t = t_1$$

$$\Gamma_2 = \oint_{C_2} \vec{v} \cdot d\vec{r}$$

$$t = t_2 > t_1$$

$$\rightarrow \Gamma_2 = \Gamma_1 = \Gamma \quad \text{bzw.}$$

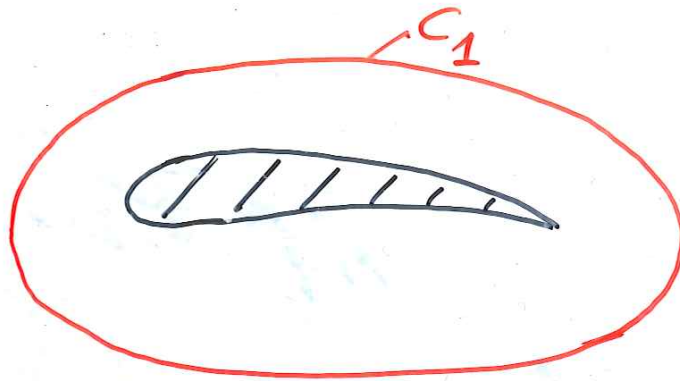
$$\boxed{\frac{d\Gamma}{dt} = 0}$$

allg. gültig für : reibgr. barotrope Strömu. mit kon = ∇ senkativem Vol.kr.!

Entstehg. von Γ mittels $\frac{d\Gamma}{dt} = 0$ erklärbar.

$t = t_1$

$u_{\infty} = 0$



$\Gamma_1 = 0$

$t = t_2 > t_1$

$u_{\infty} \neq 0$

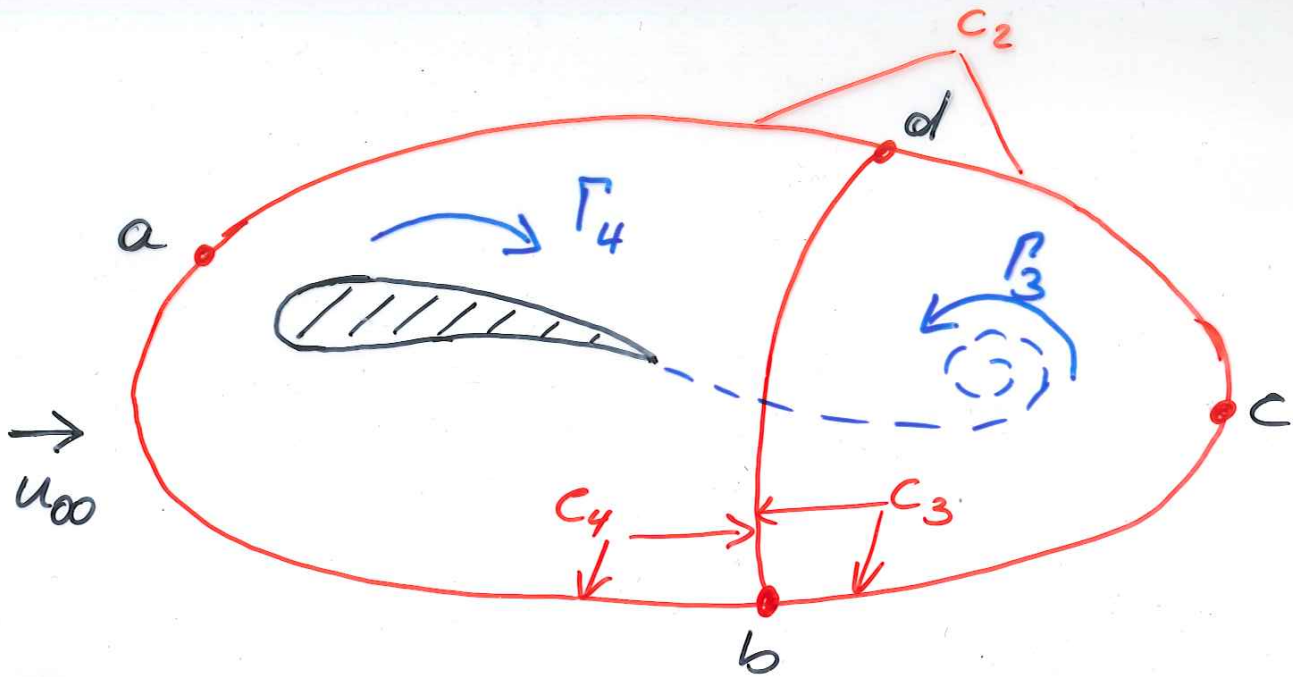
Haftbedingung u. Kutta =
bedingung \Rightarrow Eindrehen
d. Ström. an d. Hinterkante;
Schicht mit extremen
Geschw. grad. \rightarrow großer Wirbel-
stärke

$t = t_3 > t_2$

Wirbelfläche schwimmt ab
 \rightarrow rollt sich spiralförmig ein;

$t = t_4 > t_3$

Aufahrtvorgang ist abgeschlossen
 \rightarrow Geschwindigkeitsgrad. verschwindet
 \Rightarrow keine Wirbelstärke wird erzeugt
(Kuttasche Abflussbedingung wird
erfüllt)



C_1, C_2 : gleiche Fluidteilchen
 $\Rightarrow \Gamma_2 = \Gamma_1 = 0$

bzw. $\Gamma_2 = \Gamma_3 + \Gamma_4$

$\Rightarrow \Gamma_3 = -\Gamma_4$

Wirbelsätze von Helmholtz

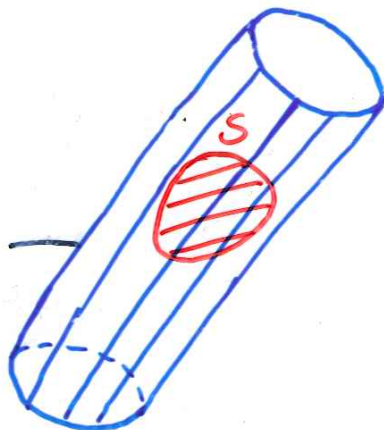
Annahme: reibungsfreie barotrope Strömung
mit konservativ. Vektor.;
nichtrotierend, Ref. syst.

- I) Drehg. ist zeitl. konstant.
- II) Wirbellinien fließen mit d. Fluid; Fluidelemente bleiben Teil der selben Wirbellinie.
- III) Zirkulation bzw. Wirbelfluß einer Wirbelröhre ist konstant, Wirbelröhre endet auf fest. Rand od. ist geschlossen.

zu I) Wirbeltransportplg. für $v=0$

zu II)

Wirbel:
linie



S auf d.
Mantel-
fläche d.
Wirbelröhre

$t=t_1$: Wirbelvektoren in S

$\rightarrow \Gamma$ verschwindet auf Rand von S

$t=t_2 > t_1$: Fläche S' mit den selben Teilchen von S

$$\Gamma_{S'} = \Gamma_S = 0 \quad (\text{Satz v. Thomson})$$

\Rightarrow Wirbelstärke besitzt keine Komponente normal zu S , so daß S auf d. Mantelfläche bleibt bzw. Wirbelröhren strömen mit dem Fluid; nach Grenzübergang folgt d. Aussage für d. Wirbellinie.

20 III) folgt aus Definition von Wirbel= fluss u. Wirbelröhre sowie folg. zw. Wirkl. u. Wirbelfluss

Das Biot-Savartsche Gesetz

Stabwirbel \rightarrow Einfluß auf Umgeb.

Wirbelfaden \rightarrow Einfluß auf Umgeb.

\hookrightarrow induziert ein Geschw. feld,
das d. Potentialtheorie genügt

Herleitung d. Zslegs. zwischen Wirbel-
u. Geschw. feld

Potentialfktn. d. 3D Quellen- u.
Senkenströg.

kugelsymmetr. Strög. : $\phi = - \frac{E}{4\pi r_0}$

allg. 3D Fall :

$$dE(\vec{r}_f) = \varepsilon(\vec{r}_f) dV_f$$

\uparrow infinit. Volumen
 \leftarrow Quellendichte bei \vec{r}_f

$$\|\vec{a}\| = \|\vec{r} - \vec{r}_f\|$$

Abstand zwischen
Aufpkt. \vec{r} u. dem
Elementar \vec{r}_f

$$d\phi(\vec{r}, \vec{r}_f) = -\varepsilon(\vec{r}_f) dV_f / 4\pi \|\vec{a}\|$$

Integration :

$$\phi(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\varepsilon(\vec{r}_f)}{\|\vec{r} - \vec{r}_f\|} dV_f$$

Analog d. vektor. Geschw. potential

$$\vec{\psi}(\vec{r}) = \frac{1}{2\pi} \int_V \frac{\vec{\omega}(\vec{r}_f)}{\|\vec{r} - \vec{r}_f\|} dV_f$$

mit $\vec{v} = \text{rot } \vec{\psi}$

$$\vec{v}(\vec{r}) = \text{rot } \vec{\psi}(\vec{r}) = \frac{1}{2\pi} \text{rot} \int_V \frac{\vec{\omega}(\vec{r}_f)}{\|\vec{r} - \vec{r}_f\|} dV_f$$

inkomp. Fluid, drehgs. fr. Strög., Wir =
beladen beliebige Geometrie

$dV_f = A_f ds_f$ Vol. element d. Wirbelfadens

$$ds_f \parallel \vec{\omega}(\vec{r}_f) \Rightarrow \vec{\omega}(\vec{r}_f) = \vec{\omega}_f$$

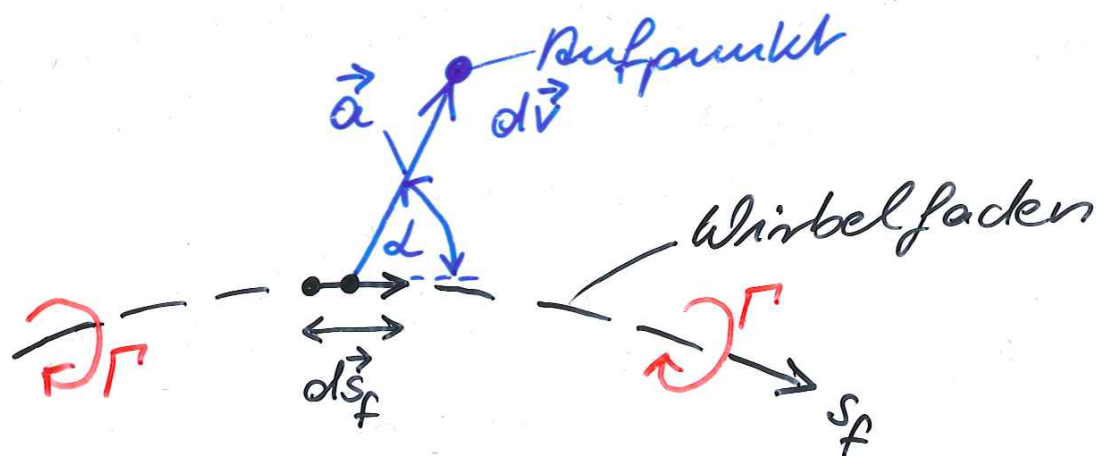
$$\Rightarrow \vec{\omega}_f dV_f = \omega_f A_f d\vec{s}_f$$

Mit

$$\Gamma = 2\omega_f A_f \quad (= \text{konstant})$$

$$\vec{v}(\vec{r}) = \frac{\Gamma}{4\pi} \oint_{\mathcal{L}} \vec{\nabla} \times \frac{d\vec{s}_f}{\|\vec{r} - \vec{r}_f\|} = -\frac{\Gamma}{4\pi} \oint_{\mathcal{L}} \frac{\vec{a} \times d\vec{s}_f}{\|\vec{a}\|^3}$$

Biot-Savartsches Gesetz des gekrümmten Wirbelfadens



$$d\vec{v} \perp (\vec{a} \times d\vec{s}_f)\text{-Ebene};$$

Biot-Savartsches Gesetz f. Wirbelelement

$$\|\vec{a} \times d\vec{s}_f\| = \|\vec{a}\| \|d\vec{s}_f\| \sin \alpha$$

$$dv = \|d\vec{v}\| = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\sin \alpha}{\|\vec{a}\|^2} \|d\vec{s}_f\|$$

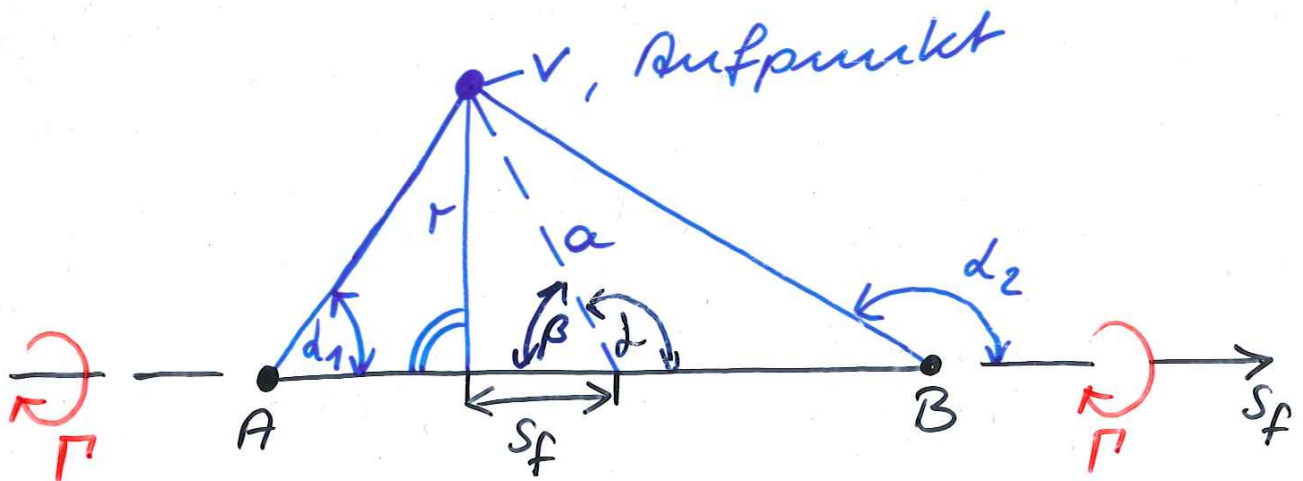
kreisförmiger Wirbelfaden:

Geschwindigkeit im Kreiszentrum

$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \quad a = R, \quad \oint ds_f = 2\pi R$$

$$\Rightarrow V = \frac{\Gamma}{2R}$$

gerader Wirbelfaden (Wirbelstück \overline{AB}):



$$r = a \sin d = \text{konst}$$

$$dr = a \cos d \, dd + \sin d \, da = 0$$

$$s_f = -a \cos d$$

$$ds_f = a \sin d \, dd - \cos d \, da$$

$$= \frac{a}{\sin d} \, dd$$

$$\Rightarrow dv = \frac{\Gamma}{4\pi r} \sin d \, dd$$

$$V = \frac{\Gamma}{4\pi r} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha \, d\alpha$$

$$V = \frac{\Gamma}{4\pi r} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2)$$

unendl. langer Wirbelfaden

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = \pi$$

$$V = \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad (\text{ebene Potentialwirbel})$$

einseitig unendl. langer Wirbelfad.

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = \frac{\pi}{2}$$

$$V = \frac{\Gamma}{4\pi r}$$

Croccoscher Wirbelsatz

Zusammenhang zwischen

Drehung (mech. Größe) und
Entropie (thermodyn. Größe)

Aussage: stat. Strömung mit ge-
krümmten Verdichtungs-
stoß ist drehungsbehaftet.

Herleitung: reibp-freie Strömung

Euler Gln.

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \right) = -\nabla p$$

bzw.

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{v^2}{2} \right) - \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) = -\frac{1}{\rho} \nabla p$$

Entropiegleichung für ∇p

$$T ds = dh - \frac{1}{\rho} dp$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{v^2}{2} + h \right) = T \nabla s + \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v})$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla h_0 = T \nabla s + \vec{v} \times \text{rot } \vec{v}$$

Aussagen für 3-dimen. Ströme.

- stationäre, drehungsfreie, isoenergetische Ströme sind isentrop
- stationäre, isoenergetische, nichtisentropische Ströme sind drehungsbehaftet

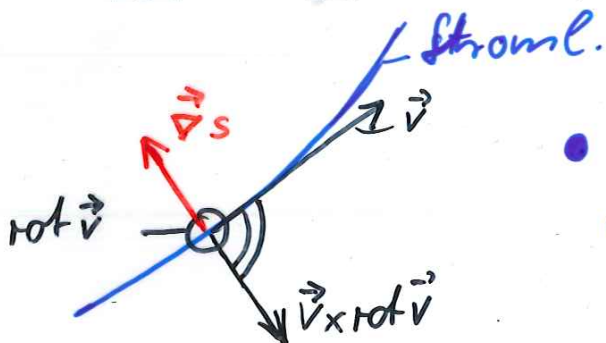
Weitere Diskussion

I) Annahme: stationär, isoenergetisch
 $\vec{v} \neq \vec{0}$

$$T \vec{\nabla} s = - \vec{v} \times \text{rot } \vec{v}$$

- isentrop, wenn $\text{rot } \vec{v} = \vec{0}$
oder $\vec{v} \parallel \text{rot } \vec{v}$
- $s = \text{konst.}$ entlang d. Stromlinie,
da $\vec{v} \times \text{rot } \vec{v}$ normal zu \vec{v} (Element)

II) Annahme: 2-dim., stat., isoenerget.
 $\text{rot } \vec{v} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{v} \times \text{rot } \vec{v} = \vec{0}$, wenn $\text{rot } \vec{v} = \vec{0}$



- eben, stat., isoenerget.,
isentrop
 \Rightarrow drehungsfrei

Potentialgleichung

Ausgang: ungestörte, subson. Ström.
reibungsfrei; kompressibel
→ drehungsfrei

⇒ Potential möglich

Annahme: 2-dim., stat., rot.frei; isentrop

$$\vec{v} = \vec{\nabla} \phi \quad \text{bzw.} \quad u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

gesucht: Glg. f. Zshg. zw. Massen-, Impuls- und Energieerhaltung.

Kontin.glg.

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0$$

bzw.

$$\rho \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} = 0$$

mit ϕ

$$\rho \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \rho}{\partial y} = 0 \quad (*)$$

ρ -Elimination: Euler, Schallgeschw.

$$-\rho \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v} = \vec{\nabla} p \quad \text{bzw.} \quad -\rho \vec{v} d\vec{v} = dp$$

$$dp = -\frac{\rho}{2} d(\vec{v}^2) = -\frac{\rho}{2} d(u^2 + v^2)$$

$$dp = -\frac{\rho}{2} d\left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2\right]$$

$$dp = c^2 d\rho$$

$$d\rho = -\frac{\rho}{2c^2} d\left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2\right]$$

in Komponenten

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = -\frac{\rho}{2c^2} \frac{\partial}{\partial x} [\dots]$$

$$\text{x-Komp.: } \frac{\partial \rho}{\partial x} = -\frac{\rho}{c^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \right)$$

$$\text{y-Komp.: } \frac{\partial \rho}{\partial y} = -\frac{\rho}{c^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right)$$

in Glp. (*)

$$\Rightarrow \left[1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \left[1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} -$$

$$\frac{2}{c^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = 0$$

$$c^2 = c_0^2 - \frac{\gamma-1}{2} \left(\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right)$$

Randbedingungen:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = u_\infty, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$$

Fernfeld

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$$

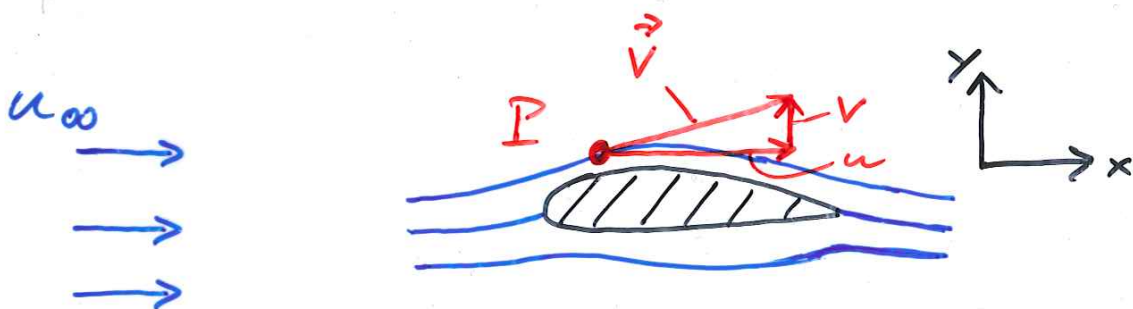
Oberfläche

⇒ lediglich 1 Gleichung zu lösen!
jedoch nichtlinear!

Annahmen zur Linearisierung
⇒ Beschränkp. d. physikal. Gültigkeit

Herleitung d. linearisierten Pot. glg.

Annahme: 2-dim., stat., $\vec{\omega} = 0$, $s = \text{konst.}$



$$u = u_\infty + u'$$

$$v = v'$$

Achtung: u', v' z.Bsp. im Hauptkt. sehr groß.

Störpotential

$$\phi = u_{\infty} x + \underline{\phi'}$$

so daß

$$\frac{\partial \phi'}{\partial x} = u', \quad \frac{\partial \phi'}{\partial y} = v'$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial x} = u_{\infty} + \frac{\partial \phi'}{\partial x}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \phi'}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \phi'}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \phi'}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \phi'}{\partial x \partial y}$$

\Rightarrow Störpotentialglg. in ϕ' (nichtlinear)

$$\left[c^2 - \left(u_{\infty} + \frac{\partial \phi'}{\partial x} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \phi'}{\partial x^2} + \left[c^2 - \left(\frac{\partial \phi'}{\partial y} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \phi'}{\partial y^2} -$$

$$2 \left(u_{\infty} + \frac{\partial \phi'}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \phi'}{\partial y} \right) \frac{\partial^2 \phi'}{\partial x \partial y} = 0$$

Diskussion anhand von

$$\left[c^2 - (u_{\infty} + u')^2 \right] \frac{\partial u'}{\partial x} + (c^2 - v'^2) \frac{\partial v'}{\partial y} - 2(u_{\infty} + u') v' \frac{\partial u'}{\partial y} = 0$$

mit

$$\frac{\partial u'}{\partial y} - \frac{\partial v'}{\partial x} = 0$$

und

$$\frac{c^2}{\gamma-1} + \frac{(u_{\infty} + u')^2 + v'^2}{2} = \frac{c_{\infty}^2}{\gamma-1} + \frac{u_{\infty}^2}{2}$$

$$\begin{aligned}
 (1 - M_{\infty}^2) \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} &= \frac{\partial u'}{\partial x} M_{\infty}^2 \left[(\gamma + 1) \frac{u'}{u_{\infty}} + \frac{\gamma + 1}{2} \frac{u'^2}{u_{\infty}^2} + \frac{\gamma - 1}{2} \frac{v'^2}{u_{\infty}^2} \right] + \\
 &\frac{\partial v'}{\partial y} M_{\infty}^2 \left[(\gamma - 1) \frac{u'}{u_{\infty}} + \frac{\gamma + 1}{2} \frac{v'^2}{u_{\infty}^2} + \frac{\gamma - 1}{2} \frac{u'^2}{u_{\infty}^2} \right] + \\
 &M_{\infty}^2 \left[\frac{v'}{u_{\infty}} \left(1 + \frac{u'}{u_{\infty}} \right) \left(\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} \right) \right]
 \end{aligned}$$

linearer Teil = nichtlinearer Teil

Annahme: **kleine Störungen**

→ schlanke Körper, geringe Anstellwinkel

$$\frac{u'}{u_{\infty}} \ll 1, \quad \frac{v'}{u_{\infty}} \ll 1$$

$$0 \leq M_{\infty} \leq 0.8, \quad M_{\infty} \geq 1.2$$

$$M_{\infty}^2 \left[(\gamma + 1) \frac{u'}{u_{\infty}} + \frac{\gamma + 1}{2} \frac{u'^2}{u_{\infty}^2} + \frac{\gamma - 1}{2} \frac{v'^2}{u_{\infty}^2} \right] \frac{\partial u'}{\partial x} < (1 - M_{\infty}^2) \frac{\partial u'}{\partial x}$$

$$M_{\infty} < 5$$

$$M_{\infty}^2 \left[(\gamma - 1) \frac{u'}{u_{\infty}} + \frac{\gamma + 1}{2} \frac{v'^2}{u_{\infty}^2} + \frac{\gamma - 1}{2} \frac{u'^2}{u_{\infty}^2} \right] \frac{\partial v'}{\partial y} < \frac{\partial v'}{\partial y};$$

$$M_{\infty}^2 \left[\frac{v'}{u_{\infty}} \left(1 + \frac{u'}{u_{\infty}} \right) \left(\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} \right) \right] \text{ vernachlässigbar}$$

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0$$

bzw.

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2 \phi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi'}{\partial y^2} = 0$$

kl. Körper,
subson. od.
superson. Ström.

linearisierte Störpotentialgleichung
ungültig: stumpfe Körper, α groß, transon.
u. hyperson. Ström.

Druckverteilung auf d. Oberfläche

lin. Druckbeiwert:

$$q_\infty = \frac{1}{2} \rho_\infty u_\infty^2 = \frac{\gamma}{2} P_\infty M_\infty^2$$

$$\Rightarrow c_p = \frac{P - P_\infty}{q_\infty} = \frac{2}{\gamma M_\infty^2} \left(\frac{P}{P_\infty} - 1 \right)$$

Energiegleichung

$$T = T_\infty + \frac{\gamma-1}{2} \frac{1}{\gamma R} (u_\infty^2 - \|\vec{v}\|^2)$$

$$\frac{T}{T_\infty} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} \frac{u_\infty^2 - \|\vec{v}\|^2}{c_\infty^2}$$

Stärkeschwachheit

$$\|\vec{v}\|^2 = (u_\infty + u')^2 + v'^2$$

$$\frac{T}{T_{\infty}} = 1 - \frac{\gamma-1}{2c_{\infty}^2} (2u'u_{\infty} + u'^2 + v'^2)$$

$$\frac{T}{T_{\infty}} = 1 - \frac{\gamma-1}{2} M_{\infty}^2 \left(2 \frac{u'}{u_{\infty}} + \frac{u'^2 + v'^2}{u_{\infty}^2} \right)$$

Isentropenbeziehung $\frac{P}{P_{\infty}} = \left(\frac{T}{T_{\infty}} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$

$$\frac{P}{P_{\infty}} = \left[1 - \frac{\gamma-1}{2} M_{\infty}^2 \left(2 \frac{u'}{u_{\infty}} + \frac{u'^2 + v'^2}{u_{\infty}^2} \right) \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

ε

$$\frac{u'}{u_{\infty}} \ll 1, \quad \frac{v'}{u_{\infty}} \ll 1$$

$$\frac{P}{P_{\infty}} = (1 - \varepsilon)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad \varepsilon: \text{klein}$$

Reihenentwicklung

$$\frac{P}{P_{\infty}} = 1 - \frac{\gamma}{\gamma-1} \varepsilon = 1 - \frac{\gamma}{2} M_{\infty}^2 \left(2 \frac{u'}{u_{\infty}} + \frac{u'^2 + v'^2}{u_{\infty}^2} \right)$$

$$\Rightarrow c_p = \frac{2}{\gamma M_{\infty}^2} \left[1 - \frac{\gamma}{2} M_{\infty}^2 \left(2 \frac{u'}{u_{\infty}} + \frac{u'^2 + v'^2}{u_{\infty}^2} \right) - 1 \right]$$

$$c_p = - \left(2 \frac{u'}{u_{\infty}} + \frac{u'^2 + v'^2}{u_{\infty}^2} \right)$$

mit $\frac{u'^2}{u_{\infty}^2} \ll \frac{u'}{u_{\infty}}$, $\frac{v'^2}{u_{\infty}^2} \ll \frac{v'}{u_{\infty}}$

linearisierte Druckbeiwert

$$c_p = -2 \frac{u'}{u_{\infty}} \quad \text{kl. Störfu.}$$

Randbedingungen

Fernfeld: $u' = v' = 0 \Rightarrow \phi' = \text{konst.}$

Oberfläche:

kinemat. Bedp. $\Rightarrow \tan \Theta = \frac{v}{u} = \frac{v'}{u_{\infty} + u'}$



$$\tan \Theta = \frac{v'}{u_{\infty} \left(1 + \frac{u'}{u_{\infty}}\right)} \approx \frac{v'}{u_{\infty}}, \quad \text{da } \frac{u'}{u_{\infty}} \ll 1$$

$$\Rightarrow v' = u_{\infty} \tan \Theta$$

Ähnlichkeitsregeln

Steigerung d. Geschw. d. Flugzeuge in d. 40ern
gesucht: Korrekturen f. d. inkompr. Daten
für d. Kompressibilitätseffekte

Prandtl-Glauert-Ackeret Regel

für Unte- und Überschallström.,
basiert auf d. lin. Potentialfl.

=> gültig für: schlanke Körper, d klein,
sub- und superson. Ström.

Transformation für x, y, ϕ' derart,
daß zshg. zw.

$$M_\infty < 1 \quad \longrightarrow \quad \bar{M}_\infty = 0 \quad (\text{Vglström.})$$

$$M_\infty > 1 \quad \longrightarrow \quad \bar{M}_\infty = \sqrt{2} \quad (\text{Vglström.})$$

Gleichungen d. Vglström.

$$\frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial \bar{y}^2} = 0$$

$$\bar{M}_\infty = 0$$

$$\frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial \bar{x}^2} - \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial \bar{y}^2} = 0$$

$$\bar{M}_\infty = \sqrt{2}$$

Bemerkg.: Vorzeichen v. $\frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial \bar{y}^2}$ -Term verschieden.

$\bar{\Gamma}_\infty = 0$ - Glg.: ellipt. Dgl.

$\bar{\Gamma}_\infty = \sqrt{2}$ - Glg.: hyperbol. Dgl.

Transformation so, daß transf. Ström. ohne M_∞

$$\bar{x} = x, \quad \bar{y} = t_1 y, \quad \bar{u}_\infty = u_\infty, \quad \bar{q}_\infty = q_\infty$$

$$\bar{\phi}(\bar{x}, \bar{y}) = \phi'(x, y) / t_2$$

t_1 : geometr. Trans. faktor

t_2 : strömungsmech. Trans. faktor

Kettenregel

$$\frac{\partial \phi'}{\partial x} = \frac{\partial \phi'}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} + \frac{\partial \phi'}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} = \frac{\partial \phi'}{\partial \bar{x}} = t_2 \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{x}}$$

$$\frac{\partial \phi'}{\partial y} = \frac{\partial \phi'}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{x}}{\partial y} + \frac{\partial \phi'}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial y} = t_1 \frac{\partial \phi'}{\partial \bar{y}} = t_1 t_2 \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{y}}$$

bzw.

$$\frac{\partial^2 \phi'}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi'}{\partial x} \right) = t_2 \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial \bar{x}^2}$$

$$\frac{\partial^2 \phi'}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi'}{\partial y} \right) = t_1^2 t_2 \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial \bar{y}^2}$$

einsetzen in d. lin. Pot. fgl.

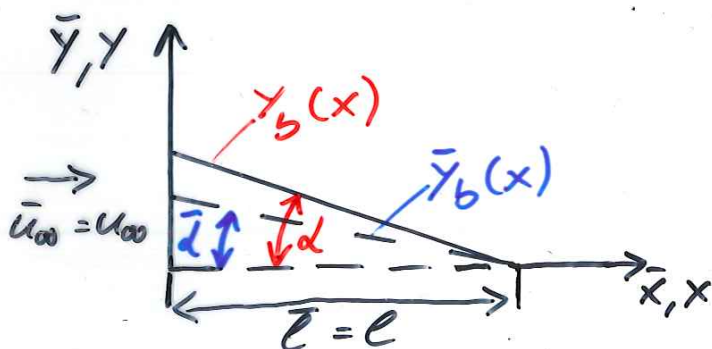
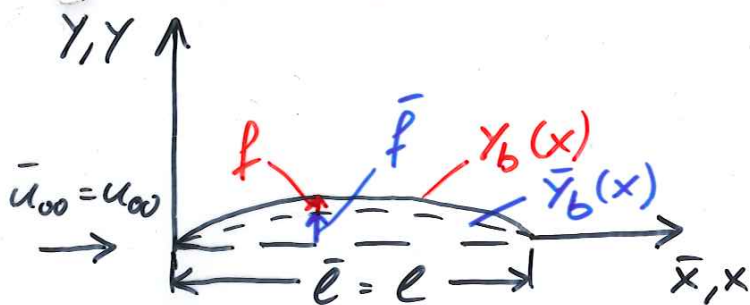
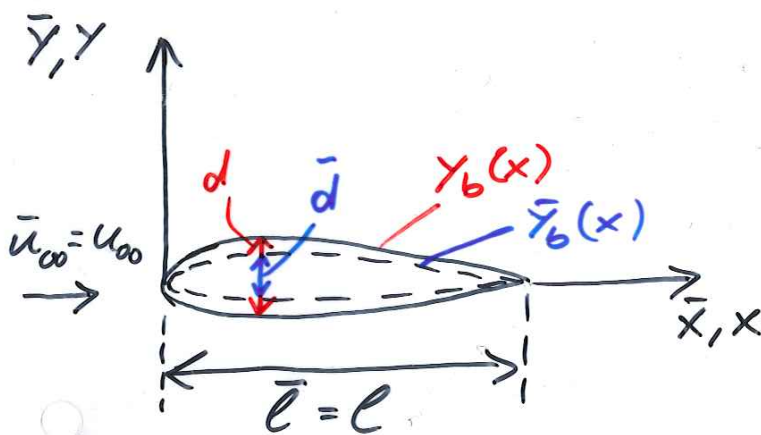
$$t_2 \left[(1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial \bar{x}^2} + t_1^2 \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial \bar{y}^2} \right] = 0$$

$$\Rightarrow t_1 = \sqrt{|1 - M_\infty^2|} > 0$$

transformierte Körperkontur $\bar{y}_b(\bar{x})$

$$\bar{y}_b(\bar{x}) = y_b(x) \sqrt{|1 - M_\infty^2|}$$

Definition des Schlankheitsgrads δ



$$\delta = \left\{ \frac{d}{\ell}, \frac{t}{\ell}, \alpha \right\} \ll 1$$

$$\Rightarrow \bar{\delta} = \delta \sqrt{|1 - M_{\infty}^2|}$$

strömungsmech. Transformationsfakt. t_2
durch kinemat. Randbedg.

vorhand. Kontur $\frac{dy_b}{dx} = \frac{v'}{u_{\infty}} = \frac{1}{u_{\infty}} \frac{\partial \phi'}{\partial y}$

transf. Kontur $\frac{d\bar{y}_b}{d\bar{x}} = \frac{\bar{v}}{u_{\infty}} = \frac{1}{u_{\infty}} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{y}}$

$$\frac{dy_b}{dx} = \frac{1}{u_{\infty}} \frac{\partial \phi'}{\partial y} = \left(\frac{1}{u_{\infty}} t_1 t_2 \right) \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{y}} = t_1 t_2 \frac{d\bar{y}_b}{d\bar{x}} = t_1^2 t_2 \frac{dy_b}{dx}$$

$$\Rightarrow t_2 = \frac{1/t_1}{t_1} = \frac{1}{|1 - M_{\infty}^2|}$$

Zshg. Druckverteilg. d. vorhand. und
d. transformierten Körpers

$$c_p = \frac{p - p_{\infty}}{\frac{\rho_{\infty}}{2} u_{\infty}^2} = - \frac{2}{u_{\infty}} \frac{\partial \phi'}{\partial x}$$

$$\bar{c}_p = - \frac{2}{\bar{u}_{\infty}} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{x}}$$

mit $\frac{\partial \phi'}{\partial x} = t_2 \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{x}}$

$$c_p = t_2 \bar{c}_p$$

bzw.

$$c_p = \frac{\bar{c}_p}{|1 - M_\infty^2|}$$

$$\bar{\delta} = \delta \sqrt{|1 - M_\infty^2|}$$

Ähnlichkeitsregel
ist gültig für
sub- u. superson.
Ströme.

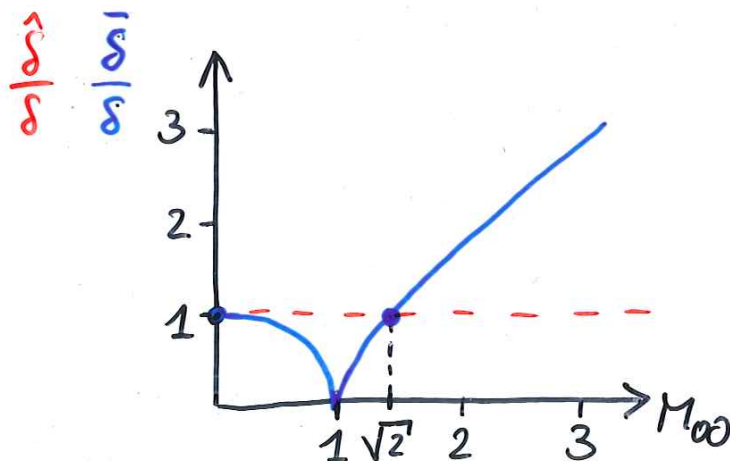
Änderg. d. Ref.-korp.
im Vgl. zum Ausspannsk.

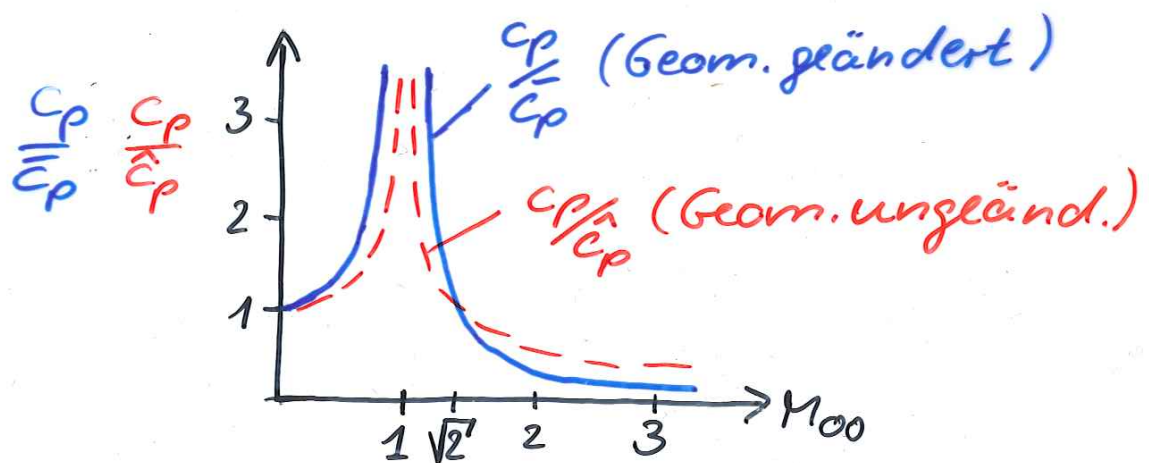
Achtung: Regel nicht gültig bei
 $M_\infty \approx 1$ und $M_\infty \gg 1$!

• $M_\infty \approx 1 \rightarrow c_p \rightarrow \infty$

• $M_\infty \gg 1 \rightarrow \bar{\gamma}_b \rightarrow \infty$

(nicht mehr schlanke)





Praxis: besser keine Transformation d. Kontur

$\bar{c}_e(x)$: Einheitsdruckverteilg.
für $M_\infty = 0$ u. $M_\infty = \sqrt{2}$

$$\Rightarrow \bar{c}_p(x) = \bar{c}_e(x) \delta$$

Ref. profil
transf.

$$\hat{c}_p(x) = \bar{c}_e(x) \delta$$

Ref. profil
nicht transf.

somit

$$\begin{aligned} \bar{c}_p(x) &= \bar{c}_e(x) \delta \sqrt{|1 - M_\infty^2|} \\ &= \hat{c}_p(x) \sqrt{|1 - M_\infty^2|} \end{aligned}$$

bzw.

$$c_p = \frac{\hat{c}_p}{\sqrt{|1 - M_\infty^2|}}, \quad \hat{\delta} = \delta$$

neue Ähnlichkeitsregel

D.h. aus ob. mit $\frac{1}{\sqrt{|1-M_\infty^2|}}$ skalierten
 Referenzdruckwert. \hat{c}_p folgt c_p ,
 wobei d. Geometrie nicht geändert wird.

transsonische Strömung

Vorgehensweise ist vergleichbar

Potentialgl. für $M_\infty = 1$

$$-\frac{\gamma+1}{u_\infty} \frac{\partial \phi'}{\partial x} \frac{\partial^2 \phi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi'}{\partial y^2} = 0$$

Frage: Druckverteilg. eines Ref. Körpers
 mit $\bar{\delta}$ bei $\bar{M}_\infty = 1$ im Vgl.
 zum vorhandenen Körper mit δ
 bei $M_\infty = 1$?

Transformation

$$\bar{x} = x, \quad \bar{y} = t_3 y, \quad \bar{u}_\infty = u_\infty, \quad \bar{q}_\infty = q_\infty,$$

$$\bar{\phi}(\bar{x}, \bar{y}) = \phi'(x, y) / t_4$$

einsetzen

$$t_4 \left[-t_4 \frac{\gamma+1}{u_\infty} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial \bar{x}^2} + t_3^2 \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial \bar{y}^2} \right] = 0 \rightarrow t_3^2 = t_4$$

kinematische Strömsbedg.

$$\frac{d\gamma_b}{dx} = t_3 t_4 \frac{d\bar{\gamma}_b}{d\bar{x}} = t_3^2 t_4 \frac{d\gamma_b}{dx}$$

⇒ triviale Lösung

$$t_3 = t_4 = 1 \quad \text{mit} \quad t_3^2 = t_4$$

weitere Lösung aus

$$\frac{dy_b}{dx} \sim \delta \quad \text{bzw.} \quad \frac{d\bar{y}_b}{d\bar{x}} \sim \bar{\delta}$$

mit

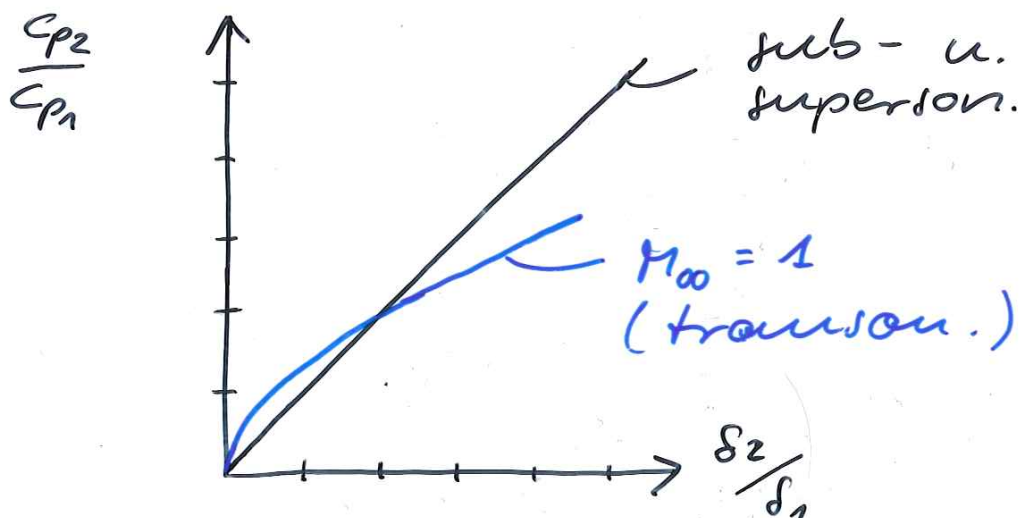
$$t_3^2 = t_4 \quad \text{und} \quad \frac{dy_b}{dx} = t_3 t_4 \frac{d\bar{y}_b}{d\bar{x}}$$

$$\Rightarrow t_3 = \left(\frac{\delta}{\bar{\delta}}\right)^{1/3}, \quad t_4 = \left(\frac{\delta}{\bar{\delta}}\right)^{2/3}$$

Zshg. zw. c_p -Beiwerten: $c_p = t_4 \bar{c}_p$

$$\Rightarrow c_p / \bar{c}_p = \left(\frac{\delta}{\bar{\delta}}\right)^{2/3}$$

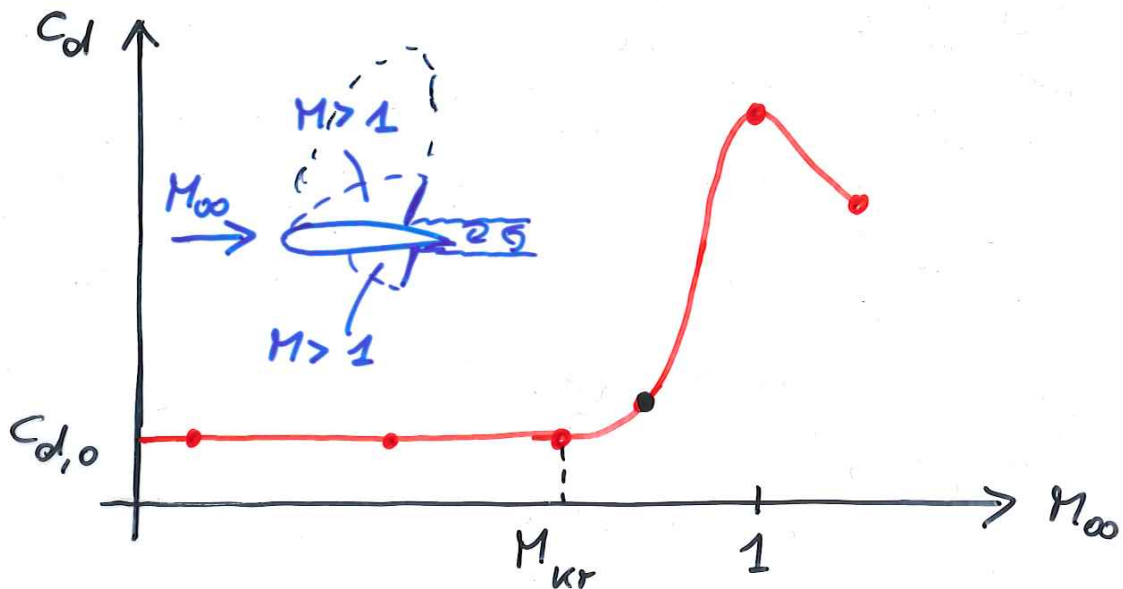
von Kármánsche Ähnlichkeitsregel
(gültig bei $M_\infty = 1$)



1, 2: Indizes zweier Profile

transsonische Profilströmung ist extrem nichtlinear; Analyse von

$$c_d = f(M_{\infty})$$

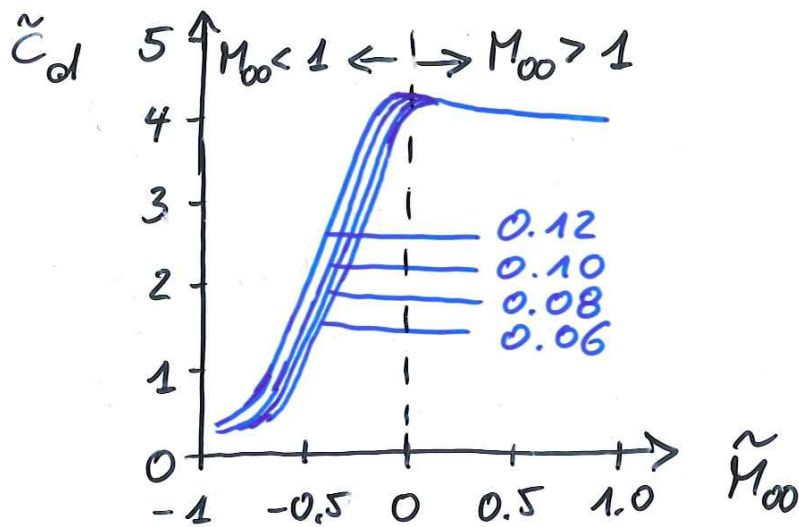
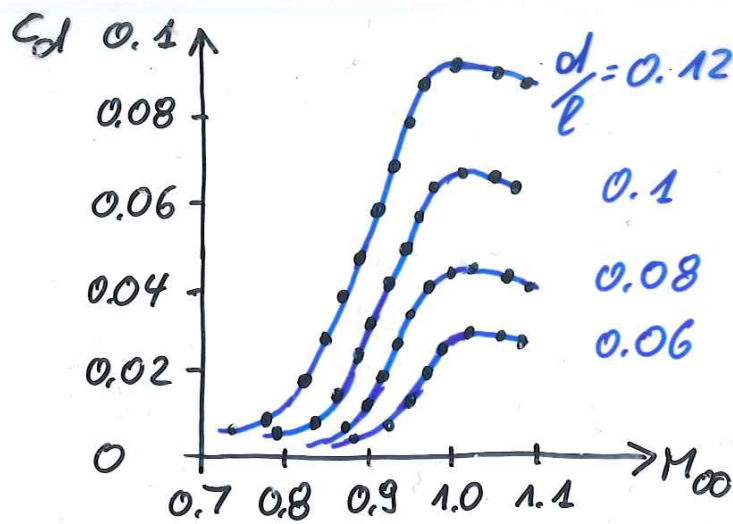


$$M_{\infty} < M_{kr} : c_d \approx \text{konst}$$

$$M_{\infty} = M_{kr} + \epsilon : \text{Überschallblase} \\ 1.05 \leq M \leq 1.05$$

$$M_{\infty} > M_{kr} + \epsilon : \text{extremer Widerstandsanstieg} \\ c_d \geq 10 c_{d,0} \text{ aufgrund von} \\ \text{Überschalljet, mit} \\ \text{Verdichtungsstößen} \rightarrow \text{Ab-} \\ \text{lösung d. Grenzschicht}$$

Beurteilung: transson. Ähnlichkeitsregel auch in diesem nichtlin. Bereich anwendbar



reduziertes Widerstandsbeiwert $\tilde{C}_d = C_d / \delta^{5/3}$

„ Machzahl $\tilde{M}_\infty = (M_\infty^2 - 1) / (\gamma + 1) \delta^{2/3}$

hypersonische Strömungen

vereinfachte, nichtlineare Potentialgleichung kann aufgegeben werden;

analoge Vorgehensweise wie im Unter-, Über- und Transschall

$$\Rightarrow \frac{c_p}{\bar{c}_p} = \left(\frac{\delta}{\bar{\delta}} \right)^2 \quad \text{nach Tsien}$$

obwohl f. homentropen Strömungen hergeleitet, gültig auch bei Verdichtungsstößen

Zusammenfassung zu den

Ähnlichkeitsregeln:

$$c_p \sim \delta \quad \text{sub- u. superson.}$$

$$c_p \sim \delta^{2/3} \quad \text{transson.}$$

$$c_p \sim \delta^2 \quad \text{hyperson.}$$

Aerodynamik des Tragflügels

Geometrische Begriffe

Profilsystematik

Aerodynamische Koeffizienten

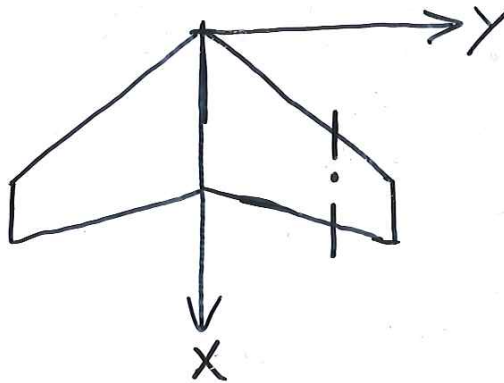
Bewegungen des Flugzeugs

Aerodynamik des Tragflügels

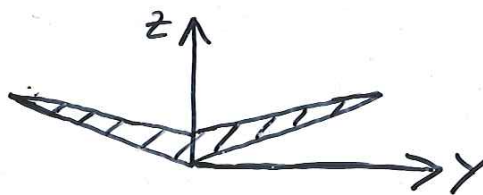
Geometrie des Tragflügels

Form wird bestimmt durch:

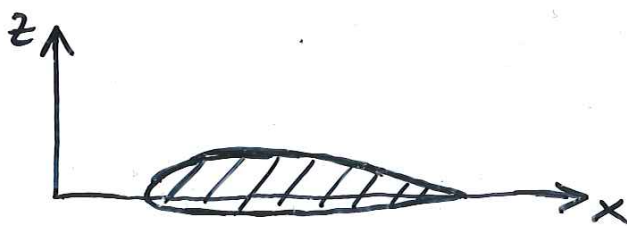
- Grundriß
- Verwindung, Neigung
- Flügelprofil



Grundriß



V-Stellung



Flügelprofil

Flügelspannweite $b = 2s$

→ max. Ausdehng. in y -Richtg.

dimensionenlose Koord.:

$$\bar{x} = \frac{x}{s}, \quad \bar{y} = \frac{y}{s}, \quad \bar{z} = \frac{z}{s}$$

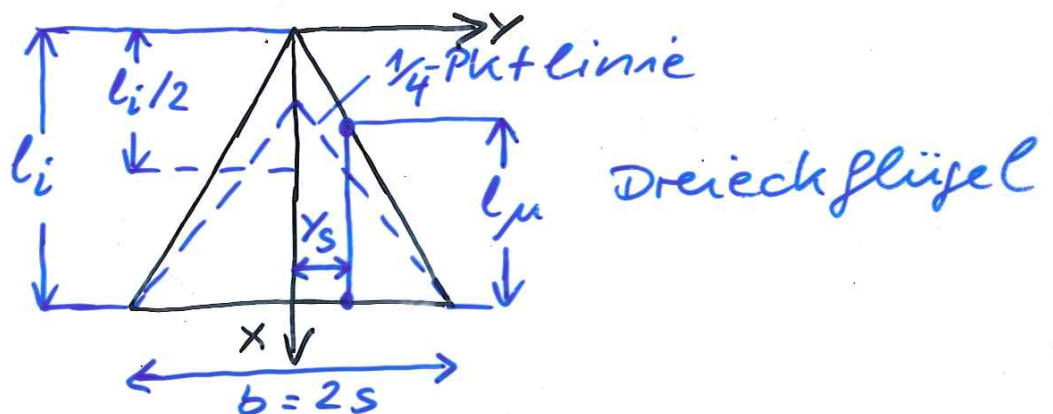
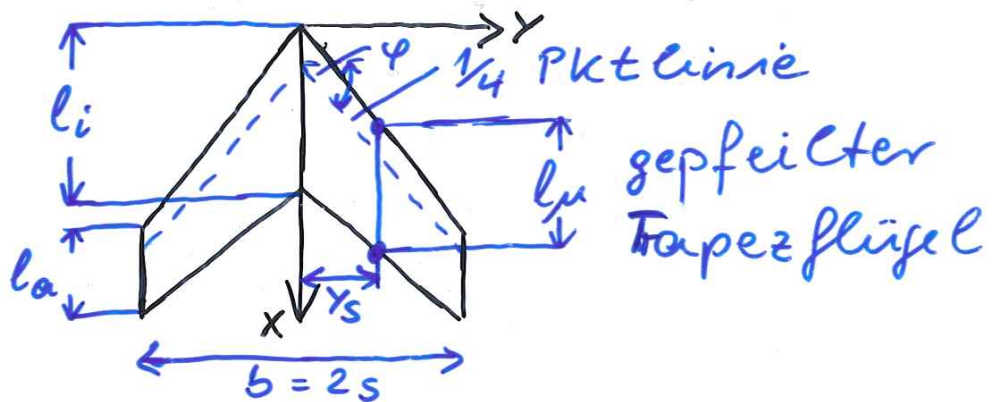
Flügeltiefe $l(y)$

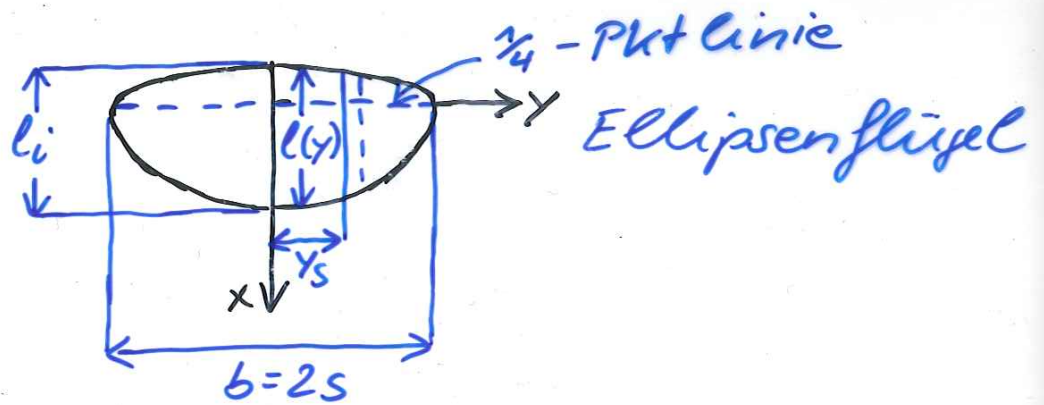
→ Ausdehng. in x -Richtg.

$$l_i = l(y=0), \quad l_a = l(y=\pm s)$$

Flügelzuspitzung λ (trapezf. Grundriß)

$$\rightarrow \lambda = l_a / l_i$$





Flügelfläche :
$$F = \int_{-s}^s l(y) dy$$

Seitenverhältnis od. Streckung :
$$\Lambda = \frac{b^2}{F}$$

→ Schlankheitsmaß

mittlere Flügeltiefe :
$$l_m = \frac{F}{b}$$

$$\Rightarrow \Lambda = \frac{b}{l_m}$$

Bezugsflügeltiefe :
$$l_\mu = \frac{1}{F} \int_{-s}^s l^2(y) dy$$

→
$$l_\mu / l_m \geq 1$$

Pfeilwinkel $\varphi(y)$:
$$\tan \varphi(y) = dx(y) / dy$$

$$\tan \varphi_{25}(y) = dx_{25}(y) / dy$$

→ Punkte gleicher **prozentualer**
(hier 25%) Rücklage v. d. Vorderkante

Abstand d. Flächenschwerpunkts \perp zur Sym.ebene

$$\text{allg.: } \tilde{y} = \int_a^b y f(y) dy / \int_a^b f(y) dy$$

$$y_s = \frac{2}{F} \int_0^s y l(y) dy.$$

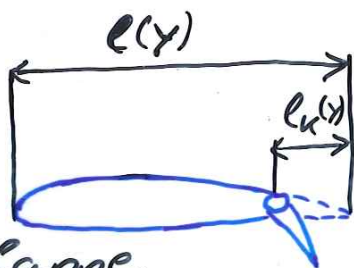
geometr. Neutralpunkt

$$x_{N_{25}} = \frac{1}{F} \int_{-s}^s l(y) x_{25}(y) dy, \quad y_{N_{25}} = 0$$

$\hat{=}$ Schwerpkt. d. Flügelfläche,
wenn $G \sim l(y)$ auf $\frac{1}{4}$ -Pktl.

Klappentiefenverhältnis

$$\lambda_k = l_k(y) / l(y)$$



wölbklappe



Fowler-Klappe

spreizklappe

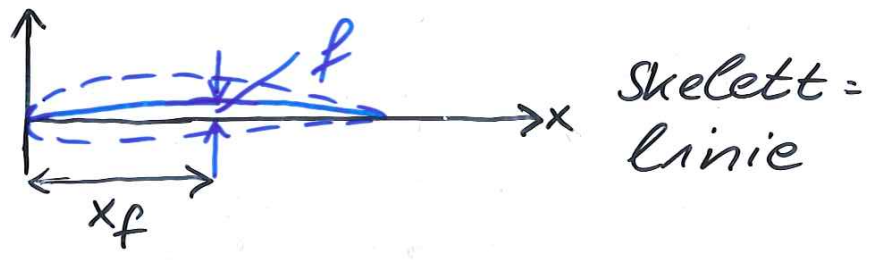
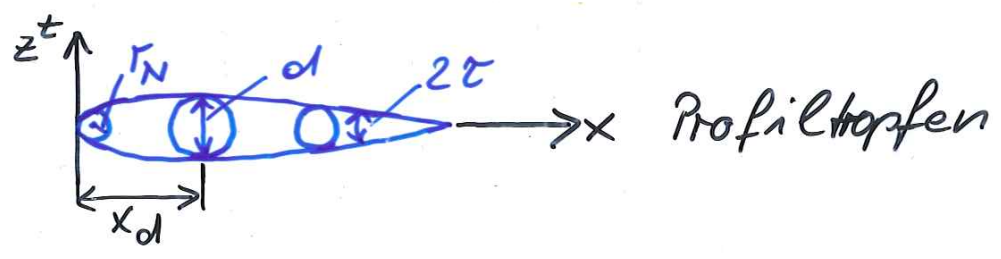
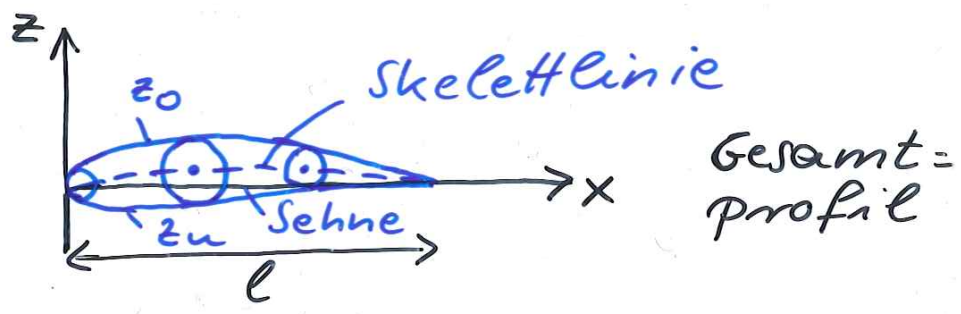
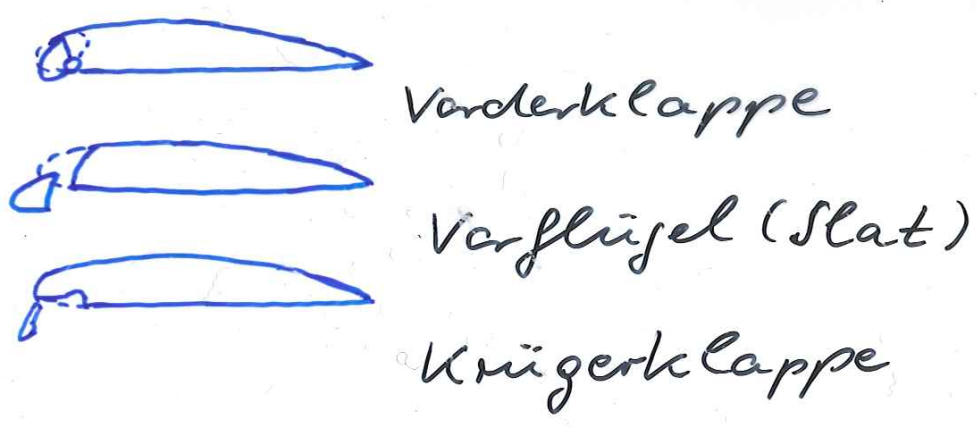


doppelte
spaltklappe

spaltklappe



dreifache
spaltklappe



Profiltiefe l : vord. + hint. Pkt.
Skelettlinie: Verbindg. d. Kreise d. Dickenverteilg.
Sehne: vord. + hint. Pkt. d. Skelettl.

Profildicke d : größter Durchmesser
d. Kreise

Wölbungshöhe f : max. Abst. v.
Skelett. zur Sehne

Dickenrücklage x_d , Wölbgrücklage x_f

Nasenradius r_N , Hinterrandwinkel 2α

dimensionlos:

$$\frac{d}{l}, \frac{f}{l}, \frac{x_d}{l}, \frac{x_f}{l}, \frac{r_N}{l}$$

Zshge: $z^s(x)$ Skelett, $z^t(x)$ Dickenvertlg.

$z_{o,u}(x)$ Verteilg. d. Ober- u.
Unterseite

$$z_{o,u} = z^s(x) \pm z^t(x)$$

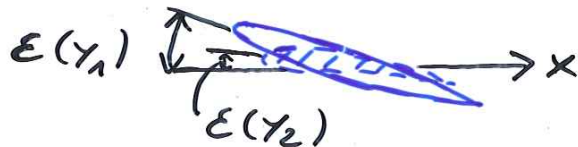
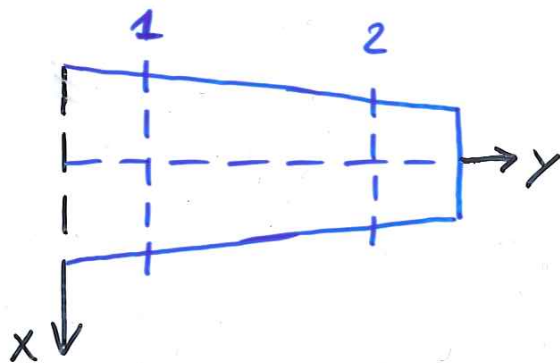
$$z^s(x) = \frac{1}{2} [z_o(x) + z_u(x)]$$

$$z^t(x) = \frac{1}{2} [z_o(x) - z_u(x)]$$

Pfeilg.: Verschiebg. d. Profile
in x-Richtg.

V-stellg.: Versatz in z-Richtg.

Verwindg.: Verdrehg. gegeneinander



Einstellwinkel d. Profilsehne $\epsilon(y)$
 $\rightarrow \epsilon(y=s) < \epsilon(y < s)$

V-Stellung in x, y :

$$\tan v(x, y) = \frac{\partial z^s(x, y)}{\partial y}$$

Profilsystematik

Phillips 1884 → erste def. Windkanalexp.

→ Lilienthal → Wright

20er Jahre: Zhukovskii-Profile
in Göttingen

30er Jahre: NACA (heute NASA)
→ NACA-Profile

NACA-Systematik

vierstellige NACA-Reihe

→ NACA 2412
 ↑ ↑ ↑ ↑
 1. 2. 3. 4.

1. max. Wölbgr. f_{\max} in % von l
2. x_f in $\frac{1}{10}$ von l
3. 4. max. Dicke d_{\max} in % von l

weiterhin $z^t(x)$, $z^s(x)$, r_N festgelegt

fünfstellige NACA-Reihe

→ NACA 23012

1. Ausleggsauftriebskoeff. in $\frac{1}{10}$ / 312

2.3. $x_f \cdot 2$

4.5. max. Dicke d_{max} in % von l

Ausleggsauftriebskoeff.: c_l für $d = \left. \frac{dz^s}{dx} \right|_{x=0}$

6er NACA-Reihe

→ NACA 65-218

1. Zugehörigkeit zur Reihe

2. Lage v. p_{min} bzw. v_{max} in $\frac{1}{10}$ von l
(bei sym. Dickenverteilg. mit $c_l = 0$)

3. Ausleggsauftriebskoeff. in $\frac{1}{10}$

4.5. max. Dicke d_{max} in % von l

NACA-Profile auch heute
eingesetzt

jedoch :

i. a. spezielle Tragflügel für
jeden Flugzeugtyp

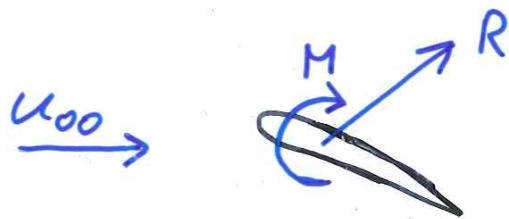
→ Boeing 727, 737, 747, 757, 767

→ Airbus A300, A310, A319, A320, A321,
A340

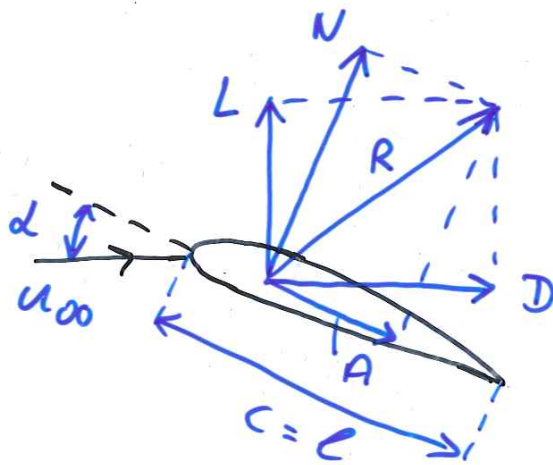
Aerodynamische Koeffizienten

Druck-, Schubspannverteilg. \Rightarrow Kräfte,
Momente

Integration v. $p, \tau \rightarrow R, M$



Zerlegung von R



L: Auftrieb, D: Widerstand

N: Normalkr., A: Axialkr.

$$L = N \cos \alpha - A \sin \alpha$$

$$D = N \sin \alpha + A \cos \alpha$$

$$N = D \sin \alpha + L \cos \alpha$$

$$A = D \cos \alpha - L \sin \alpha$$

$$\frac{L}{D} = f(\text{Geometrie, } \alpha, \text{ etc.})$$

Bemerkung: stat., gradliniger Gleitflug

$$\text{Gleitwinkel } \varepsilon \rightarrow \tan \varepsilon = \frac{D}{L}$$

ε_{\min} best. durch $(L/D)_{\max}$

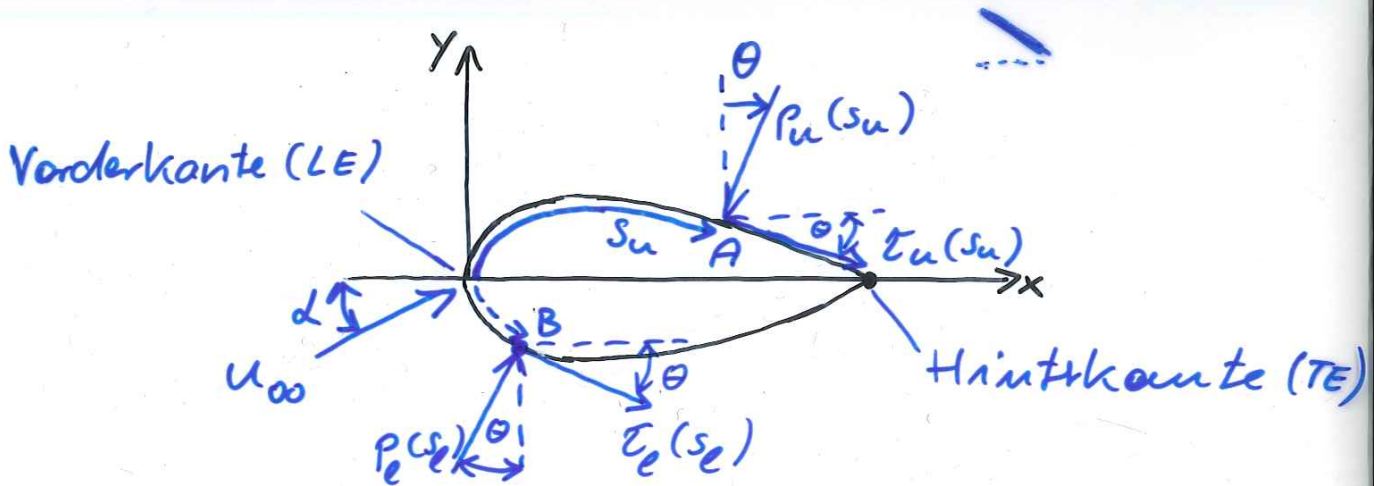
Zahlenwerte:

- rechteckige Platte

$$\Lambda = 6 \rightarrow (L/D)_{\max} = 6 \div 8,$$

- profilierte Tragflügel

$$\rightarrow (L/D)_{\max} = 25$$



λ : Kräfte pro Einheitsspannweite

$$\left. \begin{aligned} d\hat{N}_u &= -p_u ds_u \cos\theta - \tau_u ds_u \sin\theta \\ d\hat{A}_u &= -p_u ds_u \sin\theta + \tau_u ds_u \cos\theta \end{aligned} \right\} \text{Oberseite}$$

$$\left. \begin{aligned} d\hat{N}_l &= p_l ds_l \cos\theta - \tau_l ds_l \sin\theta \\ d\hat{A}_l &= p_l ds_l \sin\theta + \tau_l ds_l \cos\theta \end{aligned} \right\} \text{Unterseite}$$

Integration

$$\hat{N} = - \int_{LE}^{TE} (p_u \cos\theta + \tau_u \sin\theta) ds_u + \int_{LE}^{TE} (p_l \cos\theta - \tau_l \sin\theta) ds_l$$

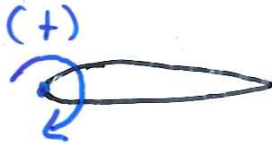
$$\hat{A} = \int_{LE}^{TE} (-p_u \sin\theta + \tau_u \cos\theta) ds_u + \int_{LE}^{TE} (p_l \sin\theta + \tau_l \cos\theta) ds_l$$

$\Rightarrow \hat{L}, \hat{D} \quad !!$

Berechnung von M :

$M > 0$, wenn $\alpha \uparrow$

$M < 0$, wenn $\alpha \downarrow$



$$d\hat{M}_u = (\rho_u \cos\theta + \tau_u \sin\theta) x \, ds_u + \quad (\text{oben})$$

$$(-\rho_u \sin\theta + \tau_u \cos\theta) y \, ds_u$$

$$d\hat{M}_e = (-\rho_e \cos\theta + \tau_e \sin\theta) x \, ds_e + \quad (\text{unten})$$

$$(\rho_e \sin\theta + \tau_e \cos\theta) y \, ds_e$$

Integration:

$$\hat{M}_{LE} = \int_{LE}^{TE} [(\rho_u \cos\theta + \tau_u \sin\theta)x - (\rho_u \sin\theta - \tau_u \cos\theta)y] \, ds_u$$

$$+ \int_{LE}^{TE} [(-\rho_e \cos\theta + \tau_e \sin\theta)x + (\rho_e \sin\theta + \tau_e \cos\theta)y] \, ds_e$$

$\theta(s), x(s), y(s)$ bekannt $\Rightarrow \hat{M}_{LE}$ bekannt.

Dimensionslose Beiwerte:

$$\rho_{\infty} = \frac{\rho}{2} u_{\infty}^2, \quad \text{Fläche } F, \quad \text{Länge } c$$

im 3D-Fall, 2D-Fall

Auftriebskoeffizient

$$C_L = \frac{L}{\rho_{\infty} F}, \quad C_L = \frac{\hat{L}}{\rho_{\infty} c}$$

Widerstandskoeffizient

$$C_D = \frac{D}{\rho_{\infty} F}, \quad C_D = \frac{\hat{D}}{\rho_{\infty} c}$$

Normalkraftkoeffizient

$$C_N = \frac{N}{\rho_{\infty} F}, \quad C_N = \frac{\hat{N}}{\rho_{\infty} c}$$

Axialkraftkoeffizient

$$C_A = \frac{A}{\rho_{\infty} F}, \quad C_A = \frac{\hat{A}}{\rho_{\infty} c}$$

Momentenkoeffizient

$$C_M = \frac{M}{\rho_{\infty} F c}, \quad C_M = \frac{\hat{M}}{\rho_{\infty} c^2}$$

mit dem Druckbeiwert

$$c_p = \frac{p - p_{\infty}}{\rho_{\infty}}$$

und dem Reibbeiwert

$$c_f = \frac{\tau}{\rho_{\infty}}$$

$$c_n = \frac{1}{c} \left[\int_0^c (c_{p,e} - c_{p,u}) dx + \int_0^c \left(c_{f,u} \frac{dy_u}{dx} + c_{f,e} \frac{dy_e}{dx} \right) dx \right]$$

$$c_a = \frac{1}{c} \left[\int_0^c \left(c_{p,u} \frac{dy_u}{dx} - c_{p,e} \frac{dy_e}{dx} \right) dx + \int_0^c (c_{f,u} + c_{f,e}) dx \right]$$

$$c_{m,LE} = \frac{1}{c^2} \left[\int_0^c (c_{p,u} - c_{p,e}) x dx - \int_0^c \left(c_{f,u} \frac{dy_u}{dx} + c_{f,e} \frac{dy_e}{dx} \right) x dx + \right.$$

$$\left. \int_0^c \left(c_{p,u} \frac{dy_u}{dx} + c_{f,u} \right) y_u dx + \int_0^c \left(-c_{p,e} \frac{dy_e}{dx} + c_{f,e} \right) y_e dx \right]$$

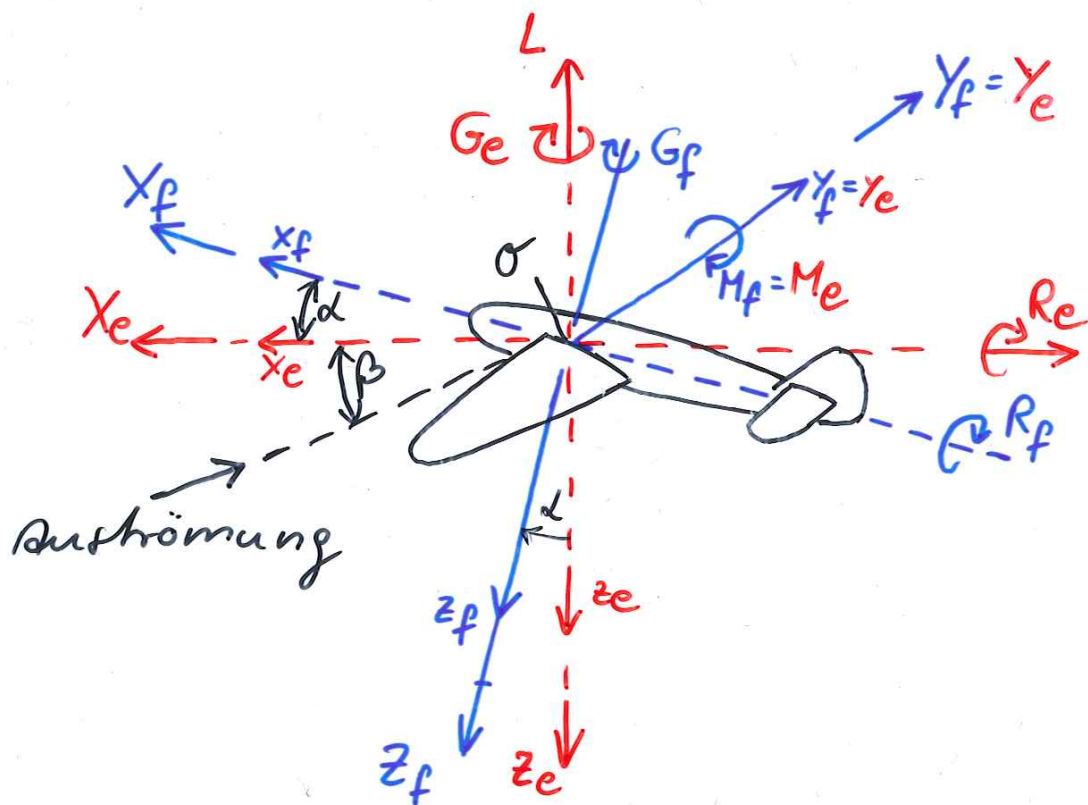
$$\Rightarrow c_l = c_n \cos d - c_a \sin d$$

$$c_d = c_n \sin d + c_a \cos d$$

im 3D-Fall anwendbar, aber analog! ▽

flugmechan. Bezeichnung. (LN 9300)

Index : f flugtaugfestes System
 c experimentelles System



x_f -Achse : Axialkr. X_f , Rollmoment R_f
 y_f -Achse : Seitenkr. Y_f , Nickmoment M_f
 z_f -Achse : Normalkr. Z_f , Giermoment G_f

x_e -Achse: Axialkr. X_e , Rollmoment R_e
 y_e -Achse: Seitenkr. Y_e , Nickmoment M_e
 z_e -Achse: Normalkr. Z_e , Giermoment G_e

für $\beta = 0$ gilt:

$$L = -z_e, \quad D = -x_e$$

Umrechnung $f \leftrightarrow e$:

$$X_f = X_e \cos d - Z_e \sin d$$

$$X_e = X_f \cos d + Z_f \sin d$$

$$Y_f = Y_e$$

$$Y_e = Y_f$$

$$Z_f = Z_e \cos d + X_e \sin d$$

$$Z_e = Z_f \cos d - X_f \sin d$$

$$R_f = R_e \cos d - G_e \sin d$$

$$R_e = R_f \cos d + G_f \sin d$$

$$M_f = M_e$$

$$M_e = M_f$$

$$G_f = G_e \cos d - R_e \sin d$$

$$G_e = G_f \cos d - R_f \sin d$$

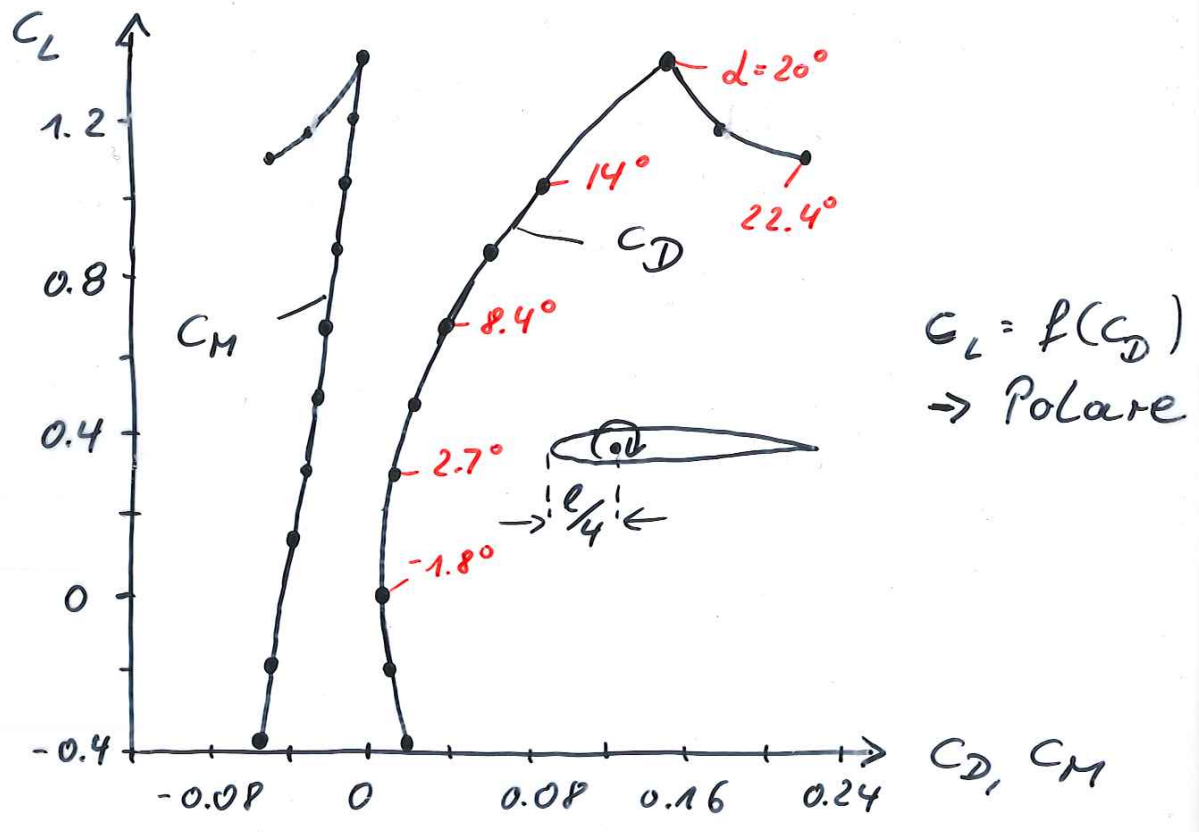
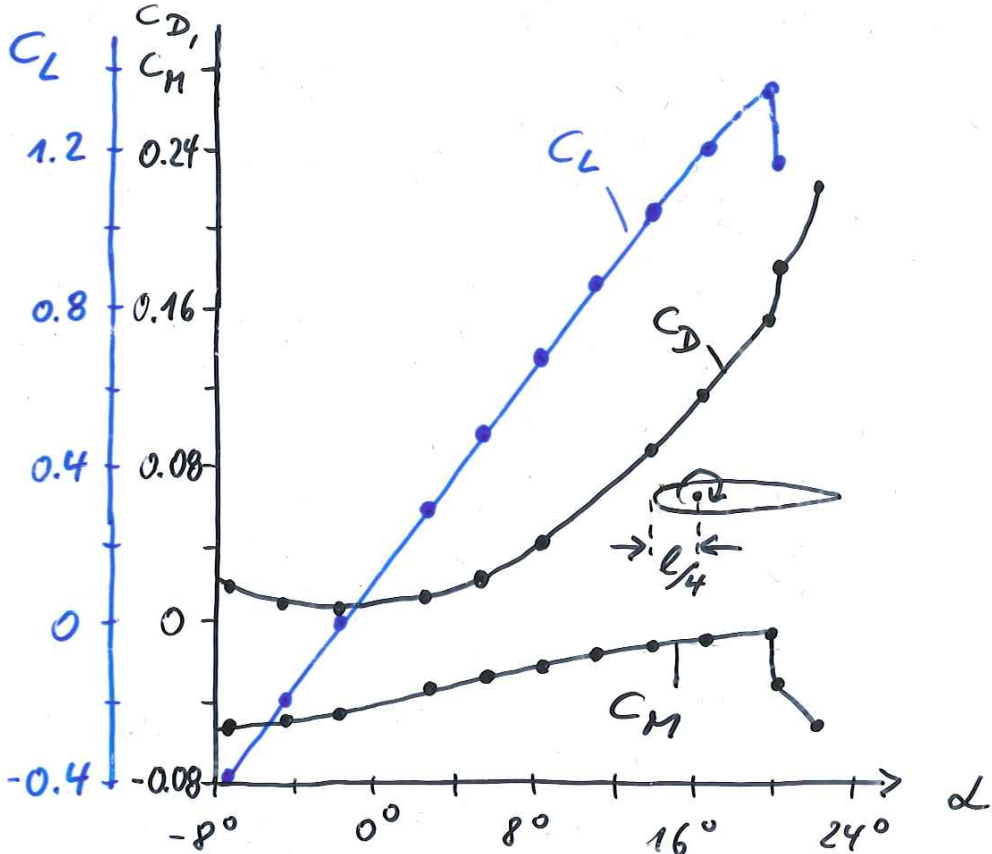
Beiwerte:

$$C_L = \frac{L}{900 F}, \quad C_D = \frac{D}{900 F}, \quad C_X = \frac{X}{900 F}, \quad C_Y = \frac{Y}{900 F}$$

$$C_Z = \frac{Z}{900 F}$$

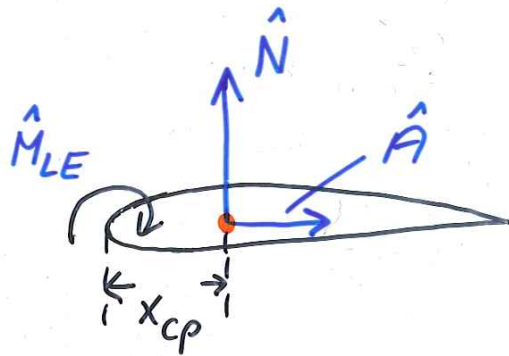
$$C_R = \frac{R}{900 F_s}, \quad C_M = \frac{M}{900 F_e}, \quad C_G = \frac{G}{900 F_s}$$

Rechteckflügel, $\Lambda = 5$, NACA 2412,
 $M_\infty = 0.15$, $Re = 2.7 \cdot 10^6$, $\beta = 0$, $c/4$



Bewegungen des Flugzeugs

Kraftangriffspunkt ?



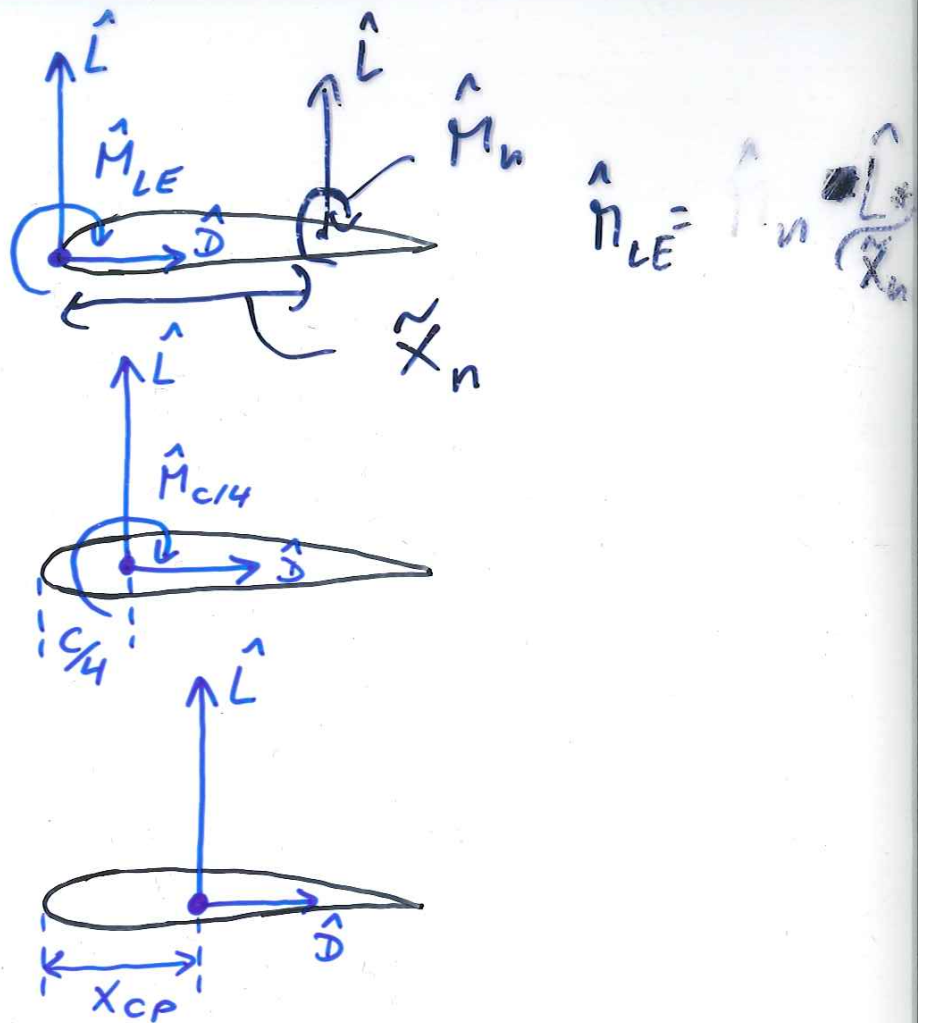
$$\hat{M}_{LE} = -x_{cp} \hat{N} \quad \rightarrow \quad x_{cp} = -\frac{\hat{M}_{LE}}{\hat{N}}$$

x_{cp} : Druckpunkt (\rightarrow Angriffspkt. d. Resultierenden)

$x_{cp} \hat{=}$ Stelle, für die d. aerodyn. Moment verschwindet

$$\alpha \text{ klein} \Rightarrow x_{cp} \approx -\frac{\hat{M}_{LE}}{\hat{L}} ; x_{cp} = f(\alpha, \hat{L})$$

allg. Mechanik: Result. in belieb. Pkt.,
sofern Moment um
diesen Pkt. bekannt!

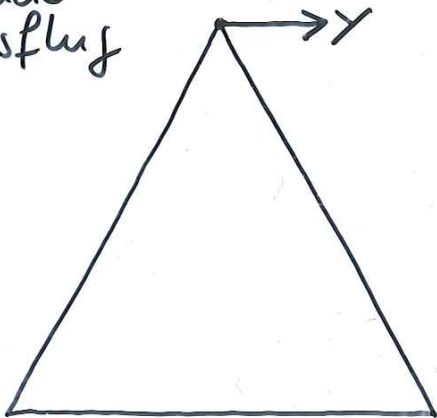


$$\hat{M}_{LE} = -x_{cp} \hat{L} = -\frac{c}{4} \hat{L} + \hat{M}_{c/4}$$

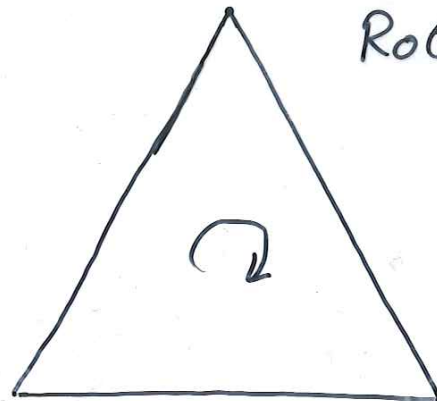
Bewegungszustand eines Tragflügels:

Translations- u. Drehgeschw. f. die
6 Freiheitsgrade

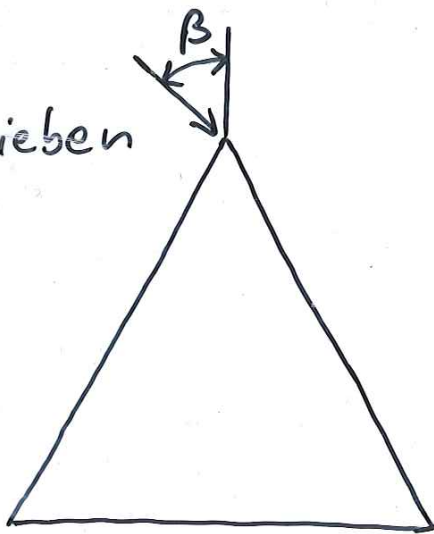
Gerade =
ausflug



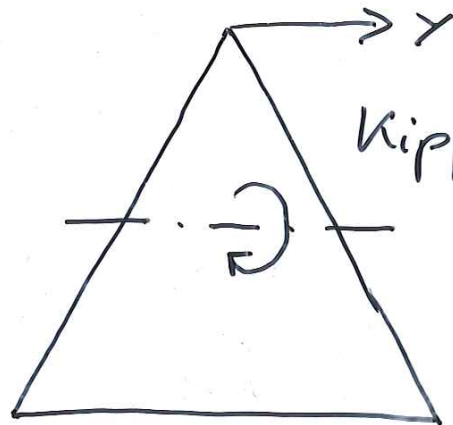
Rollen



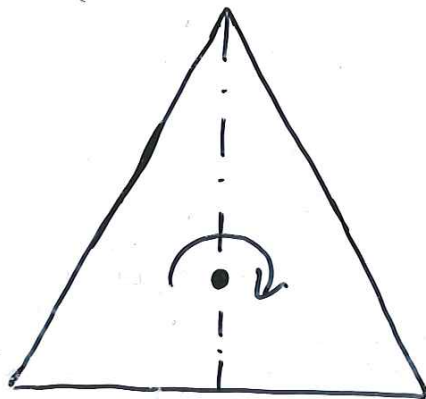
schiefen



Kippen



Gieren



Längsbewegung:

x-, z- Geschw.
Nickenbeweg.

Seitenbewegung:

y- Geschw.
Roll- u. Gierbeweg.

stationäre Gradenausflug

siehe NACA 2412

d_0 : Nullauftriebswinkel

$\frac{dc_L}{d\alpha}$: Auftriebsanstieg, α klein

$$C_L = (\alpha - d_0) \frac{dc_L}{d\alpha}$$

C_{D0} : Profilwiderstand

$$C_D = C_{D0} + k_2 C_L^2 \quad (\text{symmetr. Profile})$$

$$C_D = C_{D0} + k_1 C_L + k_2 C_L^2 \quad (\text{allgemein})$$

$$k_1, k_2 = f(\text{Geometrie})$$

C_{M0} : Nullmomentenbeiwert

$\frac{dC_M}{dC_L}$: Nickmomentenanstieg = $f(\text{Bezugspkt})$

$$C_M = C_{M0} + C_L \frac{dC_M}{dC_L}$$

stationäre Schiebeflug

$$\beta \neq 0$$

- Schiebeseitenkraft in y -Richtung. C_Y
- Schieberollmoment C_R
- Schiebepiermoment C_G

$C_Y, C_R, C_G \approx$ linear in β !

Drehbewegungen

dimensionslose Winkelgeschw. $\Omega_{x,y,z}$

$$\Omega_x = \frac{\omega_x s}{u_\infty}, \quad \Omega_y = \frac{\omega_y l}{u_\infty}, \quad \Omega_z = \frac{\omega_z s}{u_\infty}$$

Rollbewegung \Rightarrow α -Änderg. \Rightarrow Änderg. v. \vec{F}
 \Rightarrow Rollpiermoment

$$\frac{\partial C_R}{\partial \Omega_x}, \quad \frac{\partial C_G}{\partial \Omega_x}$$

Gierbewegung \Rightarrow Änderung d. Längsgeschw.

\Rightarrow Gierrollmoment

$$\frac{\partial C_R}{\partial \Omega_z} \quad , \quad \frac{\partial C_G}{\partial \Omega_z}$$

Nickbewegung \Rightarrow Änderung v. α , Auftrieb

$$\frac{\partial C_L}{\partial \Omega_y} \quad , \quad \frac{\partial C_M}{\partial \Omega_y}$$

Bemerkg.: Instat. Beweise wurden
nicht diskutiert!

Inkompressible Strömung über Profile

Konforme Abbildung

Panelverfahren

- Tropfen-theorie
- Skelett-Theorie
- Profile endl. Dicke mit Auftrieb

Inkompressible Strömung über
Tragflügel unendlicher Spannweite

→ Profiltheorie

Konforme Abbildung

→ exakte Lösung,
jedoch nur 2D

Singularitätenverfahren

→ Näherungslösungen,
aber 3D-Ström.

Konforme Abbildung

bisher indirekte Analyse d. Strömung

Vorgabe v. El. Strom \Rightarrow Strömungsfeld

Umkehrg. [Strömungsfeld \rightarrow El. Strom]
ist praxisorientierter

Konforme Abbildung

allgemein:

Ausgangsebene $\xrightarrow{f(z)}$ Abbildungsebene
(z-Ebene) ! gleiche Winkel! (y-Ebene)

Abbildungsfunktion $f(z)$

$$f(z) = f(x+iy) = f = f(x,y) + i g(x,y)$$

Bsp.:

$$f(z) = \frac{1}{2} z^2$$

$$\Rightarrow f = \frac{1}{2} (x^2 - y^2), \quad g = xy$$

Komplexe Strömfkt. = Potentiälfkt. +
 i Stromfkt.
 $= \phi + i\psi$

$\phi \perp \psi$ in z - bzw. f -Ebene

Aufgabe: Für d. Strög. um d. Geometrie
 B in d. f -Ebene wird
 $f(z)$ gesucht, die bekannte
Kontr. A d. z -Ebene auf
 B abbildet.

Geschw.feld d. f -Ebene

$$w_f(f) = \frac{dF}{df} = \frac{dF}{dz} \frac{dz}{df} = w_z(z) \frac{dz}{df}$$

Bezugsströg.: Kreiszyklinder umströg.,
denn

Abbildg. zw. einfach zusammenh.
hängenden Gebieten und einem
Kreis (fast) immer möglich
[Riemannsche Abbildungssatz]

Parallel angeströmte Platte

z -Ebene : Kreiszylinder

ζ -Ebene : Platte

$$F(z) = u_{\infty} \left(z + \frac{a^2}{z} \right)$$

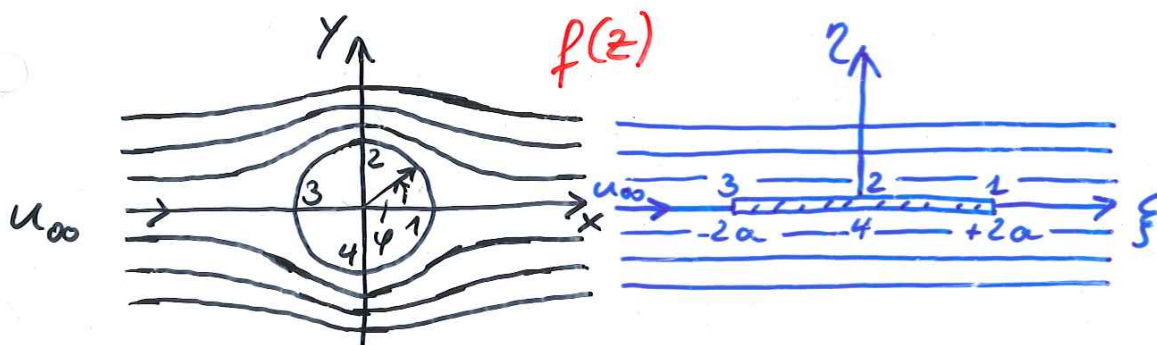
$$\zeta = f(z) = z + \frac{a^2}{z}$$

(Zukhovskij'sche
Abbildfkt.)

$$z = a e^{i\varphi}$$

$$\zeta = a (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) = 2a \cos \varphi$$

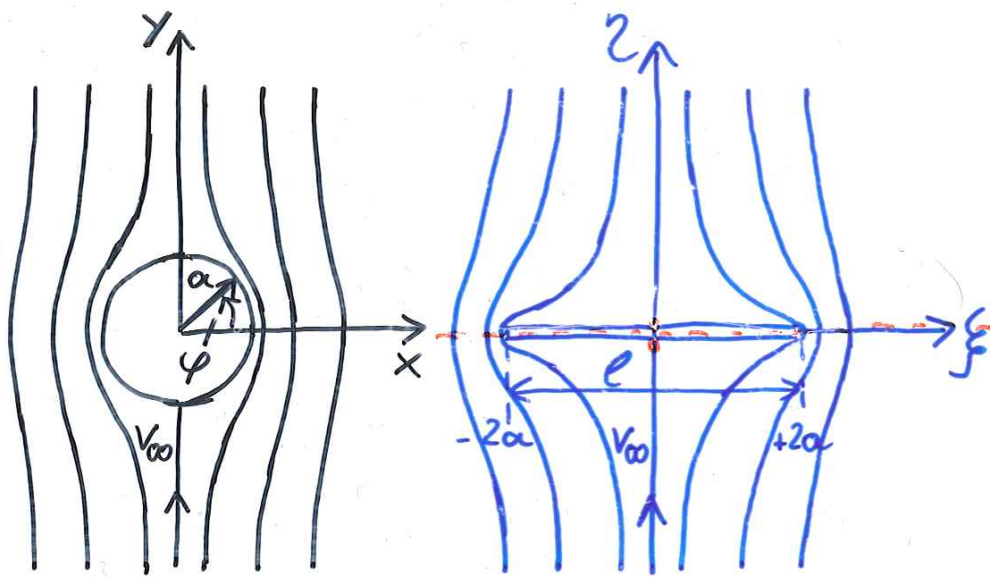
$$\Rightarrow \zeta = 2a \cos \varphi, \quad z = 0$$



$$F(z) = u_{\infty} \left(z + \frac{a^2}{z} \right)$$

$$F(\zeta) = u_{\infty} \zeta$$

Senkrecht angeströmte Platte



$$F(z) = i v_{\infty} \left(-z + \frac{a^2}{z} \right)$$

$$w_z = \frac{dF}{dz} = -i v_{\infty} \left(1 + \frac{a^2}{z^2} \right)$$

$$f = f(z) = z + \frac{a^2}{z}, \quad \frac{df}{dz} = \frac{z^2 - a^2}{z^2}$$

$$w_f = w_z \frac{1}{df/dz} = -i v_{\infty} \frac{z^2 + a^2}{z^2 - a^2}$$

$$\frac{z^2 - a^2}{z} = \pm \sqrt{f^2 - 4a^2}$$

$$\Rightarrow w_f = \pm i v_{\infty} \frac{f}{\sqrt{f^2 - 4a^2}}$$

$$\xi = 0 : w_\xi = 0$$

$$\xi = \pm 2a : w_\xi \rightarrow \infty$$

$$\eta = 0 \text{ Ebene} : \xi = \xi, \quad a = \ell/4$$

$$u - iv = \pm i v_\infty \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - (\ell/2)^2}}$$

unterseite

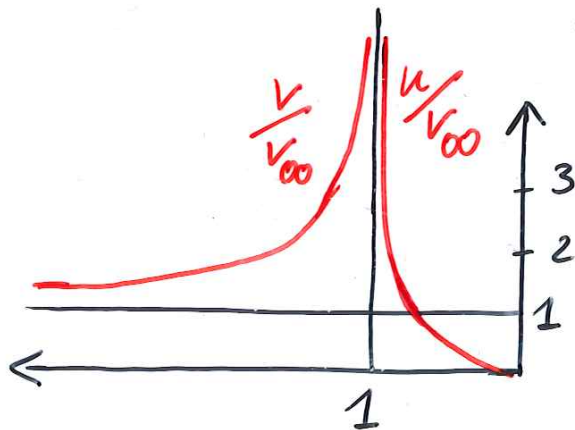
$$0 < |\xi| < \ell/2 :$$

$$u = \begin{matrix} \oplus \\ \ominus \end{matrix} v_\infty \frac{\xi}{\sqrt{(\ell/2)^2 - \xi^2}}$$

oberseite

$$|\xi| > \ell/2 :$$

$$v = v_\infty \frac{|\xi|}{\sqrt{\xi^2 - (\ell/2)^2}}$$



$\eta = 0 !!$

angestellte ebene Platte mit Auftrieb

→ einfachste Form d. Tragfl. strög.

längsangestr. Platte

$$F_1(z) = u_{\infty} \left(z + \frac{a^2}{z} \right)$$

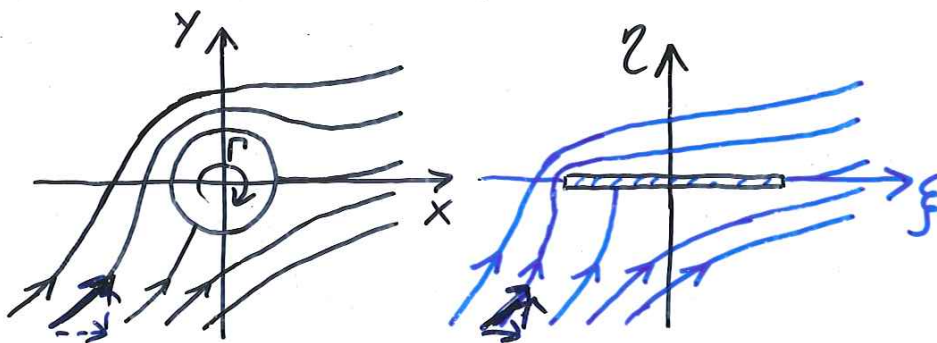
⊥ angestr. Platte

$$F_2(z) = -iv_{\infty} \left(z - \frac{a^2}{z} \right)$$

Potentialwirbel

$$F_3(z) = \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z$$

$$\Rightarrow F(z) = (u_{\infty} - iv_{\infty})z + (u_{\infty} + iv_{\infty})\frac{a^2}{z} + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z$$



$$w_z(z) = \frac{dF}{dz} = (u_{\infty} - iv_{\infty}) - (u_{\infty} + iv_{\infty})\frac{a^2}{z^2} + \frac{i\Gamma}{2\pi} \frac{1}{z}$$

$$\zeta = z + \frac{a^2}{z}, \quad \frac{d\zeta}{dz} = \frac{z^2 - a^2}{z^2}, \quad w_{\zeta} = w_z \frac{z^2}{z^2 - a^2}$$

$$w_{\zeta} = u_{\infty} - iv_{\infty} \frac{z^2 + a^2}{z^2 - a^2} + \frac{i\Gamma}{2\pi} \frac{z}{z^2 - a^2}$$

$$W_f (f \rightarrow \infty) = W_z (z \rightarrow \infty) = u_{\infty} - i v_{\infty}$$

$$\frac{z^2 + a^2}{z^2 - a^2} = \pm \frac{f}{\sqrt{f^2 - 4a^2}} \quad , \quad \frac{z}{a^2 - z^2} = \pm \frac{1}{\sqrt{f^2 - 4a^2}}$$

$$W_f (f) = u_{\infty} \mp i \frac{v_{\infty} f - \frac{\Gamma}{2\pi}}{\sqrt{f^2 - 4a^2}}$$

Kutta-Beding. bei $f = 2a \Rightarrow \Gamma = 4\pi a v_{\infty} = \pi l v_{\infty}$

$$\Rightarrow W_f (f) = u_{\infty} \mp i v_{\infty} \sqrt{\frac{f - l/2}{f + l/2}}$$

$\eta = 0$
 $\zeta = 0$: $f = \xi$ und $|\xi| \leq l/2$ (Platte)

$$u = u_{\infty} \pm v_{\infty} \sqrt{\frac{l - 2\xi}{l + 2\xi}} \quad \begin{array}{l} \text{Obseite} \\ \text{Unterseite} \end{array}$$

result. Geschw.: $W_{\infty}^2 = u_{\infty}^2 + v_{\infty}^2$

Anstellwinkel α : $u_{\infty} = W_{\infty} \cos \alpha$

$v_{\infty} = W_{\infty} \sin \alpha$

$$u = w_{\infty} \left(\cos \alpha \pm \sin \alpha \sqrt{\frac{l-2\xi}{l+2\xi}} \right)$$

Vordrücke $\xi = -\frac{l}{2} : u \rightarrow \infty$

Hindrücke $\xi = \frac{l}{2} : u = w_{\infty} \cos \alpha$

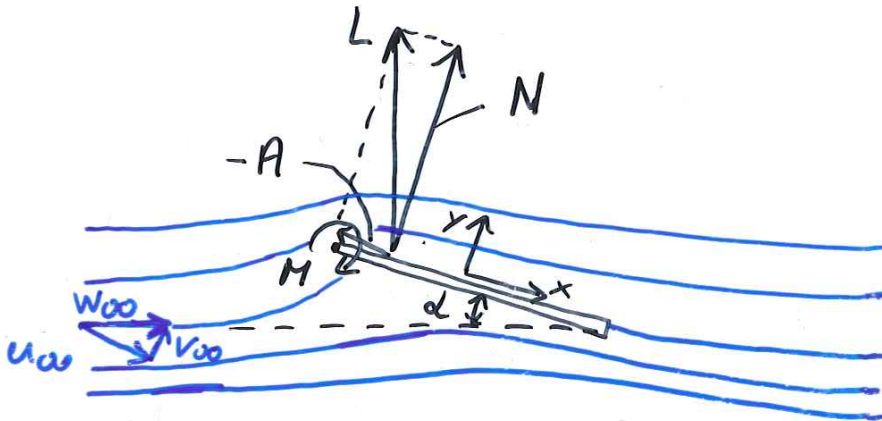
Geschwindigkeitsprung Δu

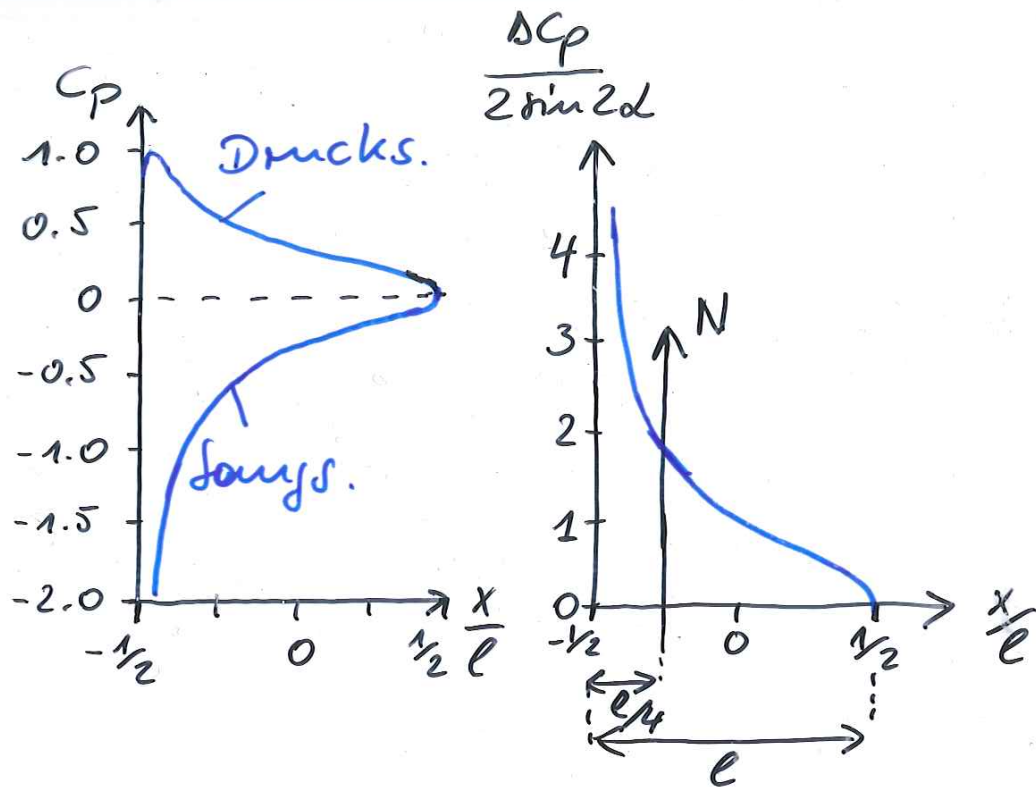
$$\Delta u = u_0 - u_u = 2 w_{\infty} \sin \alpha \sqrt{\frac{l-2\xi}{l+2\xi}}$$

$$\Delta u \left(\xi = \frac{l}{2} \right) = 0$$

Druckbeiwert $c_p = \frac{p - p_{\infty}}{\frac{\rho}{2} w_{\infty}^2} = 1 - \left(\frac{u}{w_{\infty}} \right)^2$

$$\Delta c_p = c_{pu} - c_{p0} = 2 \sin 2\alpha \sqrt{\frac{l-2x}{l+2x}}$$





resultierende Kraft L

$$L = \sqrt{N^2 + A^2}$$

Kutta-Zhukhovskij : $N = \rho b u_{\infty} \Gamma$
 $A = -\rho b v_{\infty} \Gamma$

$$\Gamma = v_{\infty} \pi l$$

$$\Rightarrow A = -\rho \pi b l v_{\infty}^2 \sin^2 \alpha$$

$$N = \rho \pi b l v_{\infty}^2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\Rightarrow L = \rho \pi b l v_{\infty}^2 \sin \alpha$$

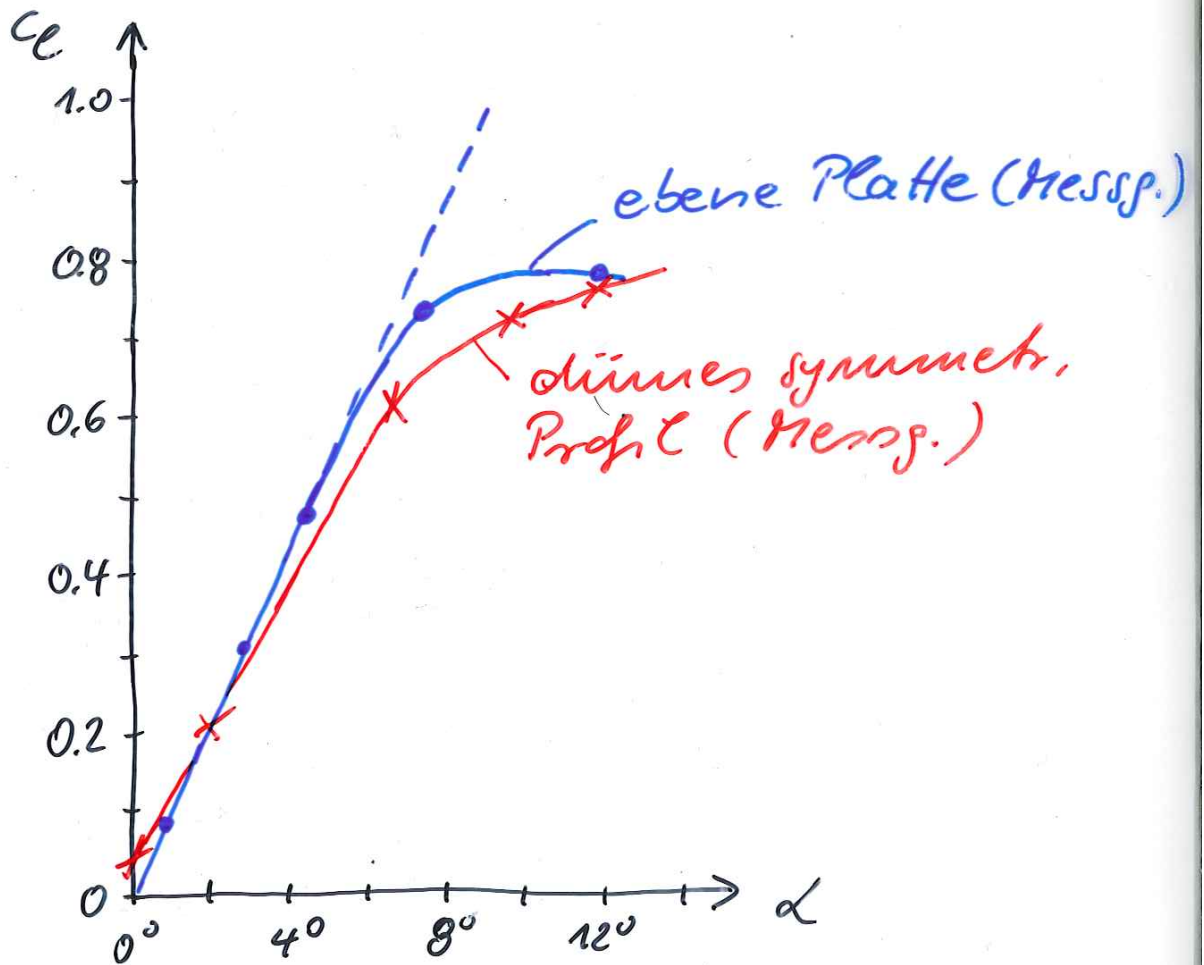
Auftriebskoeffizient $c_e = \frac{L}{\rho \cdot l \cdot b}$

$$c_e = 2\pi \sin \alpha$$

bzw.

$$c_e = 2\pi \alpha, \quad \frac{dc_e}{d\alpha} = 2\pi$$

Bemerkg.: gültig f. schlanke Profile
mit geringer Wölbgs.



Momentenberechnung

Koordinatensystem $\tilde{x} = x + \frac{l}{2}$

$$dM = - \left(x + \frac{l}{2}\right) dN \quad \curvearrowright +$$

$$dN = \rho b u_{\infty} d\Gamma$$

$$d\Gamma = (u_0 - u_n) dx$$

$$\Rightarrow dN = 2 \rho b u_{\infty} v_{\infty} \sqrt{\frac{l-2x}{l+2x}} dx$$

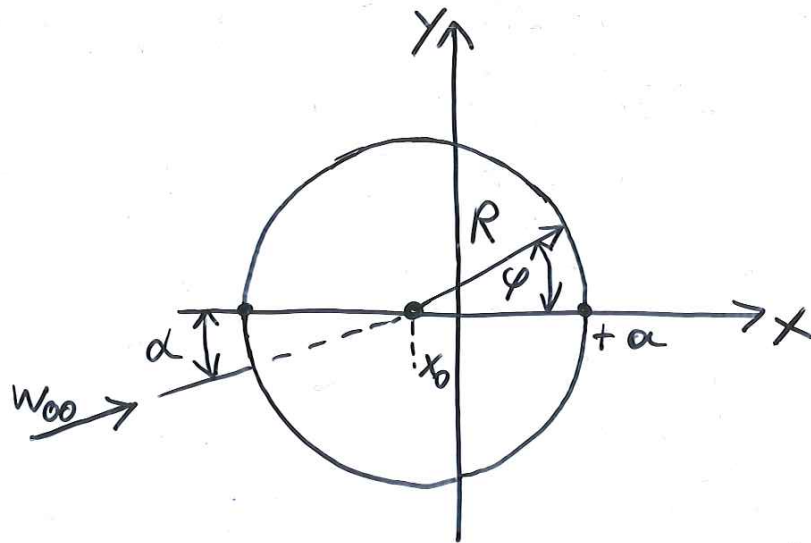
$$\Rightarrow M = - \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left(x + \frac{l}{2}\right) 2 \rho b u_{\infty} v_{\infty} \sqrt{\frac{l-2x}{l+2x}} dx$$

$$M = -\frac{1}{4} \rho b \pi l^2 u_{\infty}^2 \sin d \cos d = -\frac{l}{4} N$$

$$C_m = \frac{M}{\rho l^2 u_{\infty}^2} = -\frac{\pi}{2} \sin d \cos d = -\frac{\pi}{4} \sin(2d)$$

d klein $\Rightarrow \frac{C_m}{C_e} = -\frac{1}{4}$

Symmetrisches Zhukovskij-Profil

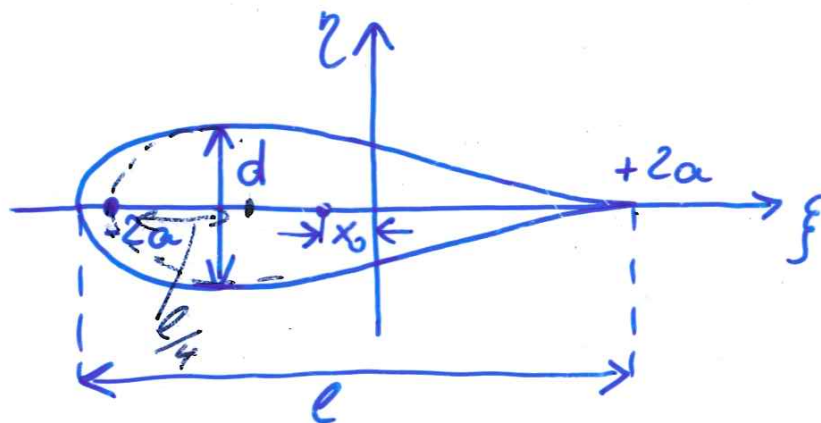


Abbildungsfkt. $f = f(z) = z + \frac{a^2}{z}$

$$z = -x_0 + R e^{i\varphi}, \quad R = a + x_0 = a(1 + \varepsilon_2)$$

$$\Rightarrow \frac{\xi}{a} = [(1 + \varepsilon_2) \cos \varphi - \varepsilon_2] \left[1 + \frac{1}{1 + 2\varepsilon_2(1 + \varepsilon_2)(1 - \cos \varphi)} \right]$$

$$\frac{\zeta}{a} = (1 + \varepsilon_2) \sin \varphi \left[1 - \frac{1}{1 + 2\varepsilon_2(1 + \varepsilon_2)(1 - \cos \varphi)} \right]$$



schlankes Profil: $\varepsilon_2^2 \ll 1$

$$\frac{f}{a} = 2(\cos \varphi - \varepsilon_2 \sin^2 \varphi)$$

$$\frac{z}{a} = 2\varepsilon_2 \sin \varphi (1 - \cos \varphi)$$

$$\varepsilon_2 \ll 1 \Rightarrow l \rightarrow 4a, \quad \frac{d}{l} \rightarrow \frac{3}{4} \sqrt{3} \varepsilon_2$$

max. Dicke: $\varphi = 120^\circ$, $\frac{1}{4}$ -Linie

Zhukhovskij - Tropfen

$$\frac{z}{l} = \frac{1}{2} \varepsilon_2 (1 - 2 \frac{f}{l}) \sqrt{1 - 4(\frac{f}{l})^2}$$

I. Blasius'sche Formel

$$C_l = \frac{L}{l \rho_{\frac{1}{2}} W_{\infty}^2} \quad \downarrow \quad = \quad 8\pi \frac{R}{l} \sin(\alpha + \beta)$$

β : Nullauftriebswinkel ($\beta = 0$, symmetr. Profil)

$$C_l = 8\pi \frac{R}{a} \frac{a}{l} \sin \alpha = 2\pi (1 + \varepsilon_2) \sin \alpha$$

$$C_l = 2\pi (1 + 0.77 \frac{d}{l}) \sin \alpha$$

II. Blasius'sche Formel \Rightarrow

$$C_m = \frac{\pi}{4} \sin 2\alpha \approx \frac{\pi}{2} \sin \alpha \quad \text{für } \xi = -x_0$$

Momentenvergleichswert $\text{um } \xi = -x_0$

$$\Rightarrow \frac{s}{l} = -\frac{C_m}{C_l} = -\frac{1}{4} \frac{1}{1+\epsilon_2} \approx -\frac{1}{4} (1-\epsilon_2)$$

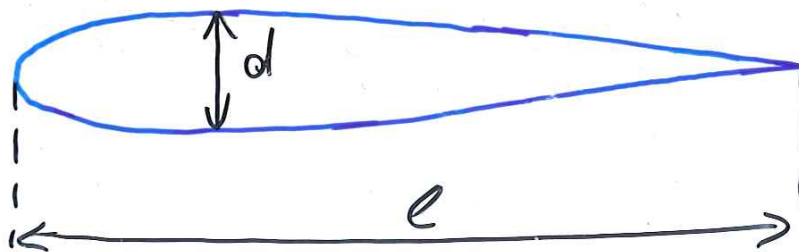
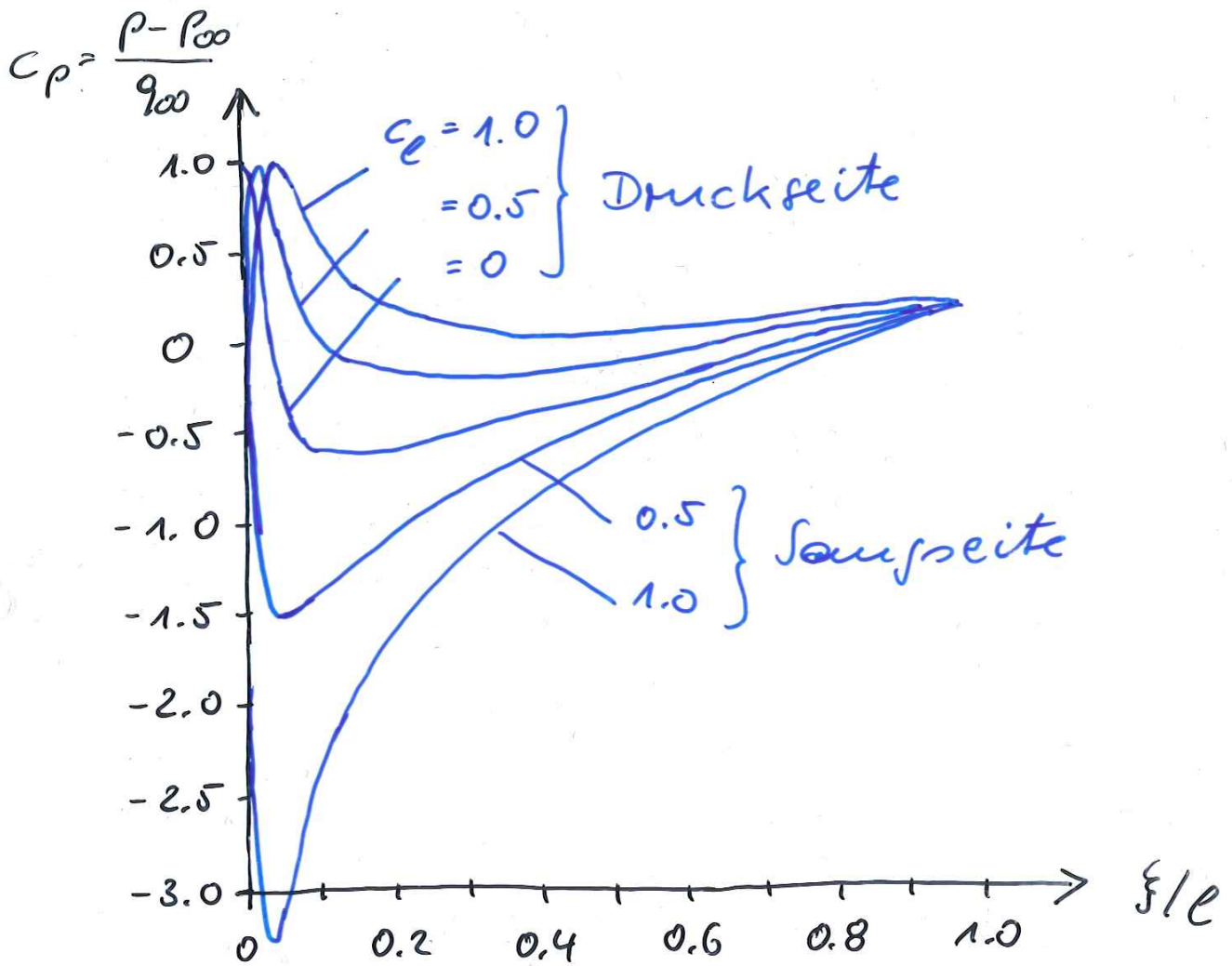
$l/4$ gemessen von $\xi = -x_0$ aus

$$x_0 = \epsilon_2 \frac{l}{4} \Rightarrow x_{cp} : \frac{l}{4} \text{ Stromab v. Prof.nase}$$

Geschwindigkeit auf d. Kontur

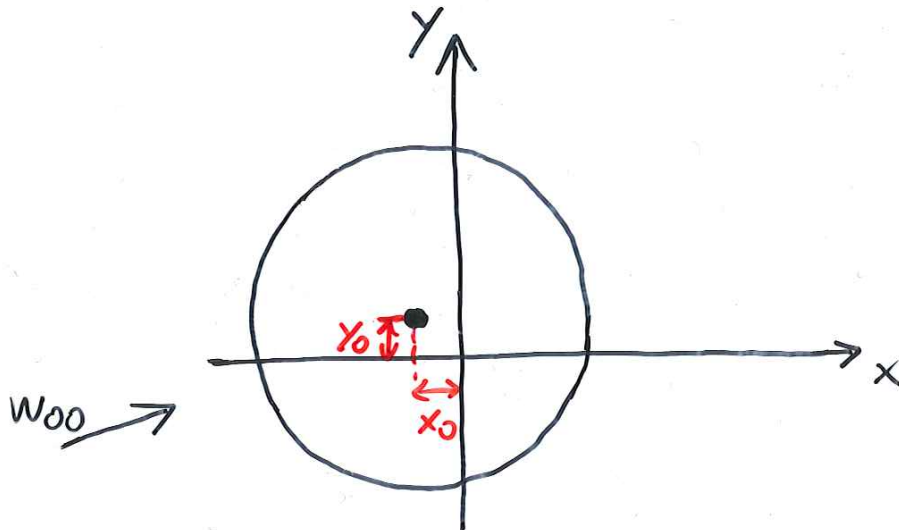
$$w_{\xi, \kappa} = w_{z, \kappa} \left. \frac{dz}{d\xi} \right|_{\kappa}$$

$$\Rightarrow w_{\kappa} = w_{\infty} [\sin(\varphi - \alpha) + \sin \alpha] \frac{1 + 2\epsilon_2(1 + \epsilon_2)(1 - \cos \varphi)}{(1 + \epsilon_2) \sqrt{\epsilon_2^2(1 - \cos \varphi)^2 + \sin^2 \varphi}}$$

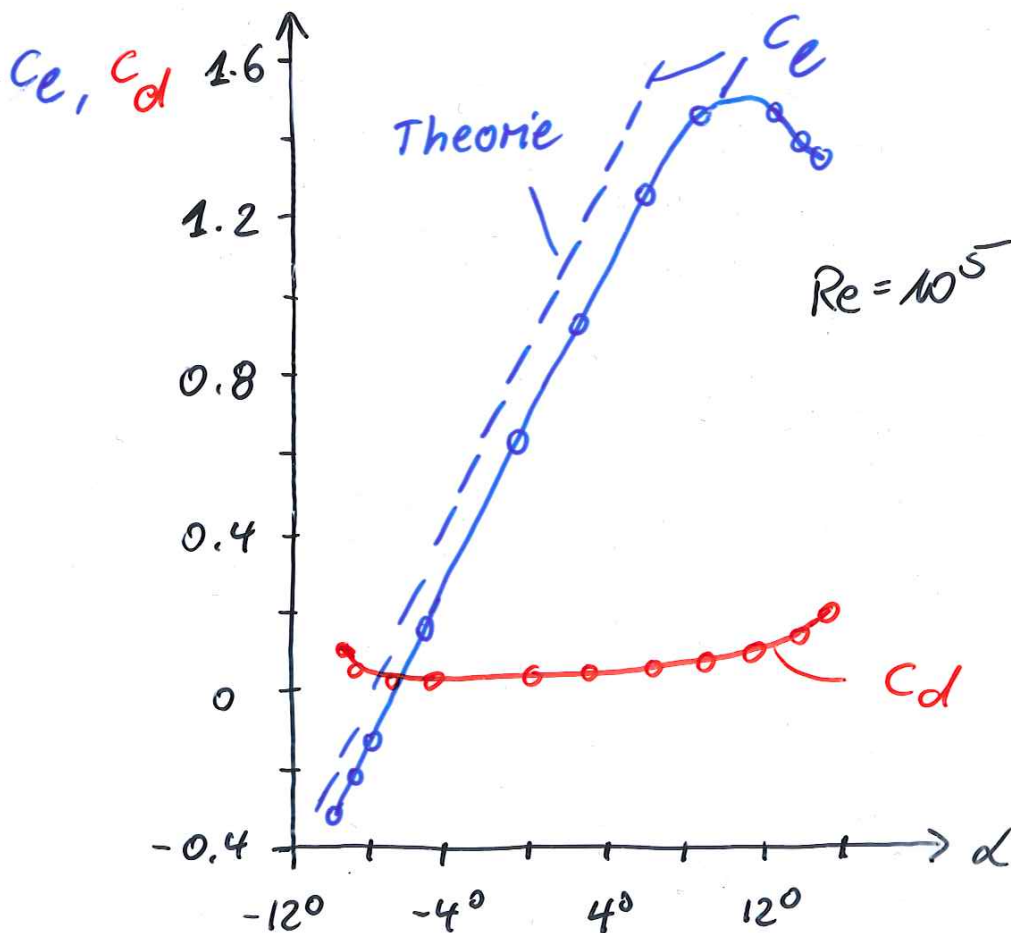


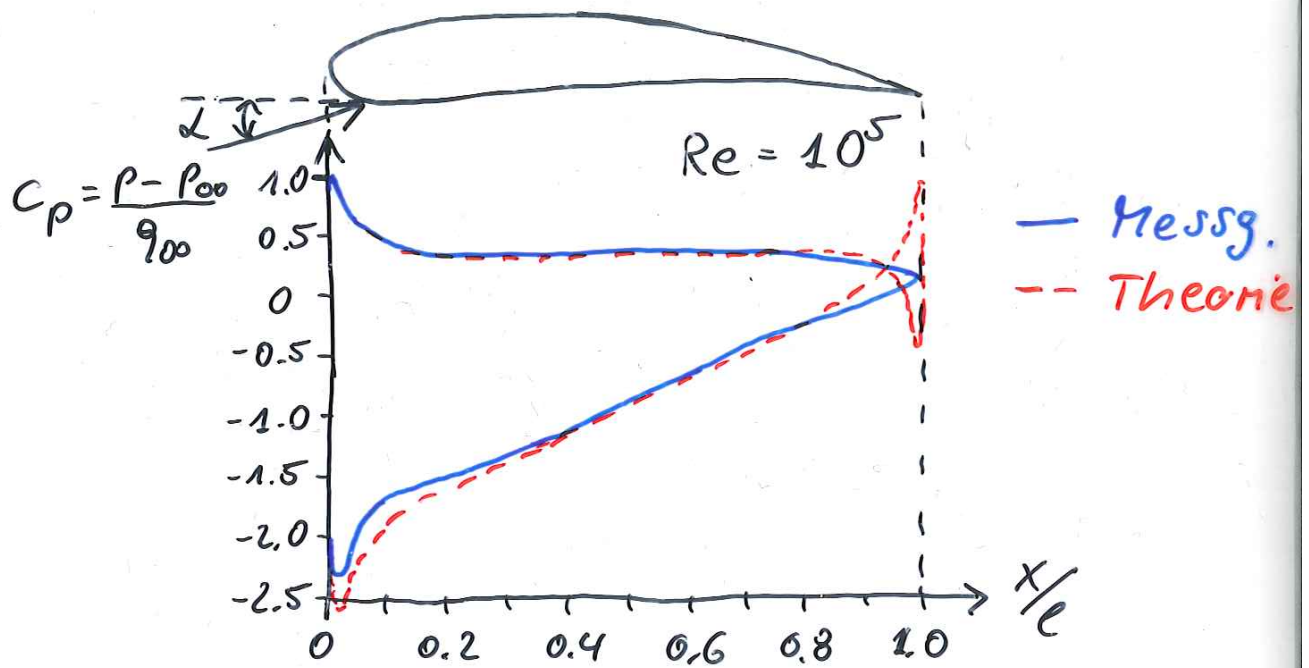
symmetr. Zhukhovskij Profil, $\frac{d}{l} = 0.18$

zentrum d. Bildkreises versetzt
in x - u. y - Richtung.



⇒ gewölbtes Zhukovskij Profil in
der f -Ebene





neue Abb.fktn. \Rightarrow and. Prof.fam.

Nachteile d. konf. Abbildg.

- Bestg. d. Abb.fktn. aus Prof.kontur schwierig
- nur für 2D-Probleme gültig

\Rightarrow Notwendigkeit d. Panelverfahren

Panclverfahren

Bestimmung d. drehungsfreien Strömung über einen beliebigen Körper

bekannt: Elementarströme.
⇒ Konturstromlinie

neue Methode: Konturvorgabe
⇒ Elementarströme. ?

Ermittlung d. Singularitäten:
Verteilung mit Rechnern!

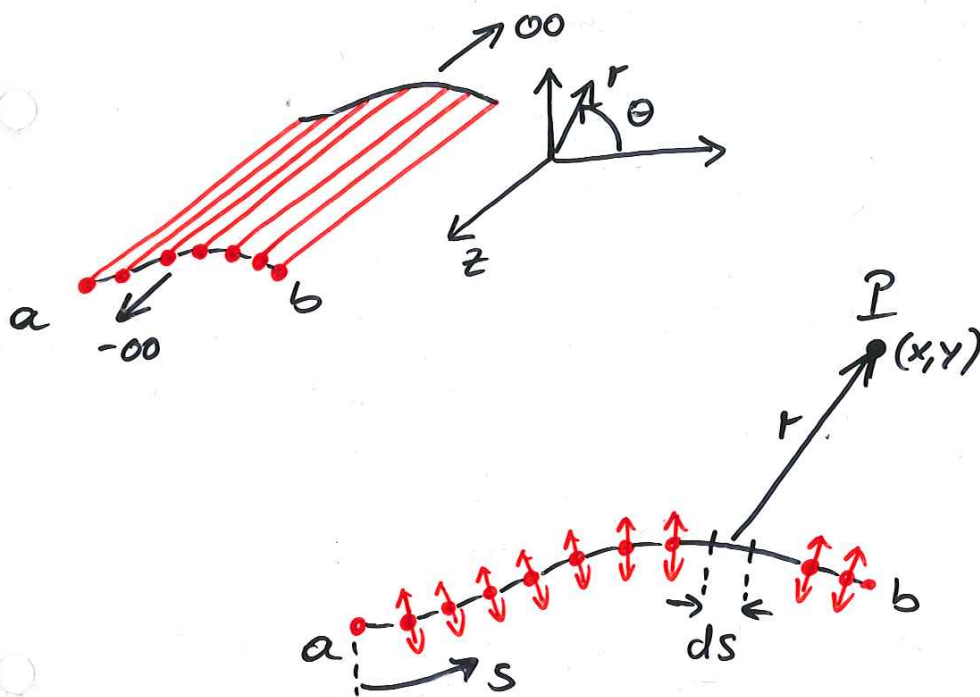
Vorgehensweise f. Tropfentheorie

- grundlegende Begriffe
- Darstellg. für ein symmetr. Profil
- Beispiel für Zylinderumströmung

Tropfentheorie

Punktquelle \rightarrow "Schlitzquelle"

Anordnung unendl. vieler Quellen
mit infinitesimalen Quellenstärke



$\lambda(s)$: Ergiebigkeit pro Einheitslänge

$\lambda(s) ds$ Ergiebigkeit von ds

infinites. Pot. $d\phi$ in P durch ds

$$d\phi = \frac{\ln r}{2\pi} \lambda ds$$

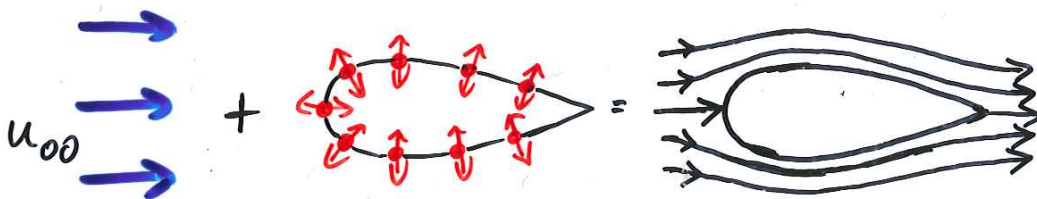
Integration

$$\phi(x, y) = \int_a^b \frac{\ln r}{2\pi} \lambda \, ds$$

Grundlegende Idee:

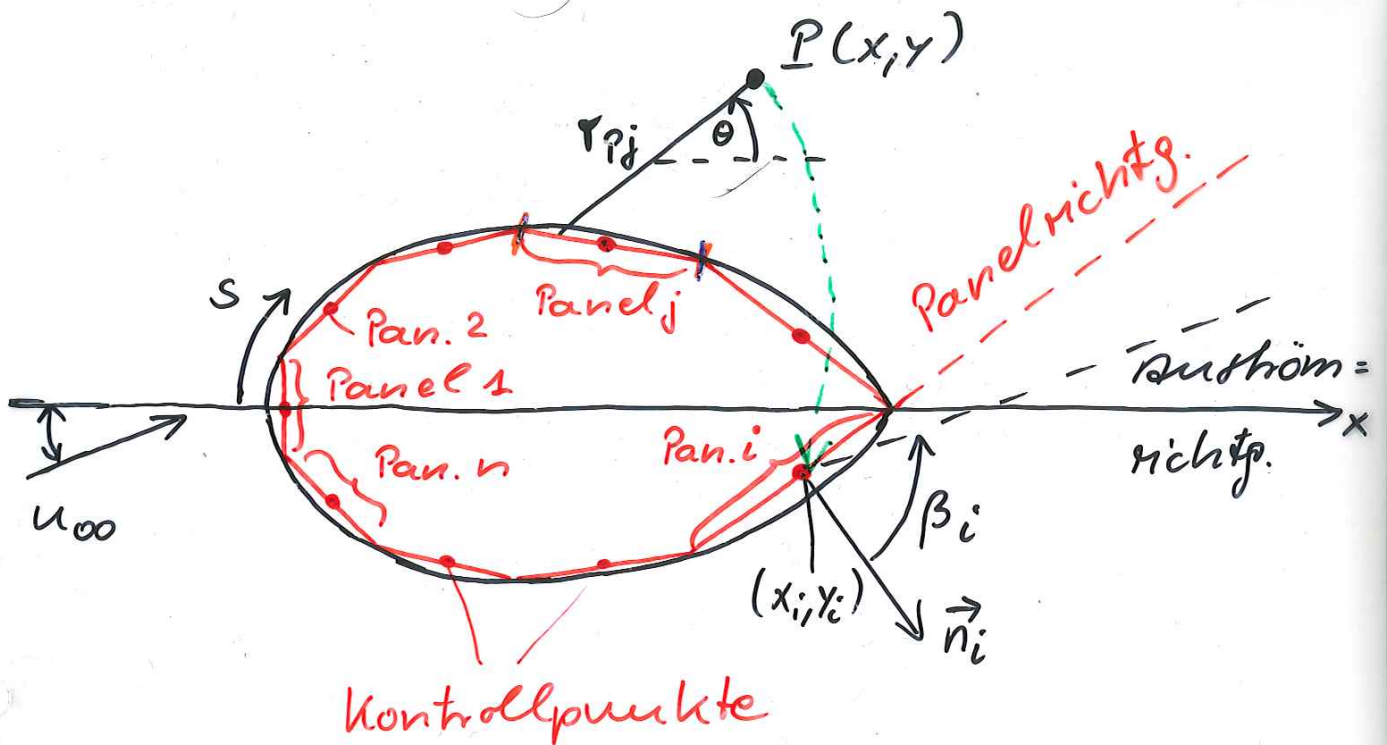
Oberfläche d. Körpers ist eine
Quellenfläche;

Bestr. v. $\lambda(s)$, daß Kontur eine
Stromlinie' wird.



Konzept: • Quellenfläche durch
Polygonzüge \rightarrow Panels

- $\lambda_j = \text{konst}$ für Panel j
- $\lambda_j \neq \lambda_i$ für $i \neq j$



n Panels mit (bis zu) $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$
 Bestp. v. λ_j , so daß Kontur \rightarrow Stromlinie
 \Rightarrow Verschwinden d. Normalkomp.
 (kinemat. Randbedingung)

Induktion v. $\Delta\phi_j$ des Panels j in \mathbb{P}

$$\Delta\phi_j = \frac{\lambda_j}{2\pi} \int_j \ln r_{pj} ds_j$$

Berücksichtigung d. übrigen $\lambda_i \quad i=1, 2, \dots, n$

$$\phi(I) = \sum_{j=1}^n \Delta\phi_j = \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_j}{2\pi} \int_j \ln r_{pj} \, ds_j$$

wobei $r_{pj} = \sqrt{(x-x_j)^2 + (y-y_j)^2}$

Punkt I in Kontrollpkt. d. Panels

$$\Rightarrow \phi(x_i, y_i) = \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_j}{2\pi} \int_j \ln r_{ij} \, ds_j$$

$$r_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$$

kinemat. Randbedingung f. Panel i

mit $dy/dx|_i$, \vec{n}_i , $\beta_i \notin (\vec{u}_\infty, \vec{n}_i)$

$$u_{\infty, n} = \vec{u}_\infty \cdot \vec{n}_i = u_\infty \cos \beta_i \quad \text{Norm. Komp. d. Panels i}$$

$$u_n = \frac{\partial \phi(x_i, y_i)}{\partial n}$$

Norm. geschw. durch Quellen = Verteilg. λ_j $j=1, \dots, n$

Beurteilung:

$$\left. \frac{\partial \phi(x_i, y_i)}{\partial n} \right|_{j=i} = \frac{\lambda_i}{2} \Rightarrow$$

$$u_n = \frac{\lambda_i}{2} + \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^n \frac{\lambda_j}{2\pi} \int_j \frac{\partial}{\partial n_i} (\ln r_{ij}) ds_j$$

kinemat. Randbedingung für Panel i

$$u_{\infty, n} + u_n = 0$$

$$\frac{\lambda_i}{2} + \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^n \frac{\lambda_j}{2\pi} \int_j \frac{\partial}{\partial n_i} (\ln r_{ij}) ds_j + \underbrace{u_{\infty, n}}_{u_{\infty, n}} = 0$$

I_{ij}

d. Unbekannten : $\lambda_j \quad j = 1, 2, \dots, n$

entsprechende Gleichun. für alle n Panel

=> lineares (n, n) -Gleichungssystem für λ_j

Bestimmung der tang. Geschw. Komp.

$$u_{\infty, s} = u_{\infty} \sin \beta_i$$

tang. Komp. d. freien Anströms.

$$u_s = \frac{\partial \phi}{\partial s} = \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_j}{2\pi} \int_j \frac{\partial}{\partial s} (\ln r_{ij}) ds_j$$

tang. Komp. durch Induzierung.

Geschw. im i -ten Kontrollpt.

$$u_i = u_{\infty, s} + u_s = u_{\infty} \sin \beta_i + \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_j}{2\pi} \int_j \frac{\partial}{\partial s} (\ln r_{ij}) ds_j$$

$$\Rightarrow c_{p,i} = \frac{p_i - p_{\infty}}{\frac{\rho}{2} u_{\infty}^2} = 1 - \left(\frac{u_i}{u_{\infty}} \right)^2$$

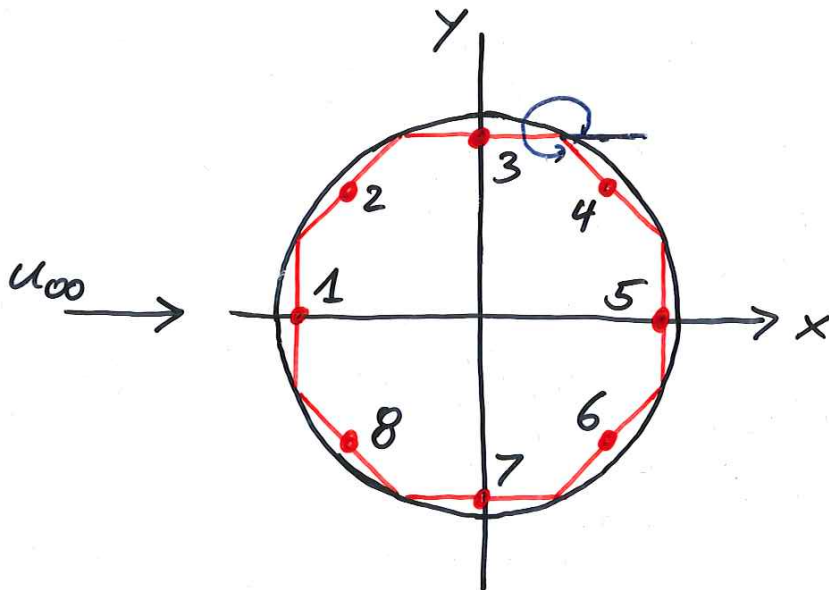
check d. Lösung

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j s_j = 0$$

(geschlossener Körper)

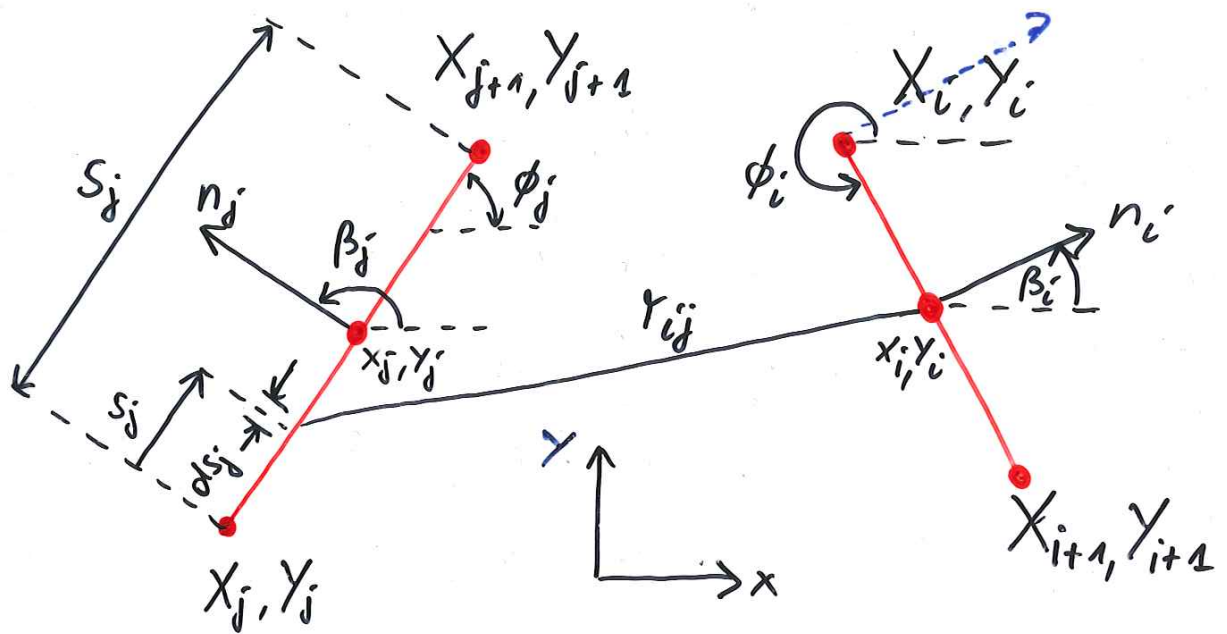
Beispiel

Bestimmung d. Druckverteilung für einen querangestr. Kreiszyl.



Berechnung d. Integrale

$$I_{ij} = \int_j \frac{\partial}{\partial n_i} (\ln r_{ij}) ds_j$$



$$r_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial n_i} (\ln r_{ij}) = \frac{1}{r_{ij}} \frac{\partial r_{ij}}{\partial n_i} =$$

$$\frac{1}{r_{ij}} \frac{2(x_i - x_j) \frac{dx_i}{dn_i} + 2(y_i - y_j) \frac{dy_i}{dn_i}}{2 r_{ij}} =$$

$$\frac{\partial}{\partial n_i} (\ln r_{ij}) = \frac{(x_i - x_j) \cos \beta_i + (y_i - y_j) \sin \beta_i}{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$$

$$\beta_i = \phi_i + \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \sin \beta_i &= \cos \phi_i \\ \cos \beta_i &= -\sin \phi_i \end{aligned}$$

$$x_j = X_j + s_j \cos \phi_j$$

$$y_j = Y_j + s_j \sin \phi_j$$

$$\Rightarrow I_{ij} = \int_0^{s_j} \frac{C s_j + D}{s_j^2 + 2A s_j + B} ds_j$$

mit

$$A = -(x_i - X_j) \cos \phi_j - (y_i - Y_j) \sin \phi_j$$

$$B = (x_i - X_j)^2 + (y_i - Y_j)^2$$

$$C = \sin(\phi_i - \phi_j)$$

$$D = (y_i - Y_j) \cos \phi_i - (x_i - X_j) \sin \phi_i$$

$$s_j = \sqrt{(X_{j+1} - X_j)^2 + (Y_{j+1} - Y_j)^2}$$

Partialbruchzerlegung od. Tab.

$$\Rightarrow \text{mit } E = \sqrt{B-A^2} = (x_i - X_j) \sin \phi_j - (y_i - Y_j) \cos \phi_j$$

$$I_{ij} = \frac{G}{2} \ln \left(\frac{s_j^2 + 2As_j + B}{B} \right) +$$

$$\frac{D-AC}{E} \left(\tan^{-1} \frac{s_j + A}{E} - \tan^{-1} \frac{A}{E} \right)$$

Bemerkg.: I_{ij} f. allg. orient. Panels gültig
 \rightarrow unabhgg. v. Kreiszyylindergeo.

Kreiszyylinder: Panel $i \rightarrow$ Panel 4
mit $R=1$ Panel $j \rightarrow$ Panel 2

$$X_j = -0.9239$$

$$X_{j+1} = -0.3827$$

$$Y_j = 0.3827$$

$$Y_{j+1} = 0.9239$$

$$x_i = 0.6533$$

$$y_j = 0.6533$$

$$\phi_i = 315^\circ$$

$$\phi_j = 45^\circ$$

$$\Rightarrow A = -1.3065$$

$$B = 2.5607$$

$$C = -1$$

$$D = 1.3065$$

$$s_j = 0.7654$$

$$E = 0.9239$$

$$\bar{I}_{ij} = \bar{I}_{42} = 0.4018$$

ebenso:

$$\bar{I}_{41} = 0.4074$$

$$\bar{I}_{43} = 0.3528$$

$$\bar{I}_{45} = 0.3528$$

$$\bar{I}_{46} = 0.4018$$

$$\bar{I}_{47} = 0.4074$$

$$\bar{I}_{48} = 0.4084$$

Gleichg. für Panel 4, $\beta_i = \beta_4 = 45^\circ$

$$0.4074 \lambda_1 + 0.4018 \lambda_2 + 0.3528 \lambda_3 + \pi \lambda_4 + 0.3528 \lambda_5 +$$

$$0.4018 \lambda_6 + 0.4074 \lambda_7 + 0.4084 \lambda_8 = -0.7071 u_{\infty} 2\pi$$

Unbekannte: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_8$

analog für Panel $i = 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8$

\Rightarrow lin. Glrsyst. mit 8 Gln. f. 8 Unbek.!

Lösung: $\tilde{\lambda}_i = \frac{\lambda_i}{2\pi u_{\infty}}$

i	1	2	3	4
$\tilde{\lambda}_i$	0.3765	0.2662	0	-0.2662

i	5	6	7	8
$\tilde{\lambda}_i$	-0.3765	-0.2662	0	0.2662

Bestg. von $u_i \Rightarrow c_p$

$$\int_j \frac{\partial}{\partial s} (\ln r_{ij}) ds_j : ?$$

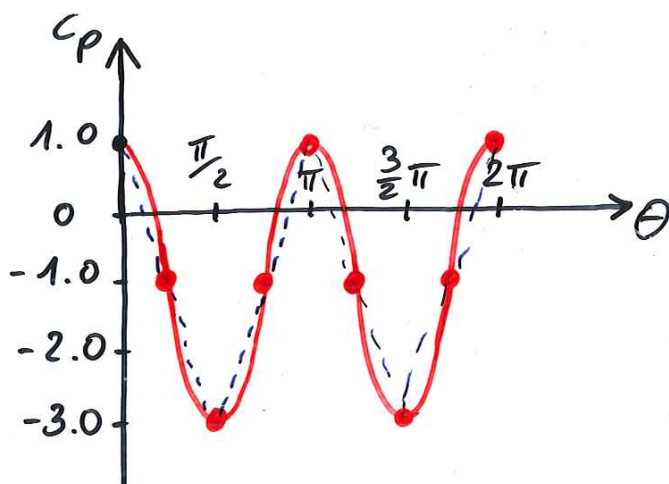
analog zur I_{ij} - Berechnung

$$\int_j \frac{\partial}{\partial s} (\ln r_{ij}) ds_j = \frac{D-AC}{2E} \ln \frac{s_j^2 + 2As_j + B}{B} - G \left(\tan^{-1} \frac{s_j+A}{E} - \tan^{-1} \frac{A}{E} \right)$$

Bestg. von u_i mit $\lambda_j \quad j=1, \dots, 8$

$$u_i = u_\infty \sin \beta_i + \sum_{j=1}^8 \frac{\lambda_j}{2\pi} \int_j \frac{\partial}{\partial s} (\ln r_{ij}) ds_j$$

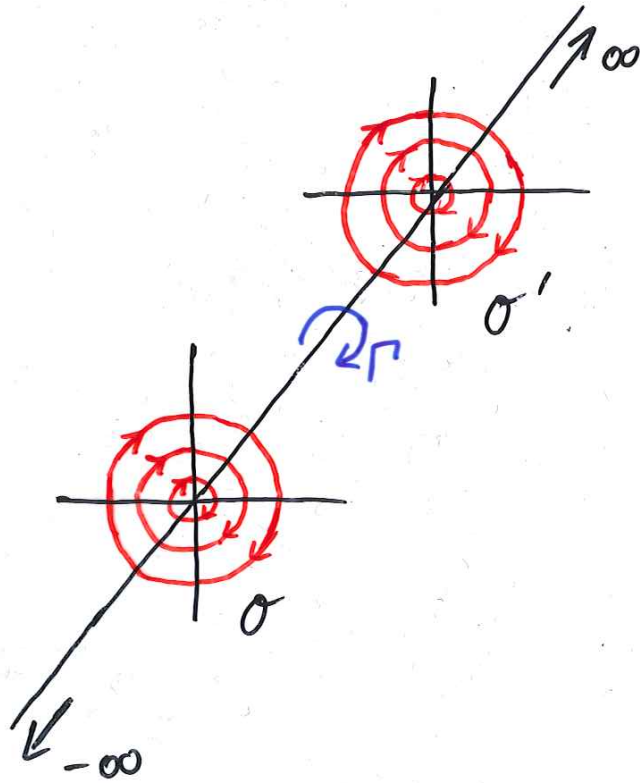
$$c_{p,i} = 1 - \left(\frac{u_i}{u_\infty} \right)^2$$



Skelett-Theorie

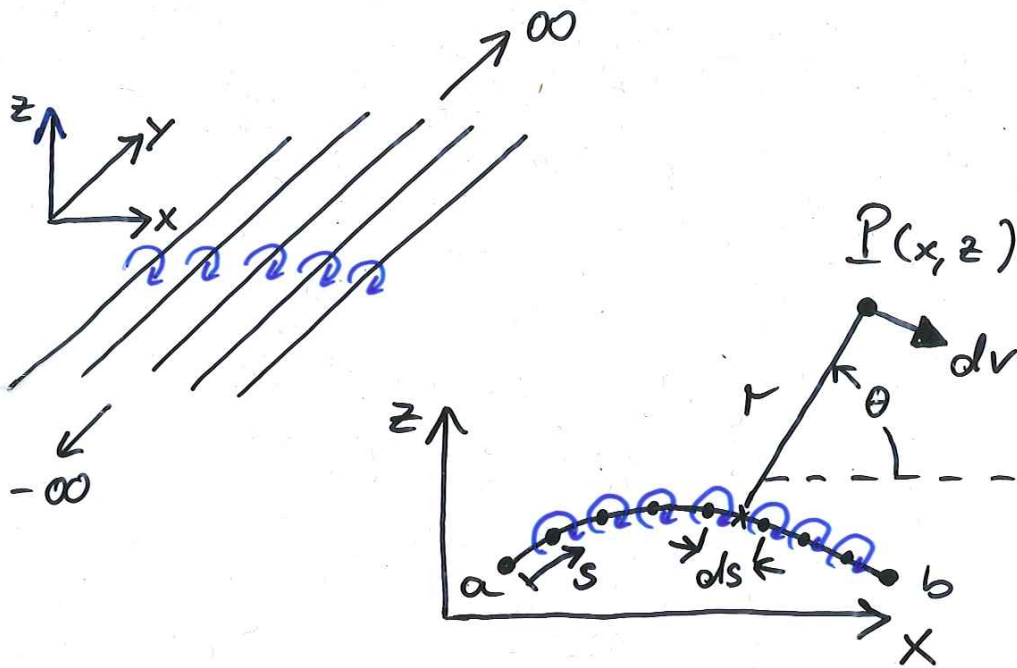
Quellenschicht \rightarrow Wirbelschicht
bzw. trag. Wirbel fläche

Wirbelfaden mit Γ



Ebene σ oder σ' : Γ

∞ -viele Wirbelfäden \Rightarrow Wirbelschicht



$\gamma(s)$: Wirbelstärke pro Einheitslänge
bzw. Wirbeldichte

\Rightarrow Stärke $\gamma(s) ds$ auf EL. ds

in $P(x, z)$:

$$dv = - \frac{\gamma ds}{2\pi r}$$

$\int_a^b \dots \Rightarrow v$ in P infolge Wirbelschicht

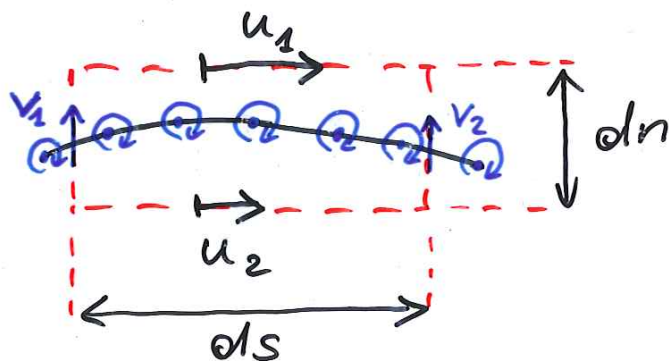
einfacher mittels ϕ

$$d\phi = - \frac{\gamma ds}{2\pi} \Theta$$

$$\Rightarrow \phi(x, z) = - \frac{1}{2\pi} \int_a^b \Theta \gamma ds$$

Quellschicht: Disk. in Norm. geschw.

Wirbelschicht: Disk. in Tang. geschw.



$$\Gamma = - \oint \vec{v} \cdot d\vec{s}$$

$$\Gamma = - (v_2 dn - u_1 ds - v_1 dn + u_2 ds)$$

$$= (u_1 - u_2) ds + (v_1 - v_2) dn$$

$$\Gamma = \int \gamma ds \quad ; \quad dn \rightarrow 0$$

$$\Gamma = (u_1 - u_2) ds = \int \gamma ds$$

bzw.

$$\gamma = u_1 - u_2$$

Wirbelschicht : Basis der Theorie
schlanker Profile



$\gamma(s)$ derart, daß Wirbelschicht
Stromlinie wird!

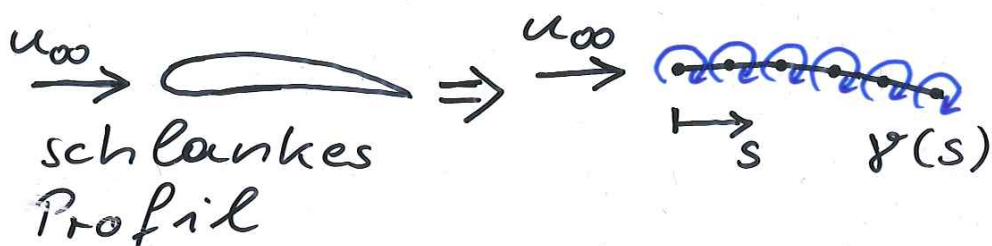
$$\Rightarrow \Gamma = \int \gamma ds \quad \Rightarrow \quad L = \rho_{\infty} u_{\infty} \Gamma$$

Achtung: $\gamma(s)$ unbekannt,
sofern Form, Dicke beliebig, dann
 $\gamma(s)$ numerisch!

→ Wirbel-Singularitätenverfahren

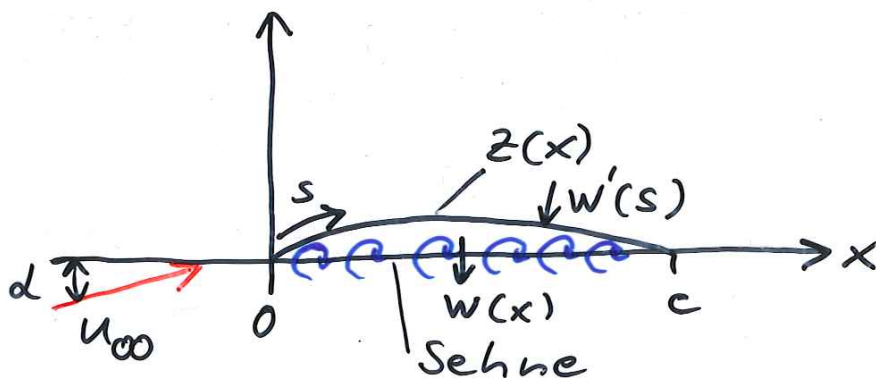
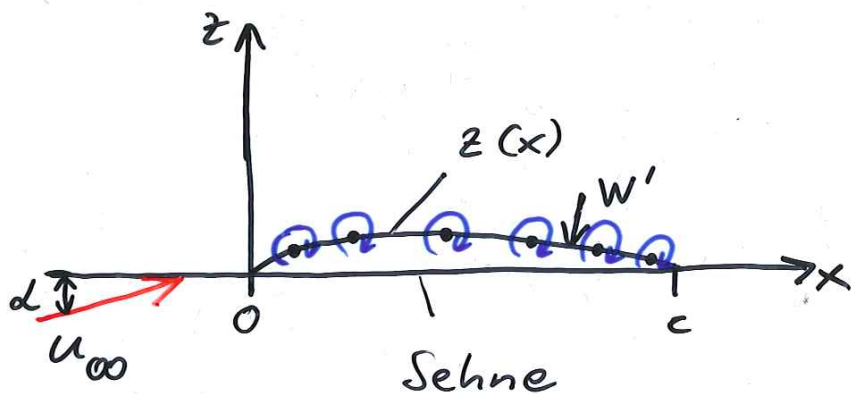
geschlossene Lösung für $\gamma(s)$:

Profil unendl. dünn \rightarrow Wirbelschicht $\hat{=}$ Skelettlinie \rightarrow Skelettlin. wird Stromlinie durch $\gamma(s)$.



Theorie v. Munk bzw. Birnbaum und Ackermann

Bestp. d. Auftriebs u. d. Momente

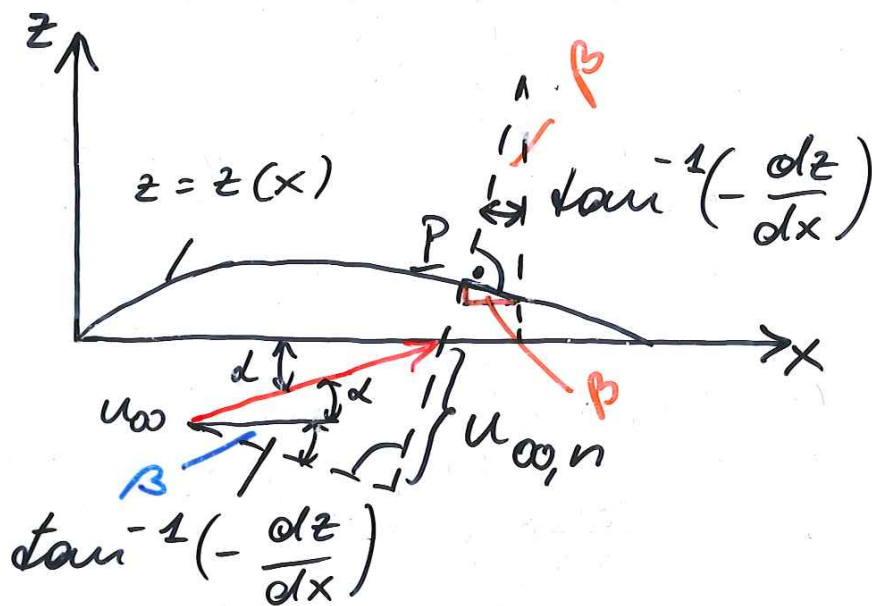


gesucht : $\gamma(x)$, so daß d. Skelett =
 Linie zur Stromlinie wird
 u. $\gamma(c) = 0$ ist.

Stromlinie

$$u_{\infty, n} + w'(c) = 0$$

$u_{\infty, n}$?



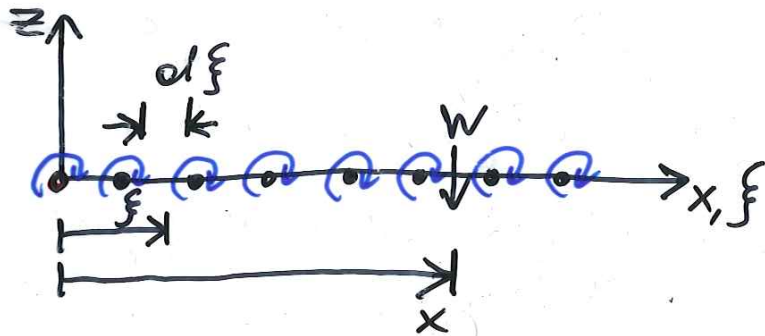
$$u_{\infty, n} = u_{\infty} \sin \left[\alpha + \underbrace{\tan^{-1} \left(-\frac{dz}{dx} \right)}_{\beta} \right]$$

schlank, d klein

$$\sin \Theta \approx \tan \Theta \approx \Theta$$

$$\Rightarrow u_{\infty, n} = u_{\infty} \left(1 - \frac{dz}{dx} \right)$$

geringe Wölbung: $w'(s) \approx w(x) = ?$



$$d\xi \rightarrow \gamma(\xi) d\xi$$

induz. Geschw. in x

$$dw = - \frac{\gamma(\xi) d\xi}{2\pi(x-\xi)}$$

$$\Rightarrow w(x) = - \int_0^c \frac{\gamma(\xi) d\xi}{2\pi(x-\xi)}$$

⇒ Bestsglp. d. Stromlinie

$$u_{\infty} \left(d - \frac{dz}{dx} \right) - \int_0^c \frac{\gamma(\xi) d\xi}{2\pi(x-\xi)} = 0$$

bzw.

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^c \frac{\gamma(\xi) d\xi}{(x-\xi)} = u_{\infty} \left(d - \frac{dz}{dx} \right)$$

fundament. Gls. d. Theorie dünner Prof.
gültig für d. Stelle x mit $\frac{dz}{dx}$;
unbekannt: $\gamma(\xi)$

$\gamma(\xi)$ aus Bedg. : • $\gamma(c) = 0$
• Skelettlin. ← Stromlinie

Analyse für $\frac{dz}{dx} = 0$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^c \frac{\gamma(\xi) d\xi}{(x-\xi)} = u_{\infty} d$$

Gls. für Ström. über eb. Platte mit $d \neq 0$

Integrallösg. via Transformation

$$f = \frac{c}{2} (1 - \cos \theta)$$

bzw. $x = \frac{c}{2} (1 - \cos \theta_0)$ θ_0 für x

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\gamma(\theta) \sin \theta}{\cos \theta - \cos \theta_0} d\theta = u_\infty$$

Theorie d. Int.-glger \Rightarrow

$$\gamma(\theta) = 2\alpha u_\infty \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta}$$

check $\gamma(\theta)$: $\gamma(\theta)$ in Int.-glg.!

Kutta - Bedingung:

$$\gamma(\pi) = 2\alpha u_\infty \frac{-\sin \pi}{\cos \pi} = 0 \quad \checkmark$$

Zirkulation Γ

$$\Gamma = \int_0^c \gamma(f) df = \frac{c}{2} \int_0^\pi \gamma(\theta) \sin \theta d\theta$$

$$\Gamma = d c u_{\infty} \int_0^{\pi} (1 + \cos \theta) d\theta = \pi d c u_{\infty}$$

Auftrieb \hat{L}

$$\hat{L} = \int_{\infty} u_{\infty} \Gamma = \int_{\infty} u_{\infty}^2 \pi d c$$

Auftriebskoeff. ($\frac{dz}{dx} = 0$)

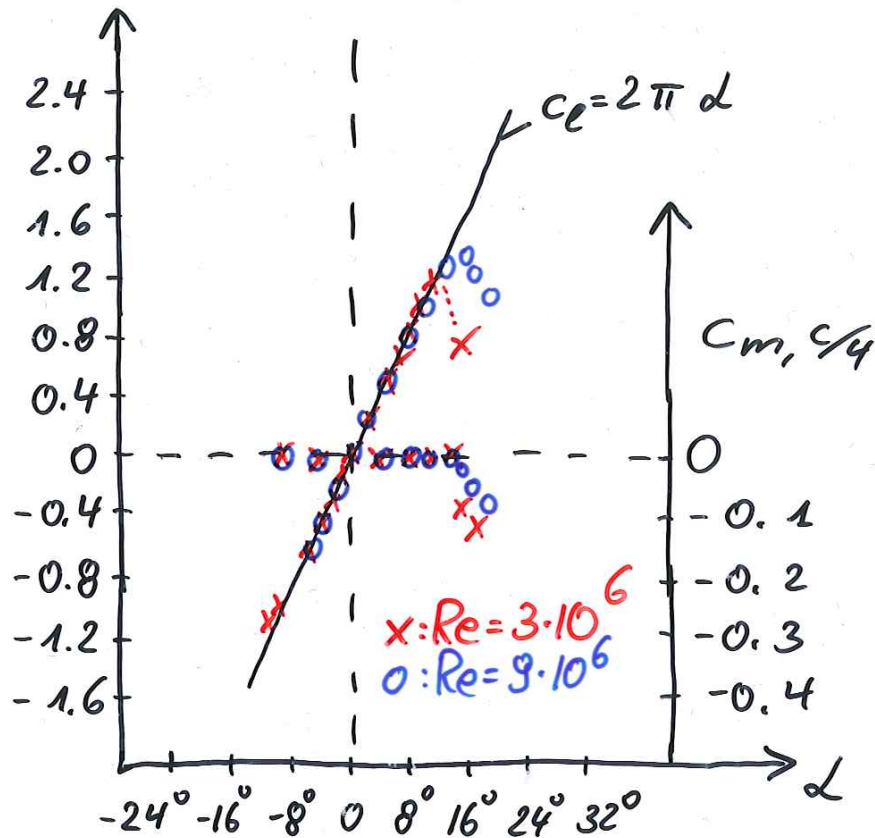
$$c_e = \frac{\hat{L}}{\frac{\rho_{\infty}}{2} u_{\infty}^2 c} = 2\pi d \cong \text{konf. Abbildg.}$$

Auftriebsanstieg ($\frac{dz}{dx} = 0$)

$$\frac{dc_e}{dd} = 2\pi \cong \text{konf. Abbildg.}$$

$c_e, \frac{dc_e}{dd}$: 1. Birnbaum-Ackermannsche Normalverteilung

symmetr. Prof. endl. Dicke
 $(\frac{dz_c}{dx} = 0)$ NACA 0012



Zur Momentenberechnung.

$$d\Gamma = \gamma(\xi) d\xi, \quad dL = \rho_\infty u_\infty d\Gamma, \quad dM = -\xi dL$$

$$\Rightarrow \hat{M}_{LE} = -\int_0^c \xi dL = -\rho_\infty u_\infty \int_0^c \xi \gamma(\xi) d\xi$$

Transformation $\xi(\theta) \Rightarrow$

$$\hat{M}_{LE} = -\rho_{\infty} c^2 \frac{\pi d}{2}$$

Momentenbeiwert $c_{m,le} = \frac{\hat{M}_{LE}}{\rho_{\infty} c^2} \left(\frac{dz}{dx} = 0 \right)$

$$c_{m,le} = -\frac{\pi d}{2} = -\frac{c_e}{4}$$

bzw. $c_{m, c/4} = c_{m,le} + \frac{c_e}{4} = 0$

⇒ Druckpunkt bei $c/4$!

Druckpunkt auch Neutralpunkt,
da $c_{m, c/4} \neq f(d)$!

Analyse für $\frac{dz}{dx} \neq 0$

Transformation in Int. fgs. ⇒

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\gamma(\theta) \sin \theta}{\cos \theta - \cos \theta_0} d\theta = u_{\infty} \left(\alpha - \frac{dz}{dx} \right)$$

Fourier-Reihe \Rightarrow

$$\gamma(\theta) = 2u_\infty \left[A_0 \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\theta) \right]$$

Kutta-Beding. $\gamma(\pi) = 0 \quad \checkmark$

$$A_0 = f\left(d, \frac{dz}{dx}\right), \quad A_n = f\left(\frac{dz}{dx}\right) \quad n=1, 2, 3, \dots$$

Bestg. von A_0, A_n derart, daß
Skelettlinie zur Stromlinie wird.

A_0, A_n Berechnung:

$\gamma(\theta)$ in Integralgl. einsetzen

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{A_0 (1 + \cos \theta)}{\cos \theta - \cos \theta_0} d\theta + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\pi \frac{A_n \sin(n\theta) \sin \theta}{\cos \theta - \cos \theta_0} d\theta =$$

$$d - \frac{dz}{dx}$$

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos(n\theta)}{\cos\theta - \cos\theta_0} d\theta = \frac{\pi \sin(n\theta_0)}{\sin\theta_0}$$

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin(n\theta) \sin\theta}{\cos\theta - \cos\theta_0} d\theta = -\pi \cos(n\theta_0)$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = \alpha - A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\theta_0)$$

wenn A_0, A_n bekannt $\Rightarrow z(x)$!

ist $z(x)$ bekannt, folgt A_0, A_n :

allg. Fourier-Darstellg. einer Fktn.

$$f(\theta) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(n\theta)$$

mit

$$B_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(\theta) d\theta$$

$$B_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\theta) \cos(n\theta) d\theta$$

Vergleich \Rightarrow

$$d - A_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{dz}{dx} d\theta_0$$

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{dz}{dx} \cos(n\theta_0) d\theta_0$$

A_0, A_n bekannt, dann

Circulation Γ

$$\Gamma = \int_0^c \gamma(\xi) d\xi = \frac{c}{2} \int_0^{\pi} \gamma(\theta) \sin \theta d\theta$$

$$\Gamma = c u_{\infty} \left[A_0 \int_0^{\pi} (1 + \cos \theta) d\theta + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^{\pi} \sin(n\theta) \sin \theta d\theta \right]$$

$$\int_0^{\pi} (1 + \cos \theta) d\theta = \pi, \quad \int_0^{\pi} \sin(n\theta) \sin \theta d\theta = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & n=1 \\ 0 & n \neq 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Gamma = c u_{\infty} \left(\pi A_0 + \frac{\pi}{2} A_1 \right)$$

$$\hat{L} = \rho_{\infty} u_{\infty} \Gamma = \rho_{\infty} u_{\infty}^2 c \left(\pi A_0 + \frac{\pi}{2} A_1 \right)$$

Aufttriebskoeff. c_e

$$c_e = \frac{L}{\frac{\rho_{\infty}}{2} u_{\infty}^2 c} = \pi (2A_0 + A_1)$$

$$c_e = 2\pi \left[d + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{dz}{dx} (\cos \theta_0 - 1) d\theta_0 \right] \quad I_0$$

Auftriebsanstieg $\frac{dc_e}{dd}$

$$\frac{dc_e}{dd} = 2\pi$$

Bedeutung von I_0 durch Vgl. mit

$$c_e = (d - d_0) \frac{dc_e}{dd} = (d - d_0) 2\pi$$

$$\Rightarrow d_0 = - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{dz}{dx} (\cos \theta_0 - 1) d\theta_0 = -I_0$$

Moment \hat{M}_{LE}

$$\hat{M}_{LE} = -\rho_{\infty} u_{\infty} \int_0^c \xi \gamma(\xi) d\xi$$

Momentenbeiwert $c_{m,le}$

$$c_{m,le} = -\frac{\pi}{2} \left(A_0 + A_1 - \frac{A_2}{2} \right)$$

$$= -\frac{\pi}{4} (2A_0 + A_1 + A_1 - A_2)$$

$$c_{m,le} = -\left[\frac{c_e}{4} + \frac{\pi}{4} (A_1 - A_2) \right]$$

bzw. $c_{m,e/4}$

$$c_{m,e/4} = c_{m,le} + \frac{c_e}{4} = \frac{\pi}{4} (A_2 - A_1)$$

$\Rightarrow e/4 \hat{=}$ Lage d. Neutralpunktes

Druckpunkt aus

$$x_{cp} = -\frac{\hat{M}_{LE}}{\hat{L}} = -\frac{c_{m,le} c}{c_e}$$

$$x_{cp} = \frac{e}{4} \left[1 + \frac{\pi}{c_e} (A_1 - A_2) \right]$$

$$x_{cp} = f(c_e) = g(\alpha)$$

Diskussion d. Birnbaum-Acker-
mannschen Normalverteilung.

$$\psi(\theta) = 2u_{\infty} \left[A_0 \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\theta) \right]$$

1. Normalverteilung (ang. eb. Platte)

Untersuchg. d. 1. Terms v. $\psi(\theta)$

$$\psi = A_0 \psi_1 = 2u_{\infty} A_0 \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta}$$

mit $\cos \theta = 1 - 2 \frac{\xi}{c}$, $\sin \theta = 2 \sqrt{\frac{\xi}{c} - \left(\frac{\xi}{c}\right)^2}$

gibt $\psi_1 = 2u_{\infty} \sqrt{\frac{1 - \xi/c}{\xi/c}}$

$$A_0 = d \quad \rightarrow \quad C_L = 2\pi A_0 = 2\pi d$$

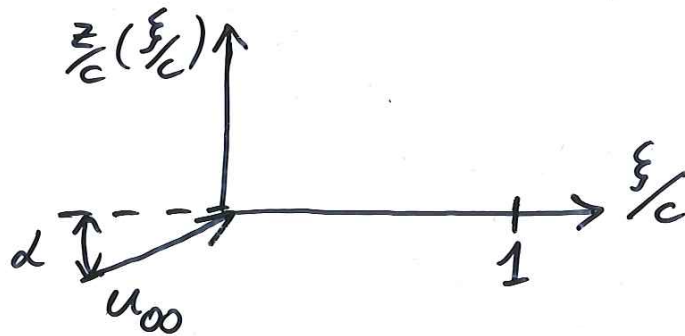
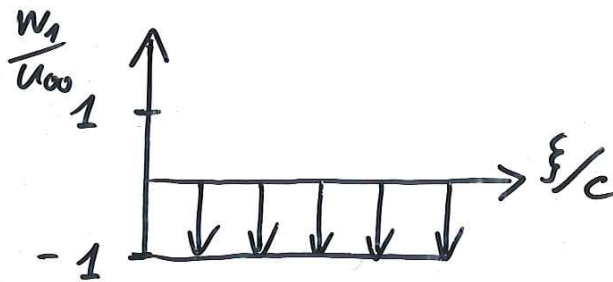
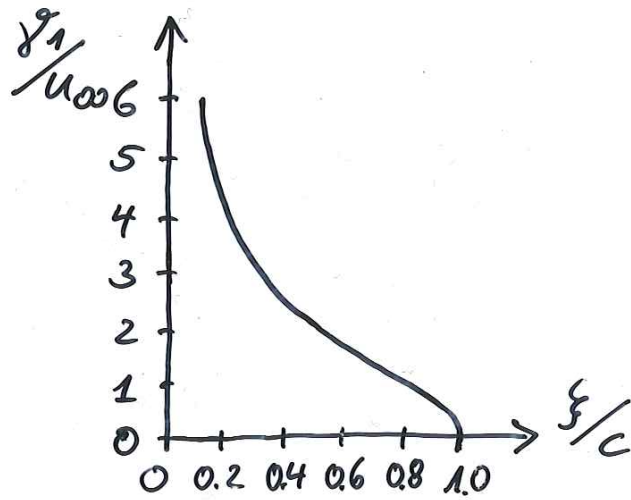
$$C_{m,le} = -\frac{C_L}{4}$$

induzierte Abwärtsgeschw. $w(\xi) = -\int_0^c \frac{\psi(\xi) d\xi}{2\pi(x-\xi)}$

$$w(\theta) = -u_{\infty} \left(A_0 - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\theta) \right)$$

$$\frac{w}{u_{\infty}} = -A_0 \quad w = w_1 A_0 \quad \frac{w_1}{u_{\infty}} = -1$$

bzw.



2. Normalverteilung. (Parabelskelett)

Untersuchg. d. 2. Terms v. $\gamma(\theta)$

$$\gamma = A_1 \gamma_2 = 2 u_{\infty} A_1 \sin \theta = 4 u_{\infty} A_1 \sqrt{\frac{\xi}{c} (1 - \frac{\xi}{c})}$$

$$\frac{\gamma_2}{u_{\infty}} = 4 \sqrt{\frac{\xi}{c} (1 - \frac{\xi}{c})} \quad \text{ellipt. Wirk.}$$

$$w = w_2 A_1 = A_1 \cos(\theta) u_{\infty}$$

$$\frac{w_2}{u_{\infty}} = \cos \theta = 1 - 2 \frac{\xi}{c}$$

$$\frac{dz}{d\xi} = A_1 \cos \theta = A_1 (1 - 2 \frac{\xi}{c})$$

Integr. von $\frac{dz}{d\xi} \Rightarrow$

$$\frac{z}{c} (\frac{\xi}{c}) = A_1 \frac{\xi}{c} (1 - \frac{\xi}{c}) = \underbrace{4 \frac{f}{c}}_{A_1} \frac{\xi}{c} (1 - \frac{\xi}{c})$$

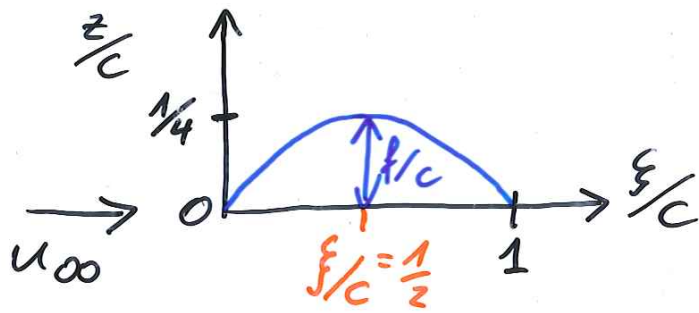
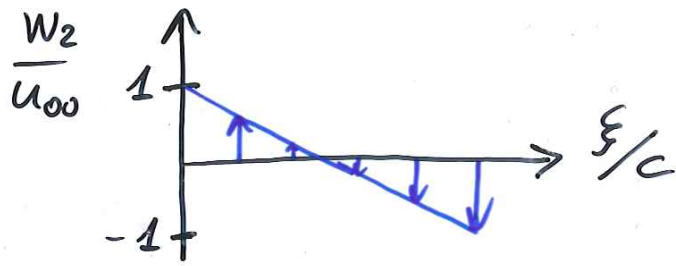
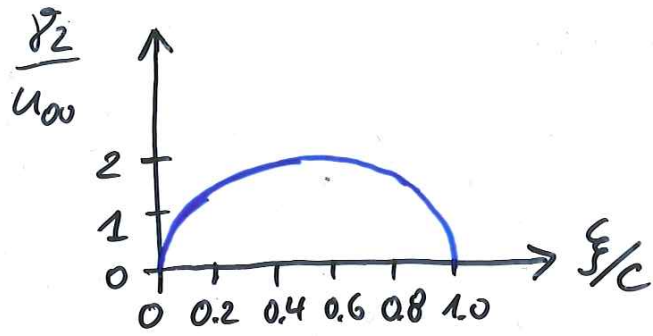
$$\frac{dz}{d\xi} = 0 \Rightarrow \frac{\xi}{c} = \frac{1}{2} \Rightarrow A_1 = 4 \frac{f}{c}$$

Auftriebskoeff.

$$C_L = \pi A_1 = 4\pi \frac{f}{c}$$

Momentenbeiwert

$$C_{m, ee} = -\frac{\pi}{2} A_1 = -2\pi \frac{f}{c}$$



Beispiel : NACA 23012

Fktn. d. Skelettlinie

$$\frac{z}{c} = 2.6595 \left[\left(\frac{x}{c} \right)^3 - 0.6075 \left(\frac{x}{c} \right)^2 + 0.1147 \left(\frac{x}{c} \right) \right]$$

$$0 \leq \frac{x}{c} \leq 0.2025$$

$$\frac{z}{c} = 0.02208 \left(1 - \frac{x}{c} \right) \quad 0.2025 < \frac{x}{c} \leq 1.0$$

- Gesucht :
- a) d_0
 - b) c_e bei $\alpha = 4^\circ$
 - c) $c_{m, 9/4}$
 - d) x_{CP}/c bei $\alpha = 4^\circ$

Ausgang : dz/dx

$$\frac{dz}{dx} = 2.6595 \left[3 \left(\frac{x}{c} \right)^2 - 1.215 \left(\frac{x}{c} \right) + 0.1147 \right]$$

$$0 \leq \frac{x}{c} \leq 0.2025$$

$$\frac{dz}{dx} = -0.02208$$

$$0.2025 < \frac{x}{c} \leq 1.0$$

Transformation $x = \frac{c}{2} (1 - \cos \theta)$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = 0.6840 - 2.3736 \cos \theta + 1.995 \cos^2 \theta$$

$$0 \leq \theta \leq 0.9335 \text{ rad}$$

$$\frac{dz}{dx} = -0.02208 \quad 0.9335 < \theta \leq \pi$$

a) α_0 ?

$$\alpha_0 = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{dz}{dx} (\cos \theta - 1) d\theta$$

$$\Rightarrow \alpha_0 = -\frac{1}{\pi} \int_0^{0.9335} [-0.6840 + 3.0576 \cos \theta - 4.3686 \cos^2 \theta + 1.995 \cos^3 \theta] d\theta - \frac{1}{\pi} \int_{0.9335}^{\pi} [0.02208 - 0.02208 \cos \theta] d\theta$$

da $\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$

$$\alpha_0 = -\frac{1}{\pi} [-0.0065 + 0.0665] = -0.0191 \text{ rad}$$

$$\alpha_0 = -1.09^\circ$$

b) c_e bei $d = 4^\circ$?

$$c_e = 2\pi (d - d_0)$$

$$c_e = 0.559$$

c) $c_{m, 9/4}$?

$$c_{m, 9/4} = \frac{\pi}{4} (A_2 - A_1)$$

$$A_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{dz}{dx} \cos \theta d\theta$$

$$A_2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{dz}{dx} (2 \cos^2 \theta - 1) d\theta$$

$$A_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{0.9335} \dots d\theta + \frac{2}{\pi} \int_{0.9335}^{\pi} \dots d\theta = 0.0954$$

$$A_2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{0.9335} \dots d\theta + \frac{2}{\pi} \int_{0.9335}^{\pi} \dots d\theta = 0.0792$$

$$c_{m, 9/4} = -0.0127$$

d) x_{cp}/c ? $\alpha = 40^\circ$

$$x_{cp}/c = \frac{1}{4} \left[1 + \frac{\pi}{c_e} (A_1 + A_2) \right]$$

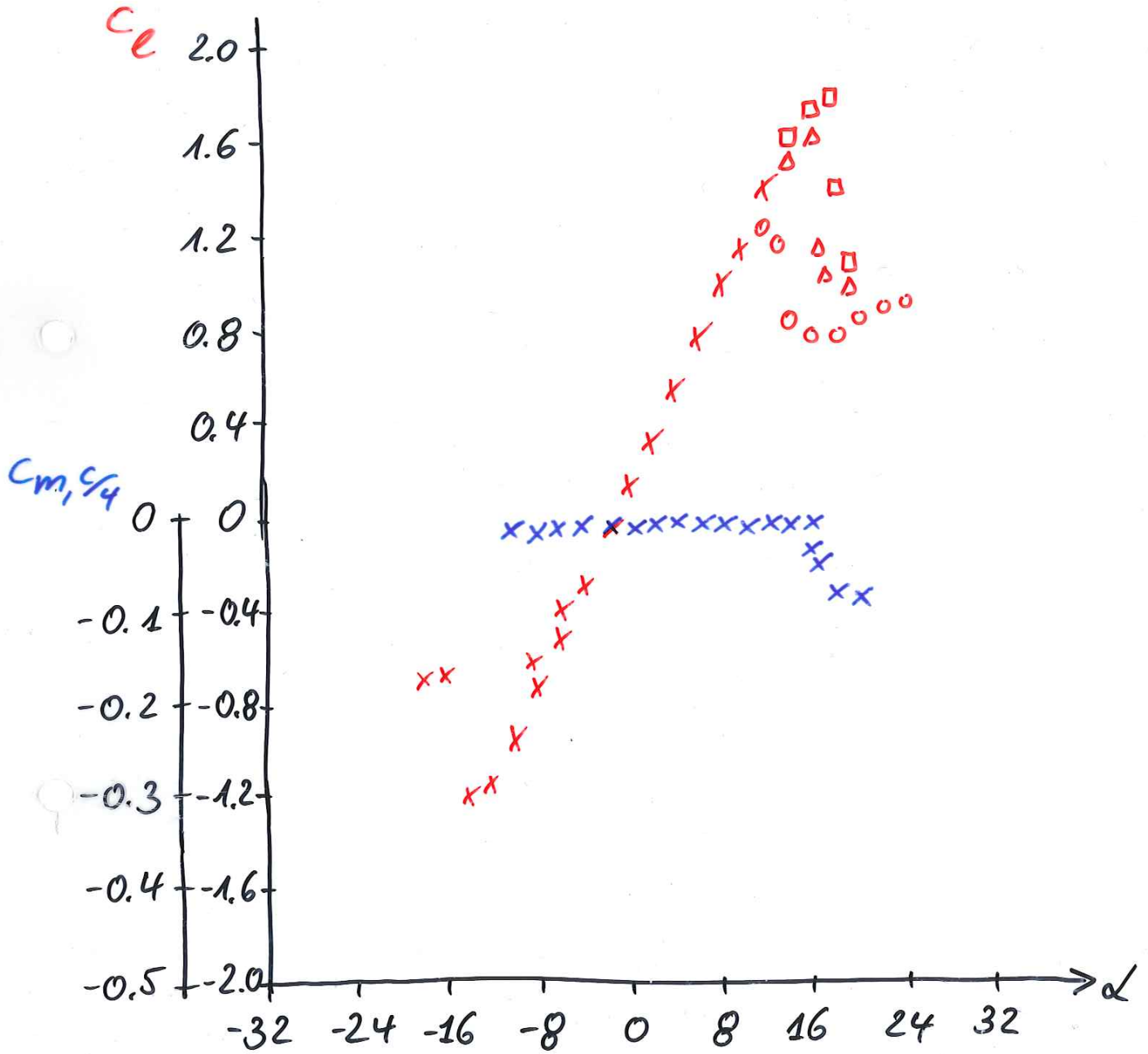
$$x_{cp}/c = 0.273$$

Vergleich : Theorie \leftrightarrow Experiment

	α_0	$c_e (\alpha = 40^\circ)$	$c_m, c/4$
Theorie	-1.09°	0.559	-0.0127
Exp.	-1.1°	0.55	-0.01

Experimentelle Daten : siehe folgende graphische Darstellg.

NACA 23012



Profile endl. Dicke mit Auftrieb

dünne Profile : geschl. Lösung f.
aerod. Koeff. ;

Realität : Profildicke $> 12\%$;
Hochauftriebsphase ;

Weitere Probleme : Auto, Zug,
Schiff etc.

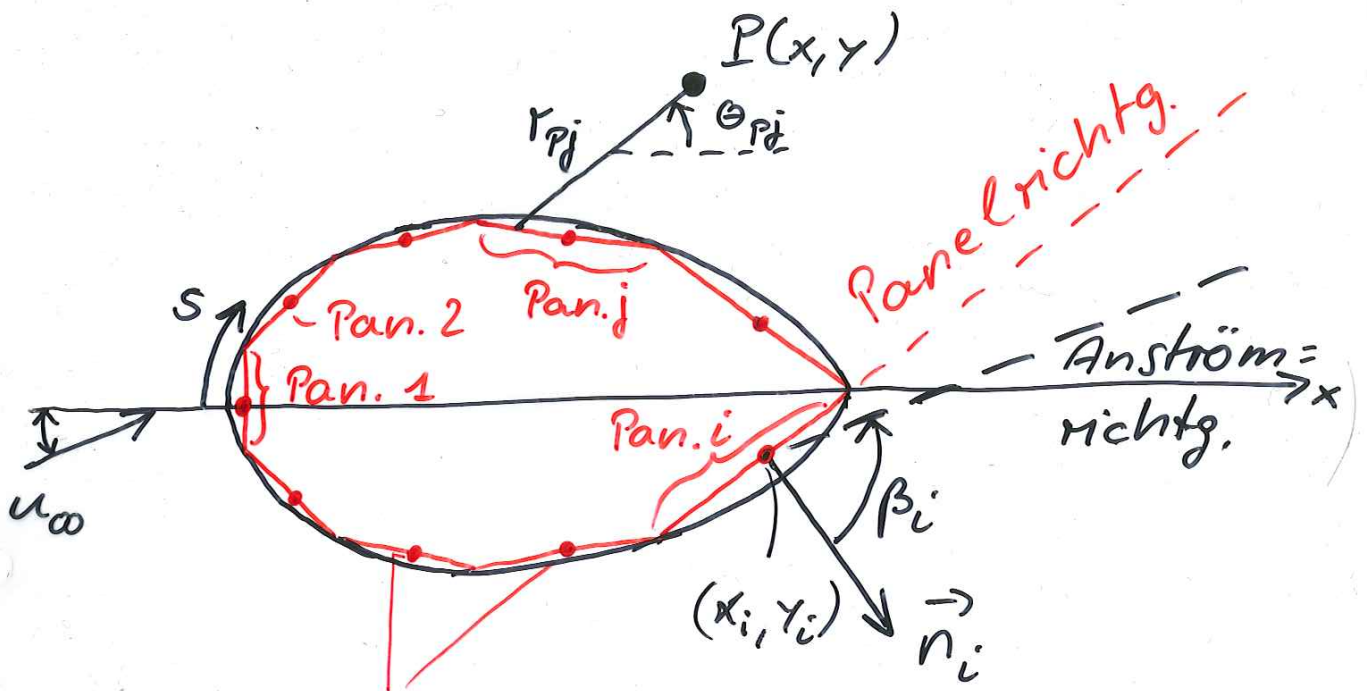
\Rightarrow Wirbel - Panelverfahren sind
notwendig

$\rightarrow \gamma(s)$ auf d. Körperoberfl.

Körperoberfl. \rightarrow Stromfl. :

$\gamma(s)$ nicht geschl. mögl.

analog z. Quellen-Panelverf.



Kontrollpunkte

$\gamma_j = \text{konst. auf Pan. } j \quad = 1, \dots, n$

Bestg. von γ_j mittels:

- Kontur ist Stromlinie
- Erfüllg. d. Kutta-Bedg.

induzierte Geschw. in I durch
Panel j

$$\Delta\phi_j = -\frac{1}{2\pi} \int_j \theta_{pj} \gamma_j ds_j$$

$$\theta_{pj} = \tan^{-1} \frac{y-y_j}{x-x_j}$$

alle Panels

$$\phi(I) = \sum_{j=1}^n \Delta\phi_j = -\sum_{j=1}^n \frac{\gamma_j}{2\pi} \int_j \theta_{pj} ds_j$$

für I im i -ten Panel

$$\theta_{ij} = \tan^{-1} \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}$$

$$\phi(x_i, y_i) = -\sum_{j=1}^n \frac{\gamma_j}{2\pi} \int \theta_{ij} ds_j$$

Normalenkomp. d. Geschw. $\stackrel{!}{=} 0$

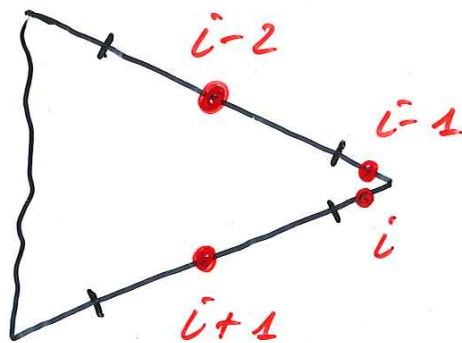
$$\underbrace{u_{\infty} \cos \beta_i}_{u_{\infty, n}} - \underbrace{\sum_{j=1}^n \frac{\gamma_j}{2\pi} \int_j \frac{\partial \theta_{ij}}{\partial n_i} ds_j}_{u_n} = 0$$

$$u_{\infty} \cos \beta_i - \sum_{j=1}^n \frac{\gamma_j}{2\pi} F_{ij} = 0$$

ebenso für d. Panel $j = 1, \dots, n; j \neq i$
 $\Rightarrow n$ Glgn. für n Unbek. (γ_j) !!

Kutta-Bedingung

○ Probl. ist überbestimmt

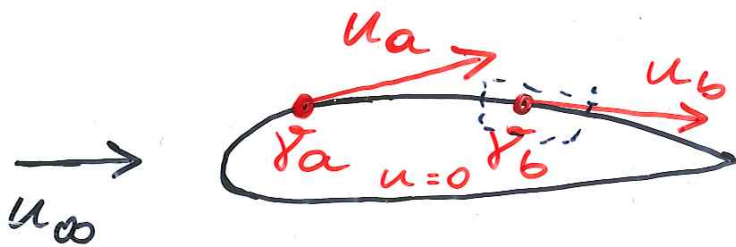


$$\gamma_i = -\gamma_{i-1}$$

$$\gamma(TE) = 0 \text{ statt } (u_{\infty, n} + u_n)_i = 0$$

\Rightarrow n Glgn. mit n Unbek.

Tangentialkomp. d. Geschw. durch γ_j



u_1 : außerhalb } d. Wirbelschicht
 u_2 : innerhalb }

$$\gamma = u_1 - u_2 = u_1$$

$$\Rightarrow u_a = \gamma_a, \quad u_b = \gamma_b$$

\Rightarrow c_p -Verteilung !!

Zirkulation Γ

$$\Gamma = \sum_{j=1}^n \gamma_j S_j$$

Auftrieb \hat{L}

$$\hat{L} = \rho_{\infty} u_{\infty} \sum_{j=1}^n \gamma_j S_j$$

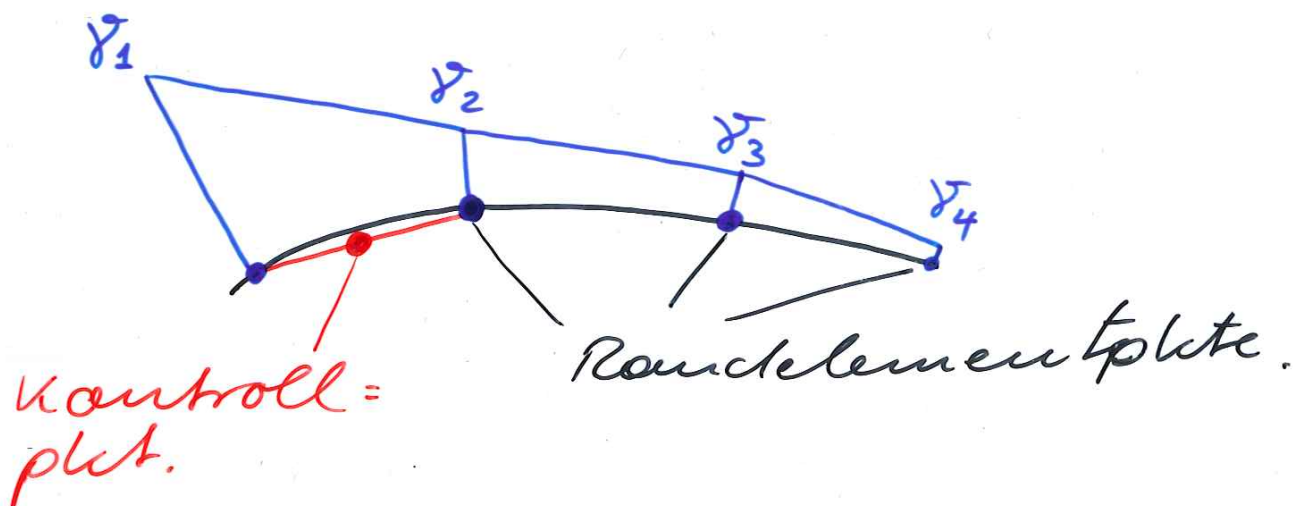
Beurteilungen:

$\gamma_j = \text{konst.}$

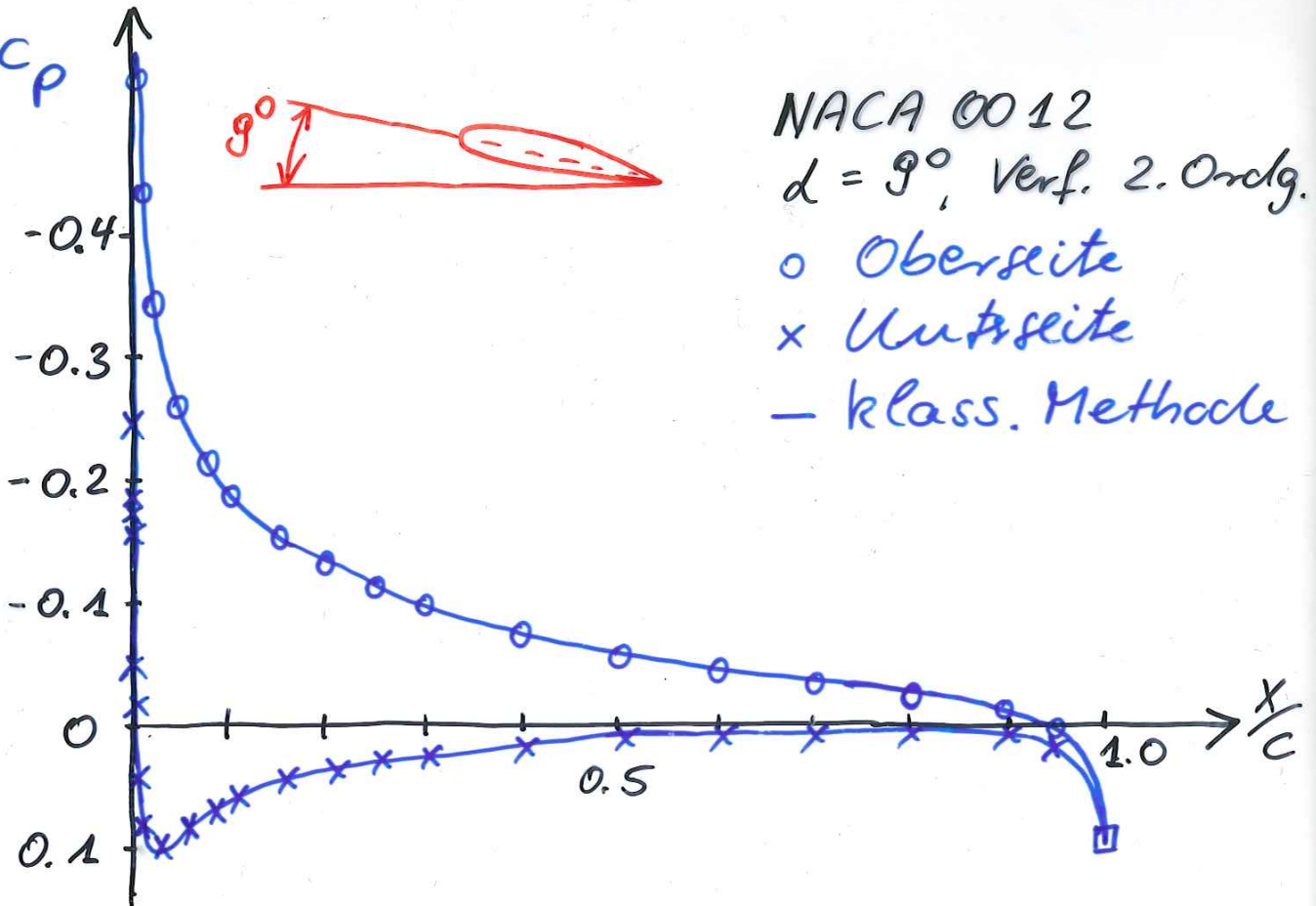
Verf. 1. Ordng.

Wirbel-Panelverf. = f(# d. Panels,
Länge d. Panels,
Verteilg. d. Pan.)

Panelverf. höh. Ordng.



$10^{-1} \cdot c_p$



Panel - Verfahren

Quellen - Pan.-Verf.
(Dricken erzeugung)

Wirbel - Pan.-Verf.
(Zirkulation)

70er Jahre → Profilentwurf
mit Pan.-Verf. (NASA)

→ Windkanal exp. zur Prüfg.

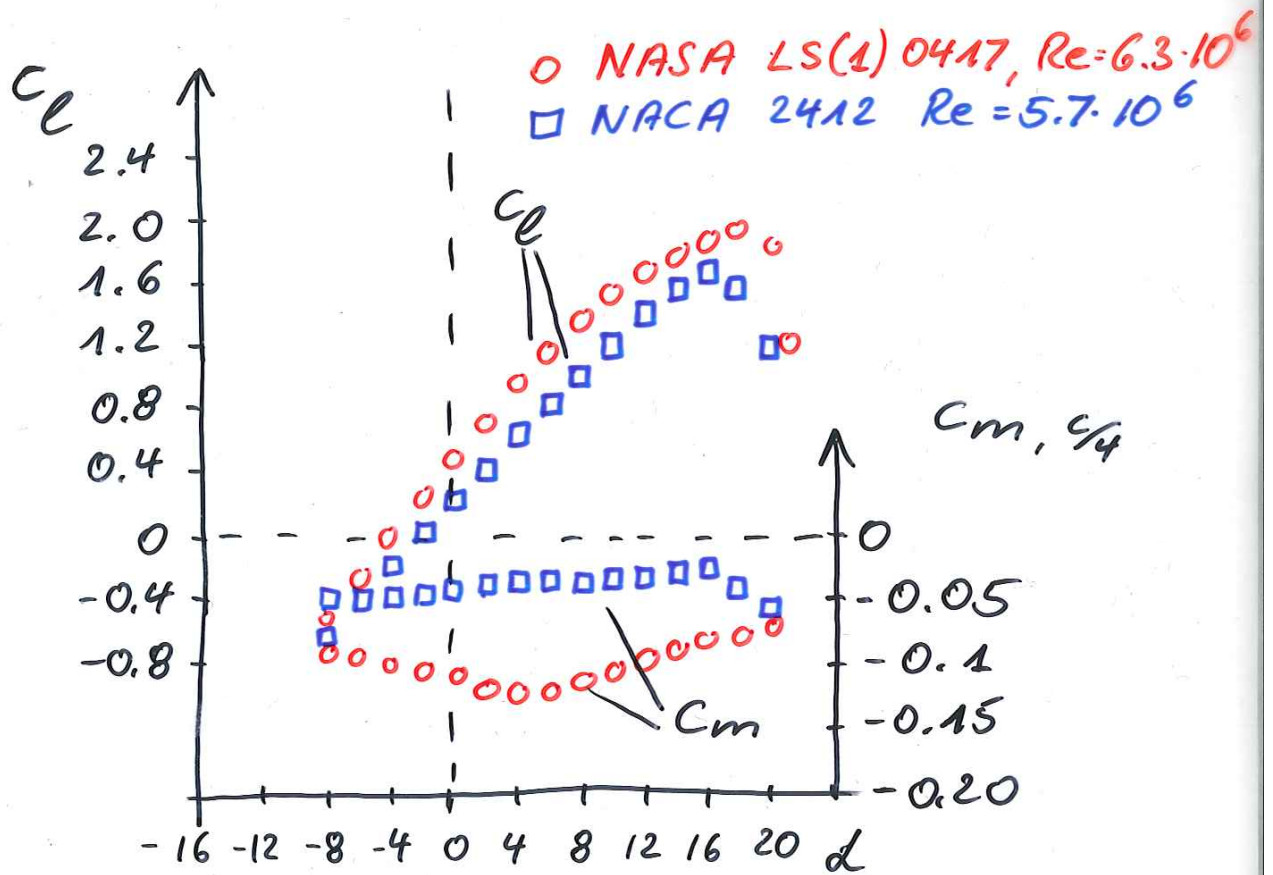
⇒ Pan. Profilsfamilie LS(1)-04xx

LS(1)-0417

Kennzeichen:

- großer Prof. radius
0.08c statt 0.02c
- Form d. Hinterranke erhöht
d. Wölbung

⇒ max. Auftrieb wird erhöht



Ergebnis ist repräsentativ für
 d. Prof. fam.; $\frac{L/D}{LS-Prof.} \approx 1.5 \frac{L/D}{NACA}$

Einfluß der Reibung auf die Profileigenschaften

Verkehrsflugzeuge: $Re > 10^6$
⇒ i. a. turbulente Grenzschicht

anliegende Ström. → pot. theoret.
 c_p -Verteilg OK!

Einfluß von Re bzgl. $c_e = f(\alpha)$
für NACA 2412:

• $\frac{dc_e}{d\alpha} \neq f(Re)$ auch für NACA 0012,
4412, 23012,

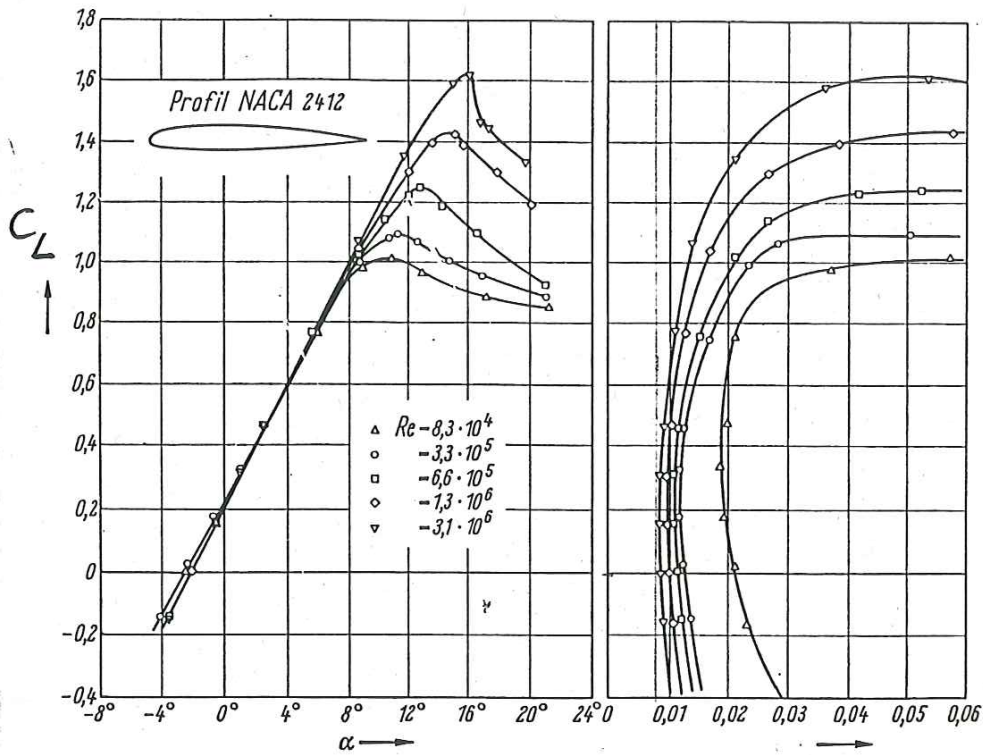
• $\frac{dc_e}{d\alpha} = f(\text{Profildicke, Hinterrandwinkel, Oberfläche})$

$\frac{dc_e}{d\alpha} \downarrow$ für $d/l \uparrow$

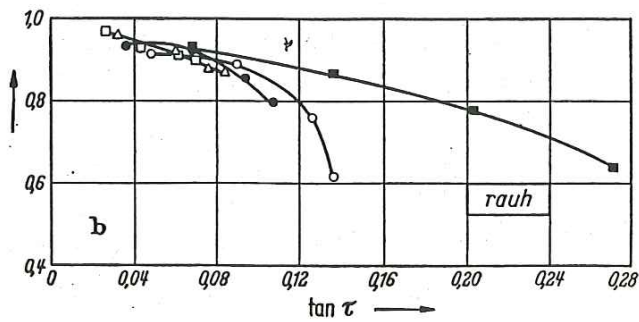
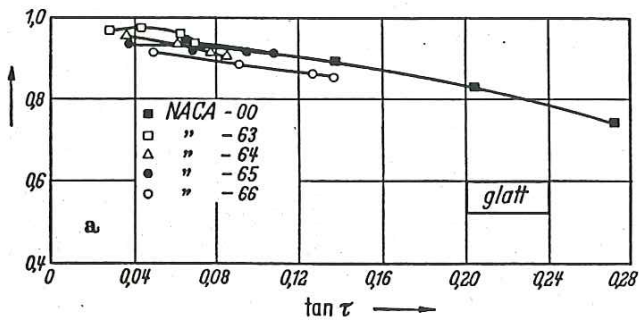
4- u. 5-stiffige
NACA

$\frac{dc_e}{d\alpha} \uparrow$ für $d/l \uparrow$

NACA-6+ Reihe



$\frac{(dC_L/d\alpha)_{exp}}{(dC_L/d\alpha)_{th}}$



- rauhe Oberfläche, $d/l_e = 0.12$

$$\Rightarrow \frac{dce}{d\alpha} \downarrow$$

$$\bar{z} \uparrow \Rightarrow \frac{dce}{d\alpha} \downarrow$$

Diskrepanz zwischen Theorie und Messung

→ infolge Grenzschicht bzw. Reibg.

- $\delta_{oben} > \delta_{unten}$

⇒ hint. "Staupkt." auf d. Oberseite
→ Änderg. d. Kutta-Bedg.

$C_{Lmax} = f(Re)$ Bedeutg.: Start, Landg.

- Re klein → lam. Grenzschicht
→ Ablösg. an d. Profilnase

⇒ $C_{Lmax} \neq f(Re)$! lam. Strög.!

- Re groß → lam. Ablöseblase
→ turb. Anliegen;

$Re \uparrow \Rightarrow$ Anl.pkt. näher an d. Profilnase

c_{Lmax} bestimmt durch:

- Abnahme d. Ablöseblase mit $Re \uparrow$
- Erhöhung von $\alpha \Rightarrow$ Abriß d. Strömung

$Re > 10^7 \Rightarrow$ turb. Grenzschicht, keine lam. Ablösg.

$S_{turb} > S_{lam} \Rightarrow \Gamma \downarrow \Rightarrow c_{Lmax} \downarrow$

Einfluß d. Dicke d/e

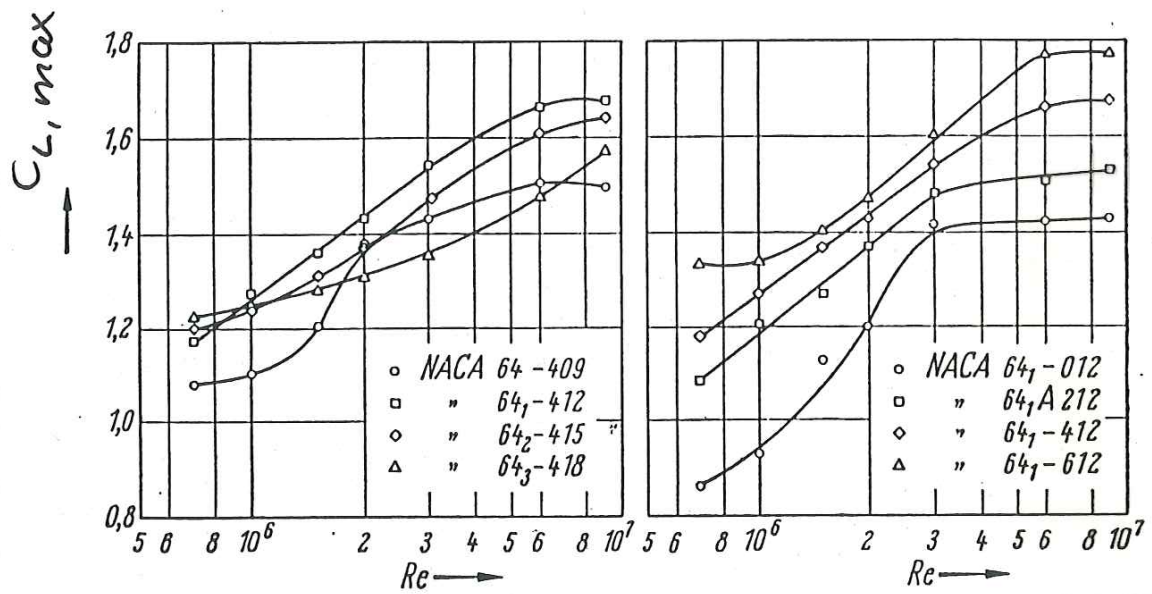
c_{Lmax} max. für Prof. mit $d/e = 0.12$

Einfluß d. Wölbung f/e

$c_{Lmax} \uparrow$ mit $f/e \uparrow$

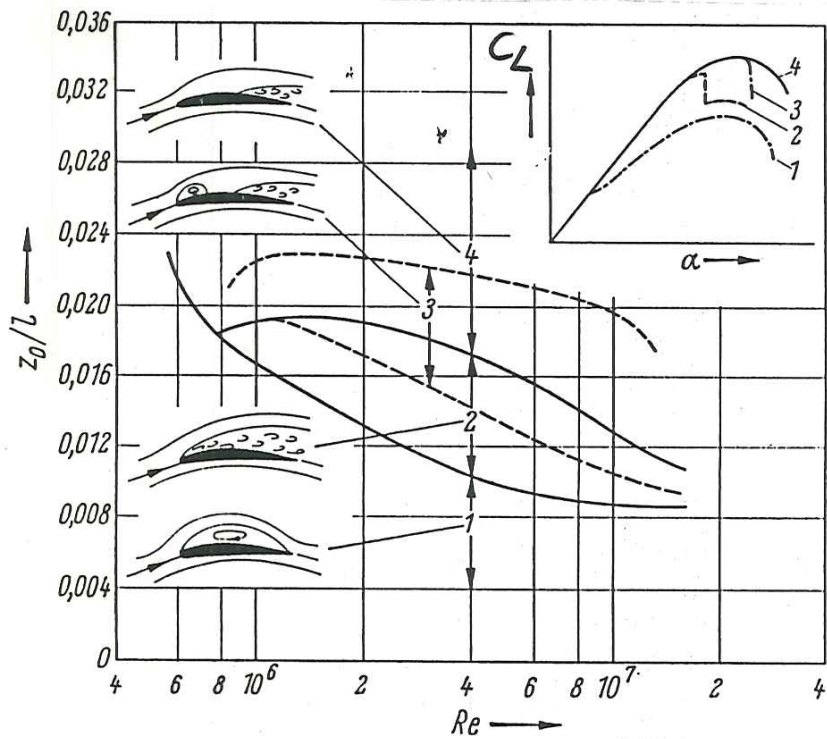
Einfluß d. Form d. Profilnase

wesentlich für Druckverteilung
bzw. Ablöseverhalten

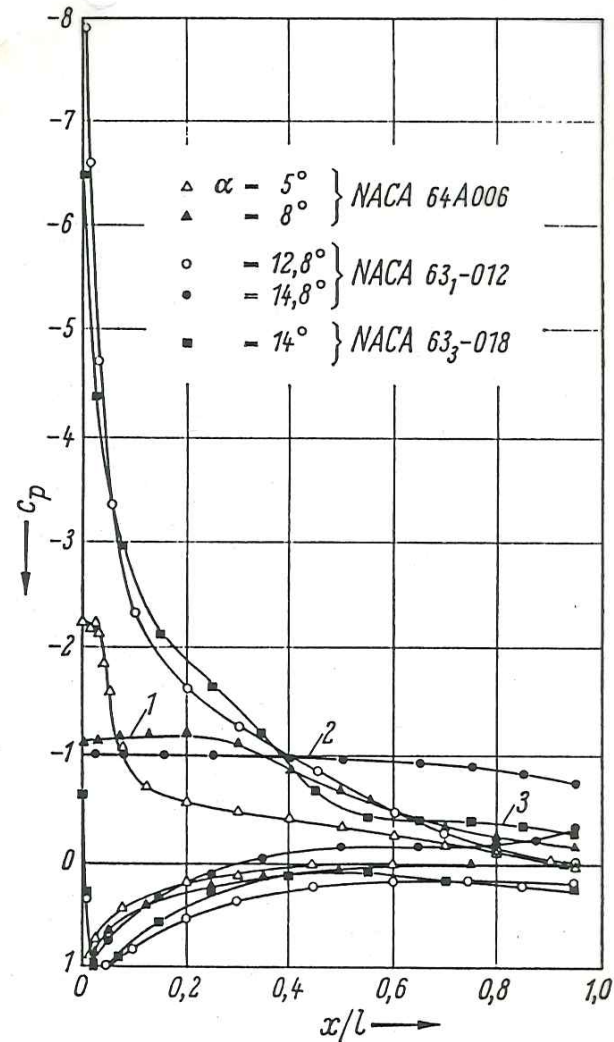


Dicken =
verhältnis

Wölbungs =
verhältnis



- 1) thin-airfoil stall
- 2) lead.-edge stall
- 3) combined lead.-edge and trail.-edge stall
- 4) trail.-edge stall



- 1) thin-airfoil stall
- 2) lead.-edge stall
- 3) trail.-edge stall

Ablöseformen $f(Re, \text{Nasenradius } z(x/l = 0.0225)/l)$

- Thin-Airfoil Stall (Ablsg. am dünnen Profil)
[NACA 64A 006]

Ablsg. an d. Nase bei kl. α
Anlegepkt. weder lam. noch turb.,
& wandert für gr. α nach hinten

- Leading-Edge Stall (Ablsg. an der Profilnase)
[NACA 63₂-012]

Profilnase mit starker Krümmung
Umschlag lam. - turb. in d. Blase
 $\alpha \uparrow \Rightarrow$ Größe d. Blase nimmt ab
 α sehr groß \Rightarrow keine anlieg. Strög.

- Combined Leading-Edge and Trailing-Edge Stall (Ablsg. an Nase u. Hinterkante)

$$\Delta l/l > 0.15$$

Ausdehn. d. lam. Abl.bl. } $\Rightarrow c_{l \max}$
turb. Ablsg. an d. Hinterk. }

- Trailing-Edge Stall [NACA 63₃-018]
turb. Ablsg. wandert stromauf

Ablöseverhalten der Strömung
über das NACA 4412 Profil

c_p -Verteilung zeigt

- Thin-Airfoil stall

- Trailing-Edge stall

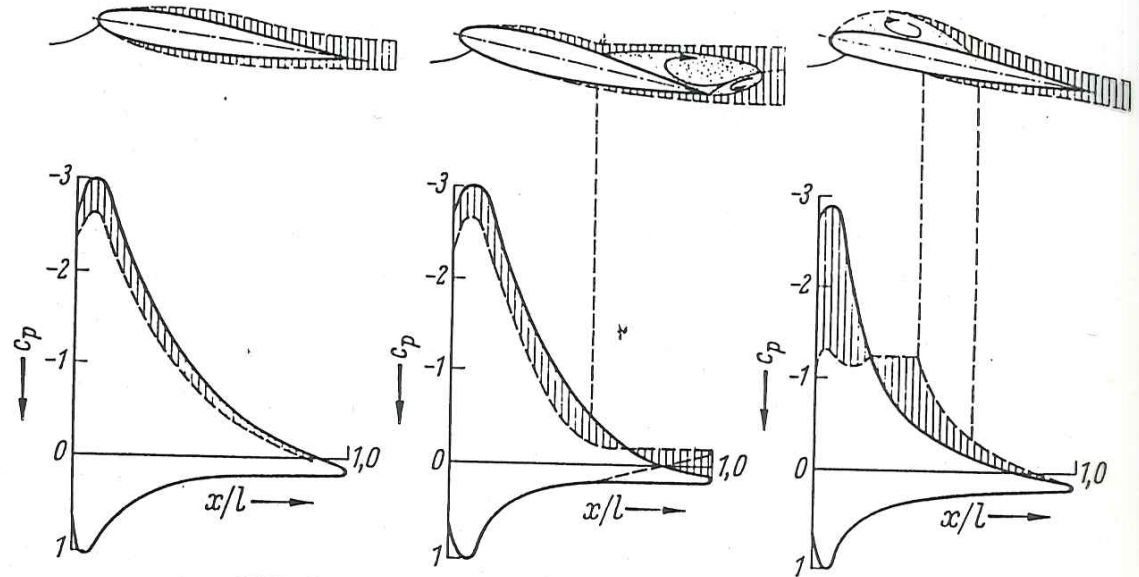
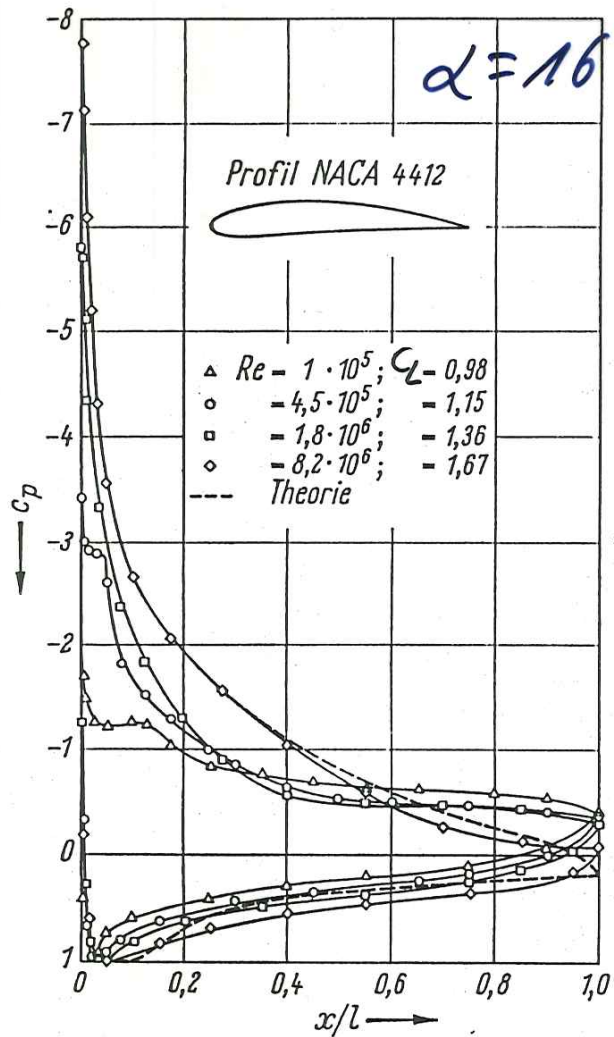
$Re = 8 \cdot 10^6$ kompl. anlieg. Strög.

Einfluß d. Reibung auf Profil=
umströg.

α klein: Verschiebg. vom c_p -Verlauf
durch Reibg.

α größer: Ablösg. an d. Hinterr-
kante \Rightarrow Plateau
(trailing-edge sep.)

α sehr groß: Ablösg. an d. Nase,
gegebenenfalls turb.
Anliegen
(leading-edge sep.)



attached
flow

trail.-
edge
sep.

lead.-
edge
sep.

Profilwiderstand = $f(Re)$

$Re \uparrow \Rightarrow p\text{-u. } \tau\text{-Anteil } \downarrow$

für $Re > 10^6$ $c_{D, \min} \uparrow$ mit $\alpha \uparrow, f \uparrow$

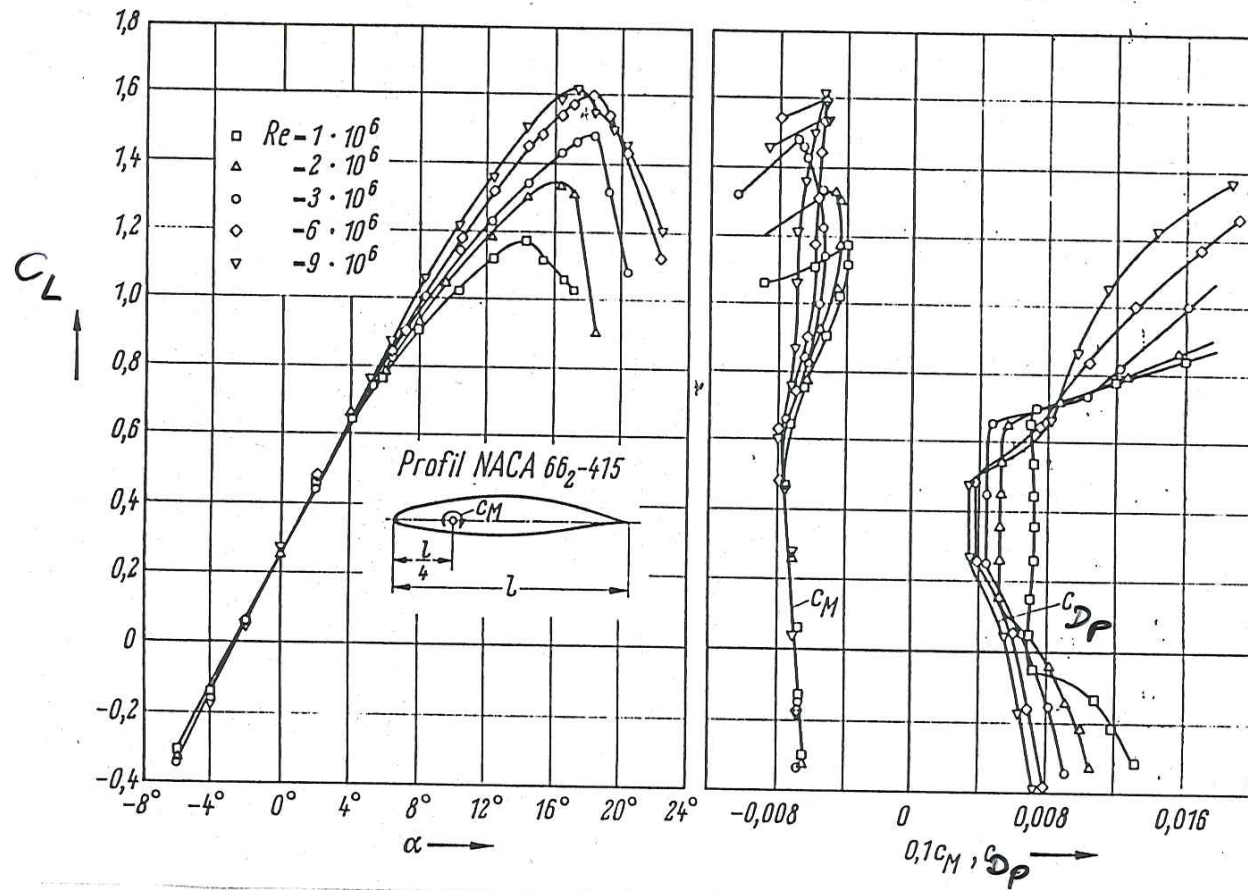
Laminarprofile \rightarrow NACA 66₂-415

$c_{Dp} \neq f(c_L)$ für $Re > 10^6$
und α klein

$c_{D, \min}$ mit $Re \uparrow$

$\alpha \uparrow \Rightarrow$ plötzlicher Anstieg
von c_{Dp} ;

je größer Re , desto kleiner α
für d. Verhalten



Tragflügel in inkompressibler Strömung

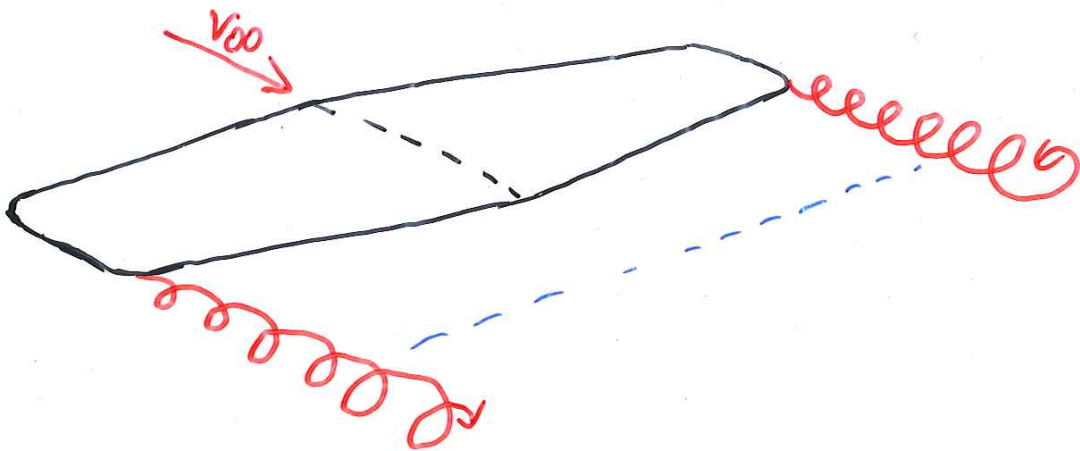
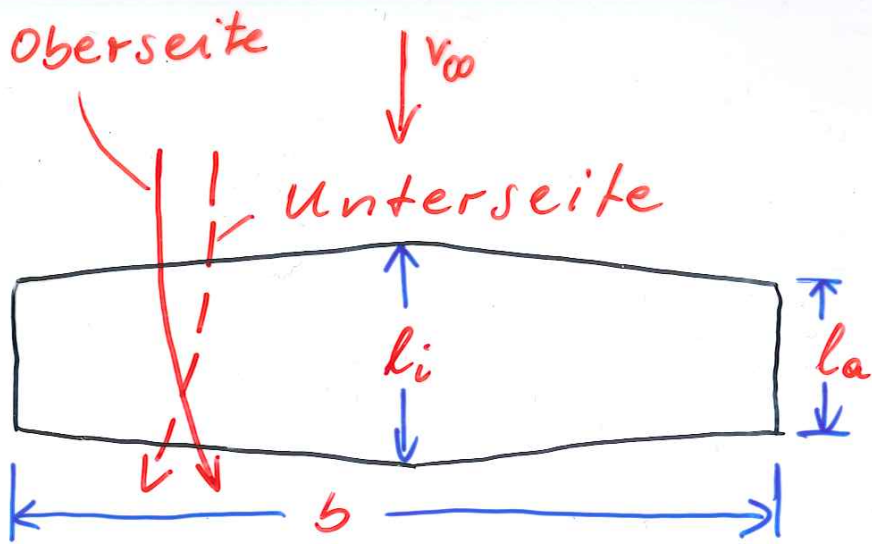
Induzierter Widerstand

bis jetzt: Profile bzw. Tragflügel mit
unendl. Spannweite

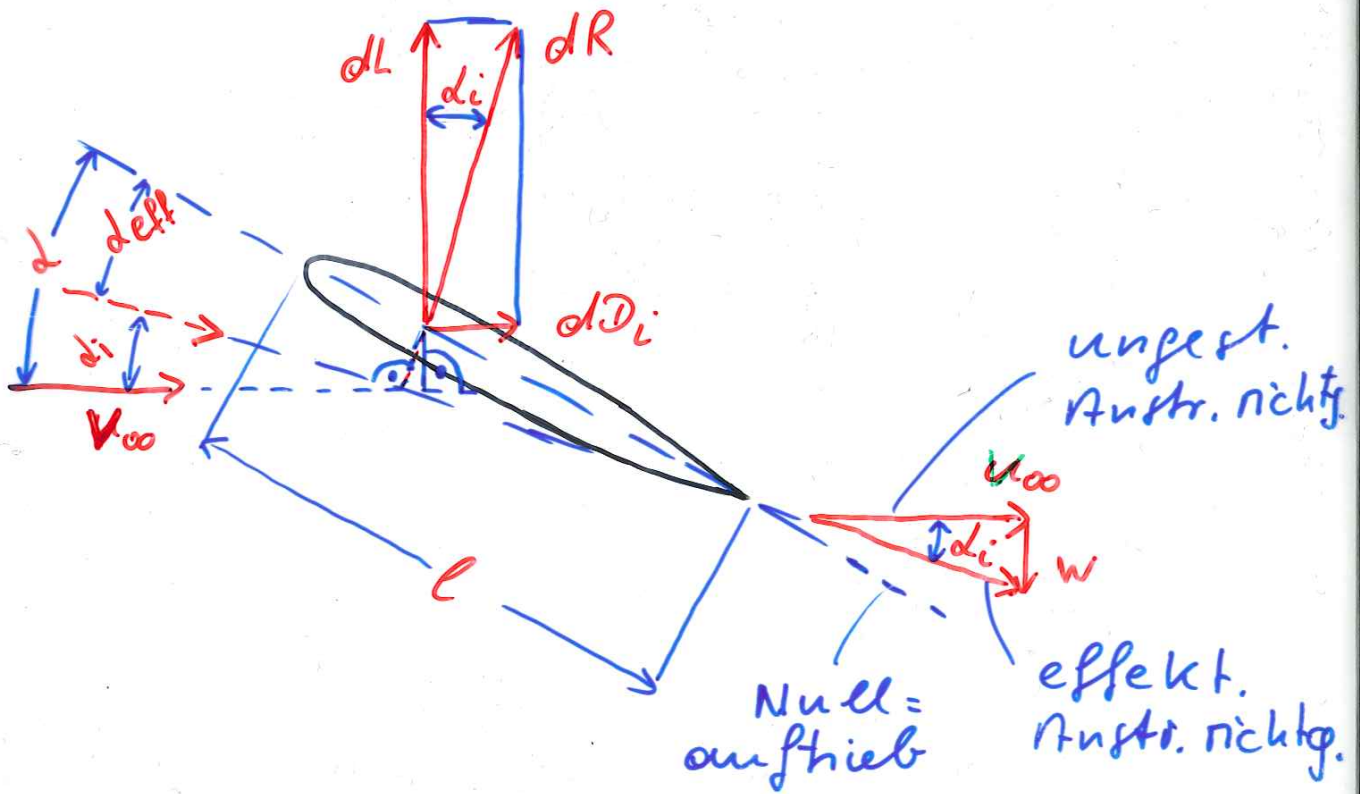
Frage: Existiert ein Unterschied
zw. d. Profilströmung (2D)
und d. Tragflügelströg. (3D)?

3D: zusätzliche Geschw. komp.
in Spannweitenrichtg.
infolge Druckunterschied;

Wirbel entstehen an d.
Flügelspitzen



Wirbel \Rightarrow abwärtsgerichtete
Geschw. Komp. wird
induziert



lok. Profil wird unter α Winkel
 α_{eff} angeströmt, nicht dem
geometr. Winkel α

$$\alpha_{eff} = \alpha - \alpha_i$$

- α_i : induz. Anstellwinkel
- α_{eff} : eff. Anstellwinkel
- α : geometr. Anstellwinkel

Kutta-Zhukhovski \Rightarrow Seitenkraft \perp
zur lok. Auströg.

$\Rightarrow \bullet dL$ kleiner i. Vgl. zur ungest.
Auströg,

$\bullet dD_i$ wird hervorgerufen

$$dL = dR \cos d_i \quad d_i \text{ klein} \quad \approx \quad dR$$

$$dD_i = dR \sin d_i \quad \approx \quad dR d_i$$

dD_i : induzierter Widerstand
(keine Reibg.!, keine Ablösg.!)

\Rightarrow D'Alembertsches Paradoxon
in $3D$ ungültig, denn dD_i exist.

Bemerkg.: D_i aus Energiebetrachtg.

Triebwerke \rightarrow Energie d. Wirbel

\rightarrow ungenutzt vom Flugkörper

\Rightarrow diese Energie muß zusätzlich
von d. Triebwerken aufgebracht
werden.

induzierte Abwärtsgeschw. $w(y) > 0$

$$\Rightarrow d_i = w / v_{\infty}$$

! kompakte Betrachtung!

Kutta-Zhukhovski $\Rightarrow L$

$$dL = \rho v_{\infty} \Gamma dy$$

$$L = \rho v_{\infty} \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(y) dy$$

induzierter Widerstand

$$D_i = \rho \int_{-b/2}^{b/2} w(y) \Gamma(y) dy$$

Biot-Savartsches Gesetz

$$w(y_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{y=-b/2}^{b/2} \frac{d\Gamma}{dy} \frac{dy}{y_0 - y}$$

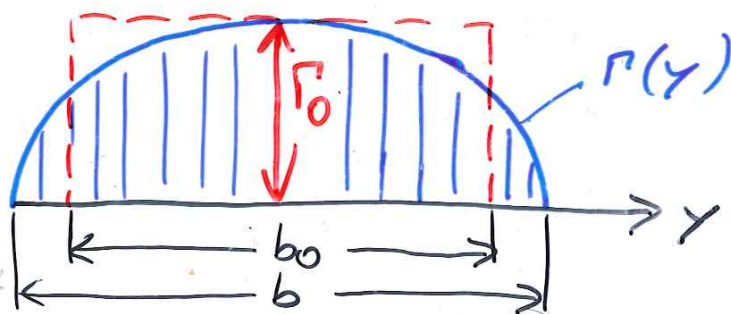
halbunendl. lang Wirbel
mit d. Zirkulation $d\Gamma(y)$

$$\Rightarrow D_i = f(\Gamma(y))$$

Bemerkung: Detaillierte Abt. für L, D_i, w später

Zusammenfassung der Ergebnisse für den Sonderfall d. elliptischen Zirkulationsverteilung

$$\Gamma(y) = \Gamma_0 \sqrt{1 - (y/s)^2}$$



$$\Rightarrow L = \frac{\pi}{4} \rho b v_{\infty} \Gamma_0$$

$$w(y) = \Gamma_0 / 2b = \text{konst}$$

$$D_i = \frac{\pi}{8} \rho \Gamma_0^2$$

Elimination von Γ_0

$$\Rightarrow D_i = \frac{L^2}{\pi \rho_{\infty} b^2}, \quad c_{Di} = \frac{C_L^2}{\pi \Lambda}, \quad d_i = \frac{C_L}{\pi \Lambda}$$

$$\rightarrow c_{Di} = d_i C_L$$

$\Lambda \uparrow \Rightarrow d_i \downarrow$ und $c_{Di} \downarrow$

Bemerkung: $\Gamma_{\text{ellipt.}} \Rightarrow D_i, \text{min}$
(siehe Traglinientheorie)

Gesamtwiderstand (inklomp. Strög.):

$$c_D = c_{DP} + c_{Di} = c_{DP} + \frac{C_L^2}{\pi \Lambda}$$

$c_{DP} = f(\text{Profilform} \rightarrow \text{Reibgseinfl.})$

$$c_{Di} = f(\Lambda)$$

Bzgl. Zshg. zw. c_{Di} u. Λ ist zu be-
denken

$$dc_i/d\Lambda \approx \frac{2\pi\Lambda}{\Lambda+2} \quad (\text{für } \Lambda > 3)$$

$\Rightarrow C_L \downarrow$ mit $\Lambda \downarrow$

Prandtl'sche Traglinientheorie

Theorie entwickelt 1911-1918;

heute noch verwendet in

- Entwurfsabteilungen

- Validierung numerischer Verf.

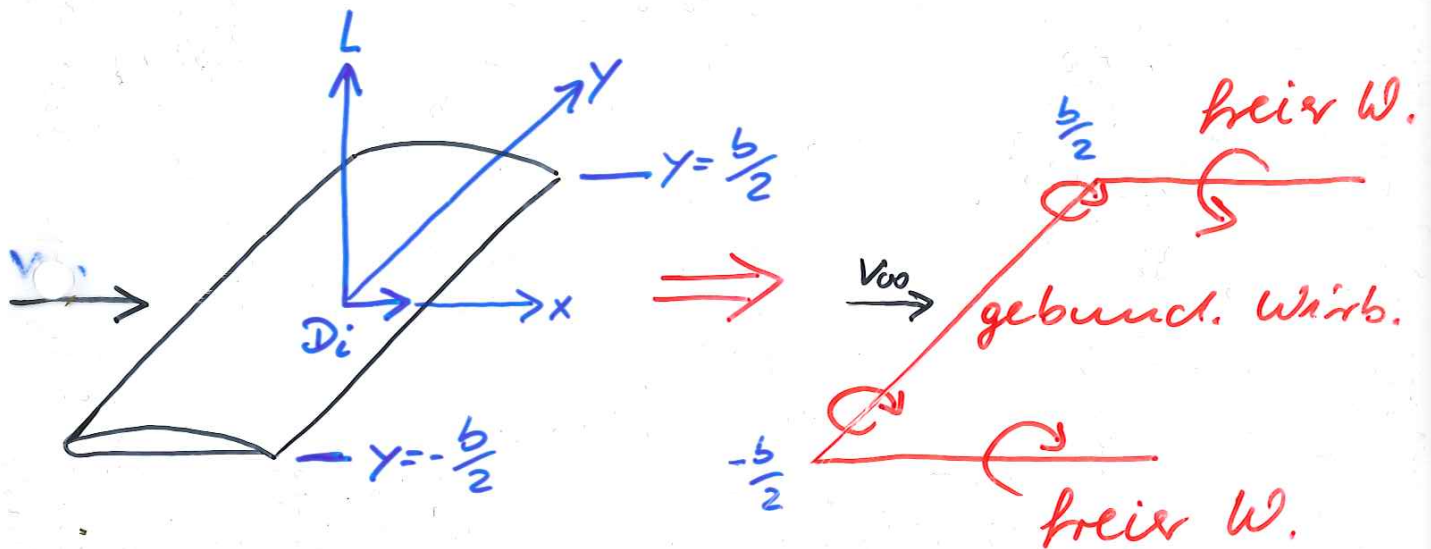
Kern der Theorie:

Tragflügel, L \leftrightarrow Wirbelfäden, Γ
Physik Mathe.

- Wirbelfäden $-\frac{b}{2} \leq \gamma \leq \frac{b}{2}$, $L = \rho_{\infty} V_{\infty} \Gamma$
→ feste Lage: **gebundener Wirbel**
- Wirbel an d. Flügelspitzen
→ mitbewegt: **freie Wirbel**
- 3. Helmholtz'scher Wirbelsatz
→ Wirbelröhre geschlossen:
Auflagerwirbel

⇒ Vorstellung: Hufeisenwirbel

d.h. gebundener Wirbel
+ freie Wirbel ($\rightarrow \infty$)



induzierte Geschwindigkeit $w(y)$

in d. z - y Ebene

$$\text{Biot-Savart} \Rightarrow w(y) = -\frac{\Gamma}{4\pi(\frac{b}{2}+y)} - \frac{\Gamma}{4\pi(\frac{b}{2}-y)}$$

$$\Rightarrow w(y) = -\frac{\Gamma}{4\pi} \frac{b}{(\frac{b}{2})^2 - y^2}$$

$$d\Gamma_1 : -\frac{b}{2} \leq \gamma \leq \frac{b}{2} \quad \text{bzw.} \quad [A, F]$$

$$d\Gamma_2 : [B, E], \quad d\Gamma_3 : [C, D]$$

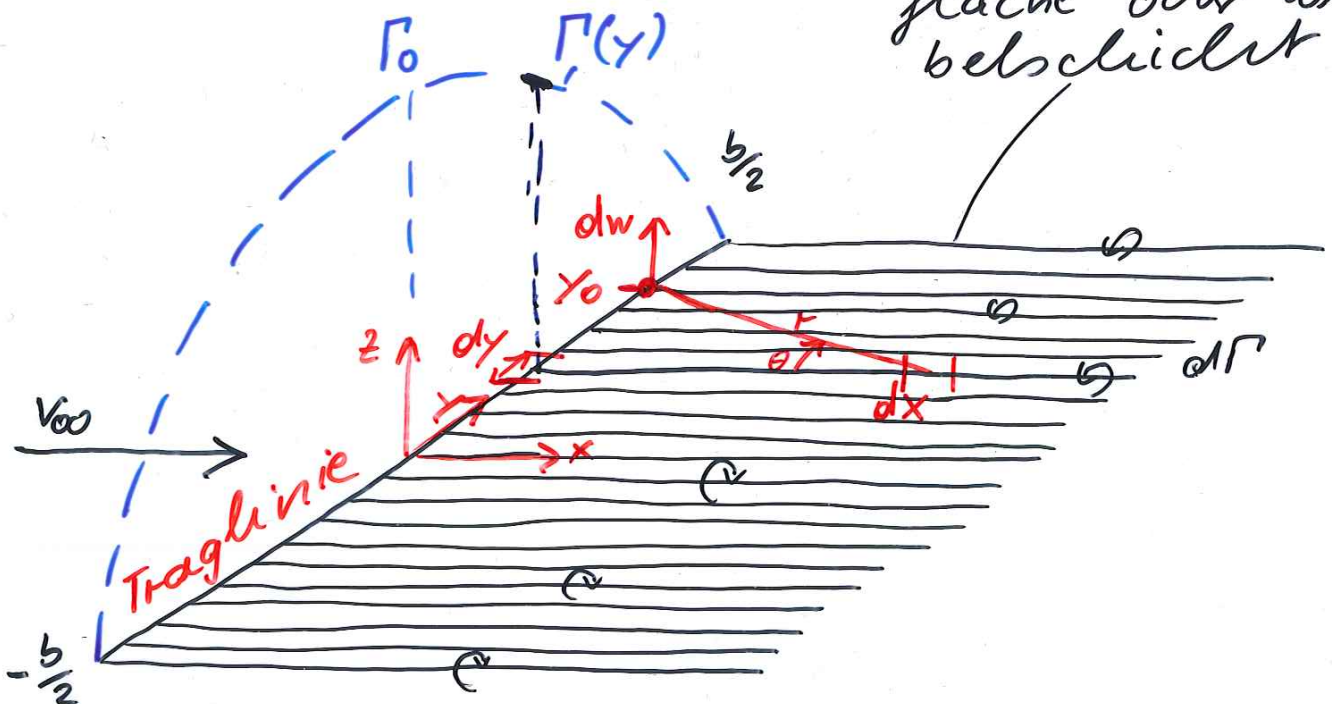
→ Superposition $\Rightarrow \Gamma = f(\gamma)$

! freie Wirbel best. Änderung von Γ !
 • entlang der Traglinie

∞ -viele freie Wirbel \Rightarrow infinit.
 kl. Änd. $d\Gamma$
 \Rightarrow kontinuierl. Darstellg. $\Gamma(\gamma)$

$$\Gamma(\gamma=0) = \Gamma_0$$

kont. Wirbel=
 fläche oder Wir=
 beschicht



Gesamtstärke d. Wirbelschicht
→ 0, da Wirbelpaare entgegengesetzter
Richtung gl. Stärke

Berechnung von $w_0 = w(y_0)$

Element dy , Ort y

Zirkulation $\Gamma(y)$,

Stärke d. freien Wirb. $\hat{=}$ Änderung v. Γ

$$\text{bei } y: d\Gamma(y) = \frac{d\Gamma}{dy} dy$$

Biot-Savart (halbunendl. W.f.):

$$dw = - \frac{1}{4\pi(y_0 - y)} \frac{d\Gamma}{dy} dy$$

$$\Rightarrow w(y_0) = - \frac{1}{4\pi} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{d\Gamma/dy}{y_0 - y} dy$$

$w(y_0)$ infolge d. freien Wirbelschicht

induzierter Anstellwinkel b. y_0

$$\alpha_i(y_0) = \arcsin^{-1} \left(\frac{-w(y_0)}{v_{\infty}} \right)$$

bzw. $v_{\infty} \gg |w(y_0)|$

$$\alpha_i(y_0) = - \frac{w(y_0)}{v_{\infty}}$$

$$\alpha_i(y_0) = \frac{1}{4\pi v_{\infty}} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{d\Gamma/dy}{y_0 - y} dy$$

Auftriebsbeiwert f. Profil bei y_0

$$c_l = \frac{dc_l}{dd} [d_{\text{eff}}(y_0) - d_{L=0}]$$

schlankes Prof.

$$c_l \stackrel{\downarrow}{=} 2\pi [d_{\text{eff}}(y_0) - d_{L=0}]$$

Bemerkung: univertundene Flügel
 $\Rightarrow d_{L=0} = \text{konst}$ in y -Richtung.

Kutta - Zhukhovski

$$\hat{L} = \frac{\rho_{\infty}}{2} v_{\infty}^2 c(\gamma_0) c_l \stackrel{\downarrow}{=} \rho_{\infty} v_{\infty} \Gamma(\gamma_0)$$

$$c_l = \frac{2 \Gamma(\gamma_0)}{v_{\infty} c(\gamma_0)}$$

$$\Rightarrow d_{\text{eff}} = \frac{\Gamma(\gamma_0)}{\pi v_{\infty} c(\gamma_0)} + d_{L=0}$$

mit $d = d_{\text{eff}} + d_i$

$$d(\gamma_0) = \frac{\Gamma(\gamma_0)}{\pi v_{\infty} c(\gamma_0)} + d_{L=0} + \frac{1}{4\pi v_{\infty}} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{d\Gamma/d\gamma}{\gamma_0 - \gamma} d\gamma$$

fundamentale Glp. d. Prandtl'schen
Traglinientheorie

bekannt: Flügelgeom., geom. d , v_{∞}

unbekannt: $\Gamma(\gamma)$

\Rightarrow "Lösung" d. Glp. liefert $\Gamma(\gamma_0)$ f. $-\frac{b}{2} \leq \gamma \leq \frac{b}{2}$

Annahme: $\Gamma(\gamma)$ bekannt !

$\Rightarrow L, D_i, d_i$ berechenbar:

$$L = \int_{-b/2}^{b/2} \hat{L}(\gamma) d\gamma = \rho_{00} v_{00} \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(\gamma) d\gamma$$

$$C_L = \frac{L}{\rho_{00} F} = \frac{2}{v_{00} F} \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(\gamma) d\gamma$$

$$D_i = \int_{-b/2}^{b/2} \hat{D}_i(\gamma) d\gamma = \int_{-b/2}^{b/2} \hat{L} d_i d\gamma = \rho_{00} v_{00} \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(\gamma) d_i(\gamma) d\gamma$$

$$C_{D_i} = \frac{D_i}{\rho_{00} F} = \frac{2}{v_{00} F} \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(\gamma) d_i(\gamma) d\gamma$$

$$d_i = \frac{1}{4\pi v_{00}} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{d\Gamma/d\tilde{\gamma}}{\gamma - \tilde{\gamma}} d\tilde{\gamma}$$

Spezielle Γ -Verteilung:

ellipt. Zirkulationsverteilung

$$\Gamma(y) = \Gamma_0 \sqrt{1 - \left(\frac{2y}{b}\right)^2}, \quad \Gamma(y = \pm \frac{b}{2}) = 0$$

$$\hat{L}(y) = S_{00} V_{00} \Gamma_0 \sqrt{1 - \left(\frac{2y}{b}\right)^2}$$

$$\frac{d\Gamma}{dy} = - \frac{4\Gamma_0}{b^2} \frac{y}{\left(1 - \frac{4y^2}{b^2}\right)^{1/2}}$$

$$\Rightarrow w(y_0) = \frac{\Gamma_0}{\pi b^2} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{y}{\left(1 - \frac{4y^2}{b^2}\right)^{1/2} (y_0 - y)} dy$$

trigonometr. Substitution

$$y = \frac{b}{2} \cos \theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = -\frac{b}{2} \sin \theta$$

$$w(\theta_0) = \frac{\Gamma_0}{\pi b^2} \int_{\pi}^0 \frac{\frac{b}{2} \cos \theta \cdot (-\frac{b}{2}) \sin \theta}{\frac{b}{2} (\cos \theta_0 - \cos \theta) \underbrace{\left(1 - \frac{4}{b^2} \frac{b^2}{4} \cos^2 \theta\right)^{1/2}}_{\sin \theta}} d\theta$$

$$\left(1 - \frac{4}{b^2} y^2\right)^{1/2} = \left(1 - \frac{4}{b^2} \frac{b^2}{4} \cos^2 \theta\right)^{1/2} = \sin \theta$$

$$\Rightarrow w(\theta_0) = -\frac{\Gamma_0}{2\pi b} \int_{\pi}^0 \frac{\cos \theta}{\cos \theta_0 - \cos \theta} d\theta$$

$$w(\theta_0) = -\frac{\Gamma_0}{2\pi b} \int_0^{\pi} \frac{\cos \theta}{\cos \theta - \cos \theta_0} d\theta$$

mit

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos(n\theta)}{\cos \theta - \cos \theta_0} d\theta = \frac{\pi \sin n\theta_0}{\sin \theta_0}$$

$n=1 \Rightarrow$ $w(\theta_0) = -\frac{\Gamma_0}{2b}$ = konst. (s.o.)

\Rightarrow $\alpha_i = -\frac{w}{v_{\infty}} = \frac{\Gamma_0}{2b v_{\infty}}$ $\alpha_i \rightarrow 0$ für $b \rightarrow \infty$

Γ_0 über C_L

$$L = \rho_{\infty} v_{\infty} \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(y) dy = \rho_{\infty} v_{\infty} \Gamma_0 \int_{-b/2}^{b/2} \left(1 - \frac{4y^2}{b^2}\right)^{1/2} dy$$

$$L = \rho_{\infty} v_{\infty} \Gamma_0 \frac{b}{2} \int_0^{\pi} \sin^2 \theta d\theta = \rho_{\infty} v_{\infty} \Gamma_0 \frac{b}{4} \pi$$

\uparrow
 $y = \frac{b}{2} \cos \theta$

$$\Gamma_0 = \frac{4L}{S_{00} v_{00} b \pi} = \frac{4 \frac{1}{2} S_{00} v_{00}^2 F C_L}{S_{00} v_{00} b \pi}$$

$$\Gamma_0 = \frac{2 v_{00} F C_L}{b \pi}$$

$$\Rightarrow d_i = \frac{C_L F}{\pi b^2} = \frac{C_L}{\pi \Lambda} \neq f(\gamma)$$

$$C_{D,i} = \frac{2 d_i}{v_{00} F} \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(\gamma) d\gamma$$

$$= \frac{2 d_i \Gamma_0 b}{v_{00} F 2} \int_0^{\pi} \underbrace{\sin^2 \theta}_{\pi/2} d\theta$$

$$C_{D,i} = \frac{\pi b}{2 v_{00} F} \underbrace{\frac{C_L}{\pi \Lambda}}_{d_i} \underbrace{\frac{2 v_{00} F C_L}{b \pi}}_{\Gamma_0}$$

$$C_{D,i} = \frac{C_L^2}{\pi \Lambda}$$

\Rightarrow Beitrag.: Auftriebswiderstand
statt induz. Widerstand

- $c_{D,i} \sim c_L^2 \Rightarrow c_{D,i}$ groß während
START und
LANDUNG !

Bemerkg.: im Reiseflug
 D_i bis zu 25% von D

- $c_{D,i} \sim \frac{1}{\Lambda} \Rightarrow \Lambda \uparrow \rightarrow c_{D,i} \downarrow$
Achtg.: Festigkeit

Bemerkg.: Wright Flyer $\Lambda = 6$

heutige V-flugzeuge $\Lambda = 6 \div 8$!

Segelflugzeuge $\Lambda = 10 \div 22$

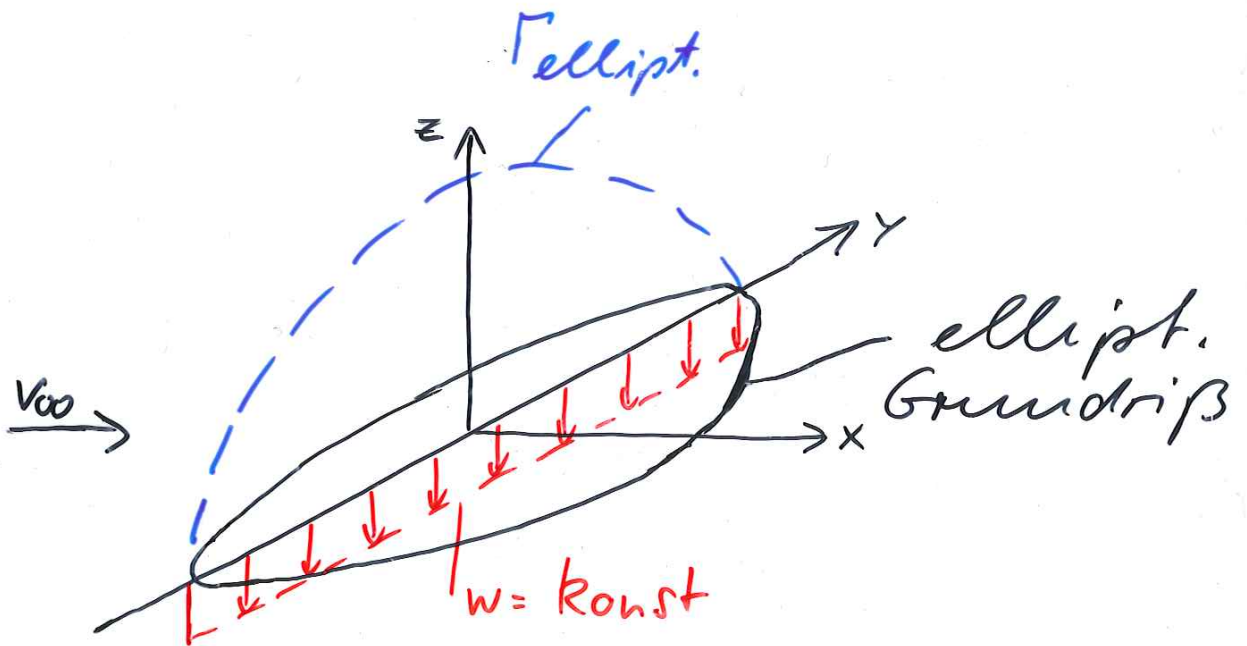
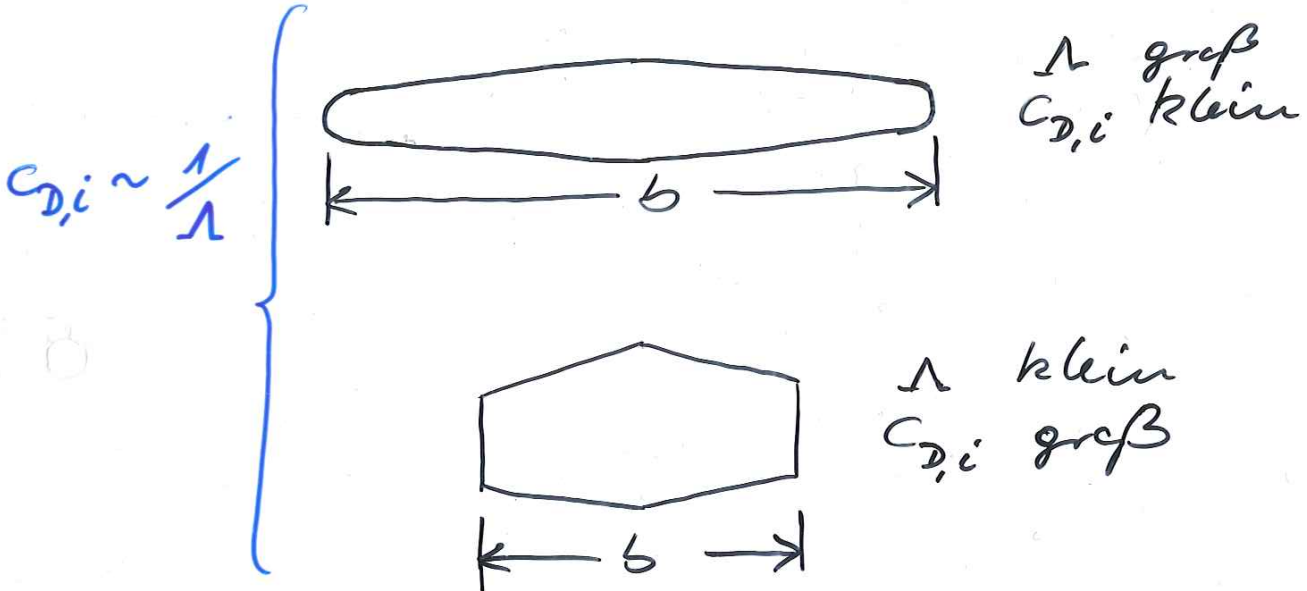
Grundriß d. Flügels für
unverwundene (Annahme) Flügel
mit ellipt. Γ -Verteilg.

$$\alpha_i = \text{konst} \Rightarrow \alpha_{\text{eff}} = \alpha - \alpha_i = \text{konst.}$$

$$\Rightarrow c_l = 2\pi (\alpha_{\text{eff}} - \alpha_{L=0}) = \frac{\hat{L}(\gamma)}{q_{\infty} c(\gamma)} \quad (\text{Flügel: schnitt})$$

$$= \text{konst.}$$

$\Rightarrow c(\gamma) = \frac{\hat{L}(\gamma)}{900 c_e} : \text{ellipt. Verteilg. in } \gamma$



Allgemeine Γ -Verteilung

Transformation $y = -\frac{b}{2} \cos \theta$ in Γ -ellipt.

$$\Rightarrow \Gamma(\theta) = \Gamma_0 \sin \theta \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

\Rightarrow Ansatz: sinus-basierte
Fourier Reihe für Γ

$$\Gamma(\theta) = 2b v_{\infty} \sum_{n=1}^N A_n \sin(n\theta)$$

Genauigkeit = f (# d. Terme: N)

Bestimmung von A_n :

Grundgleichg. d. Prandtl'schen
Traglinientheorie ist zu erfüllen

Mit

$$\frac{d\Gamma}{dy(\theta)} = \frac{d\Gamma}{d\theta} \frac{d\theta}{dy} = 2b v_{\infty} \sum_{n=1}^N n A_n \cos(n\theta) \frac{d\theta}{dy}$$

⇒ Grundgleichung

$$\alpha(\theta_0) = \frac{2b}{\pi c(\theta_0)} \sum_{n=1}^N A_n \sin(n\theta_0) + \alpha_{L=0}(\theta_0) + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sum_{n=1}^N n A_n \cos(n\theta)}{\cos \theta - \cos \theta_0} d\theta$$

mit $\int_0^{\pi} \frac{\cos(n\theta)}{\cos \theta - \cos \theta_0} d\theta = \frac{\pi \sin(n\theta_0)}{\sin \theta_0}$

folgt

$$\alpha(\theta_0) = \frac{2b}{\pi c(\theta_0)} \sum_{n=1}^N A_n \sin(n\theta_0) + \alpha_{L=0}(\theta_0) + \sum_{n=1}^N n A_n \frac{\sin(n\theta_0)}{\sin \theta_0}$$

bekannt: $b, c(\theta_0), \alpha_{L=0}(\theta_0)$

unbekannt: A_n

Bzg. f. θ_0 : N Unbekannte

⇒ Formulierz. für $N-1$ weitere Schritte

→ num. Lösg. f. $A_n \Rightarrow \Gamma(\theta)$ bekannt

$\Gamma(\theta)$ sei bekannt :

$$C_L = \frac{2}{v_{\infty} F} \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(y) dy = \frac{2b^2}{F} \sum_{n=1}^N A_n \int_0^{\pi} \sin(n\theta) \sin \theta d\theta$$

mit $\int_0^{\pi} \sin(n\theta) \sin \theta d\theta = \begin{cases} \pi/2 & n=1 \\ 0 & n \neq 1 \end{cases}$

$$C_L = A_1 \pi \frac{b^2}{F} = A_1 \pi \Lambda$$

Achtung: $A_1 = f(A_n)$

$$d_i(y_0) = \frac{1}{4\pi v_{\infty}} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{d\Gamma/dy}{y_0 - y} dy$$

$$d_i(\theta_0) = \sum_{n=1}^N n A_n \frac{\sin(n\theta_0)}{\sin \theta_0} \quad 0 \leq \theta_0 \leq \pi$$

$$C_{D,i} = \frac{2}{v_{\infty} F} \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(y) d_i(y) dy$$

$$C_{D,i} = \frac{2b^2}{F} \int_0^{\pi} \left(\sum_{n=1}^N A_n \sin(n\theta) \right) d_i(\theta) \sin \theta d\theta$$

$$C_{D,i} = \frac{2b^2}{F} \int_0^{\pi} \left(\sum_{n=1}^N A_n \sin(n\theta) \right) \left(\sum_{n=1}^N n A_n \sin(n\theta) \right) d\theta$$

mit

$$\int_0^{\pi} \sin(m\theta) \sin(n\theta) d\theta = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \pi/2 & m = n \end{cases}$$

$$\Rightarrow C_{D,i} = \frac{2b^2}{F} \left(\sum_{n=1}^N n A_n^2 \right) \frac{\pi}{2} = \pi \Lambda \sum_{n=1}^N n A_n^2$$

$$C_{D,i} = \pi \Lambda \left(A_1^2 + \sum_{n=2}^N n A_n^2 \right)$$

$$= \pi \Lambda A_1^2 \left(1 + \sum_{n=2}^N n \left(\frac{A_n}{A_1} \right)^2 \right)$$

$$C_{D,i} = \frac{C_L^2}{\pi \Lambda} (1 + \delta)$$

$\delta \geq 0 \Rightarrow C_{D,i}$ minimal für
d. ellipt. Γ -Verteilung
($\delta = 0$)

$$C_{D,i} = \frac{C_L^2}{\pi \Lambda e} \quad \text{mit } e = (1 + \delta)^{-1} : \text{Spann-} \\ \text{weiten-} \\ \text{faktor}$$

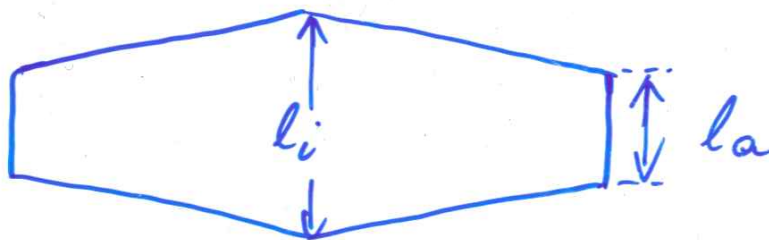
Γ -Verteilg. ($c_{D,i}$ min.!) erfordert
ellipt. F_i ;

$F_{\text{ellipt.}}$: teuer in d. Fertigg.

Flügelzuspitzung $\lambda = \frac{l_a}{l_i}$ ist
ein Kompromiss zw. Recht. u. Fell.

elliptisch

Rechteck



Flügel mit
Zuspitzung

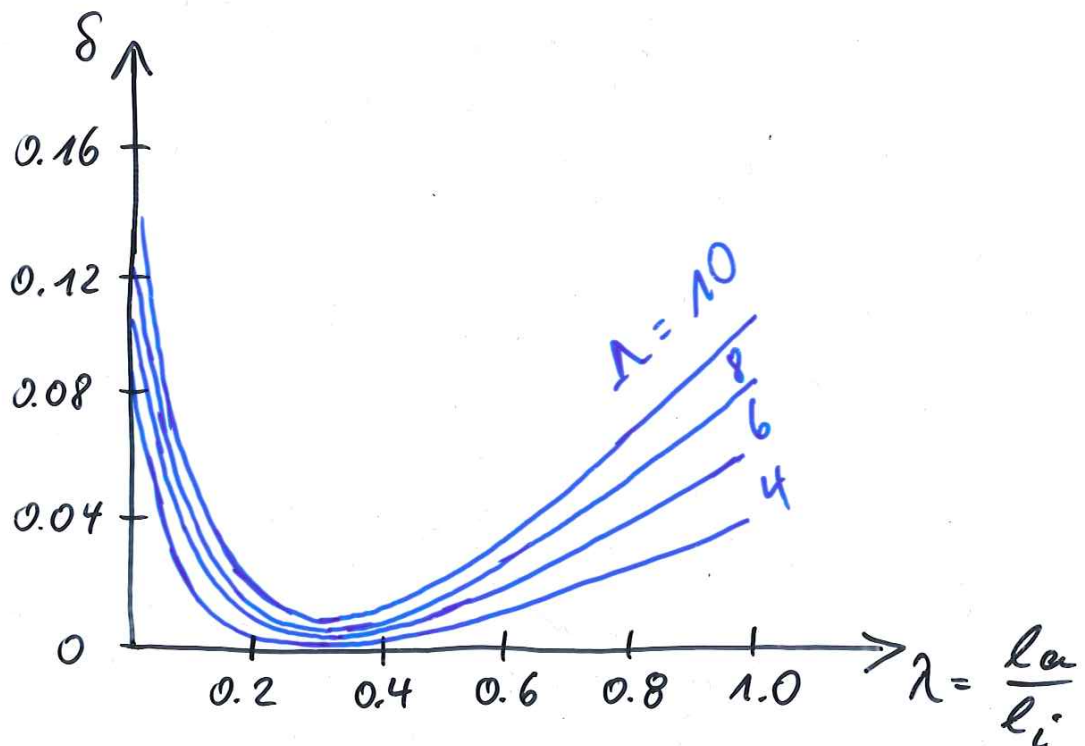
$$\delta = f(\lambda; \Lambda)$$

$$\rightarrow \delta_{\min}(\Lambda) \leq 0.02$$

$$\Rightarrow C_{D,i} = C_{D,i \min} (1 + \varepsilon)$$

erreichbar

Vorteil: Tragflügel mit Zuspitzung sind einfacher zu fertigen.



Minimierung von $C_{D,i}$ durch Λ

$$C_{D,i} \sim \frac{1}{\Lambda}$$

$$C_D = C_{DP} + \frac{C_L^2}{\pi \Lambda e}$$

Gesamt:
Widerstand

zwei Tragflügel Λ_1, Λ_2

$$C_{D,1} = C_{DP} + \frac{C_L^2}{\pi \Lambda_1 e}$$

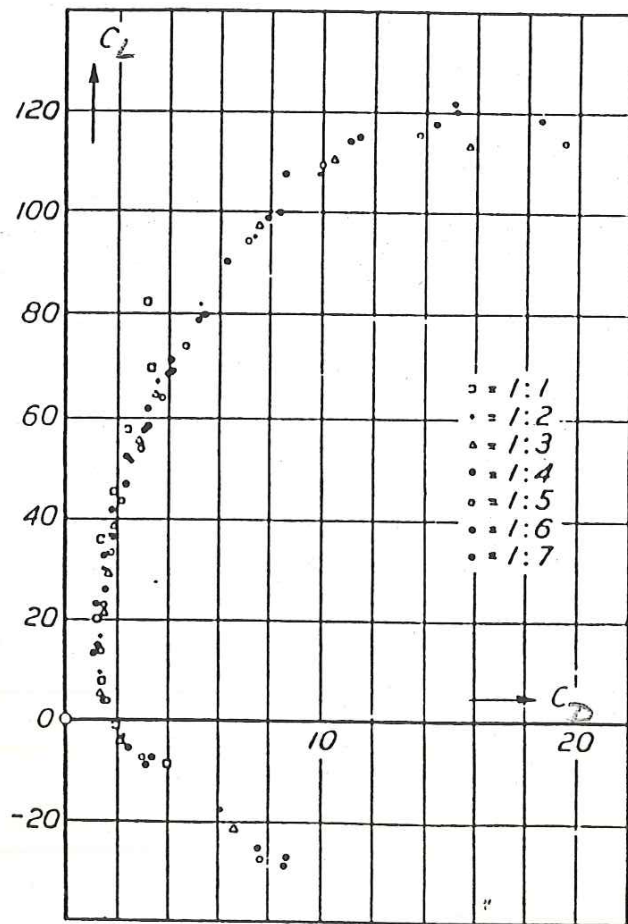
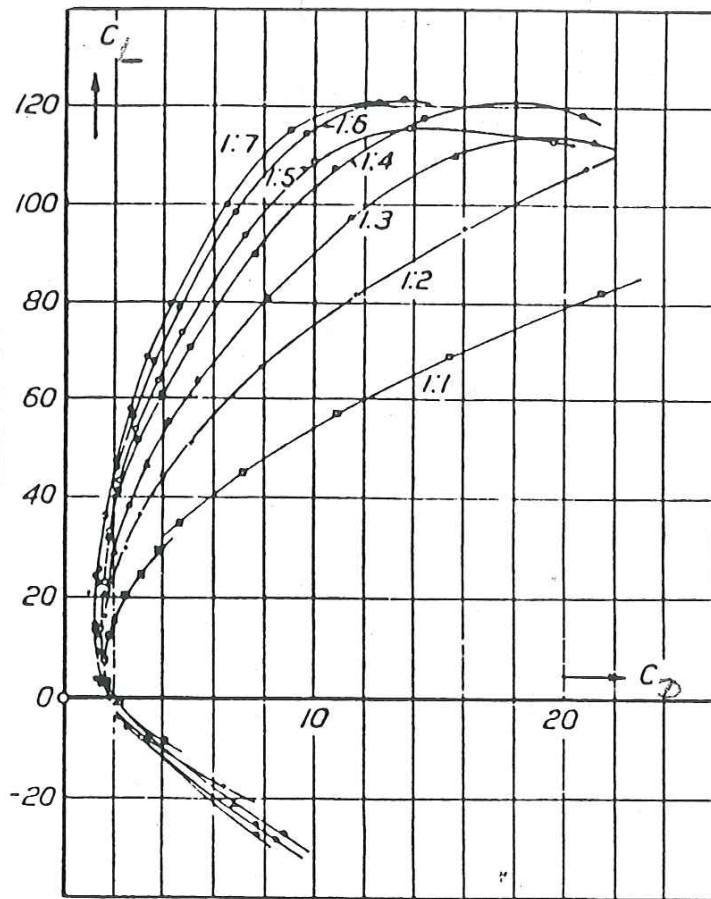
$$C_{D,2} = C_{DP} + \frac{C_L^2}{\pi \Lambda_2 e}$$

e sei approx. konstant

$$C_{D,1} = C_{D,2} + \frac{C_L^2}{\pi e} \left(\frac{1}{\Lambda_1} - \frac{1}{\Lambda_2} \right)$$

\Rightarrow Abb. v. Λ_2 -Daten auf Λ_1 -Konfig.

Bezugskonfig. von Prandtl: $\Lambda = 5$



$$\left. \frac{dC_L}{dd} \right|_{3D} \neq \left. \frac{dC_L}{dd} \right|_{2D} \quad \vdots$$

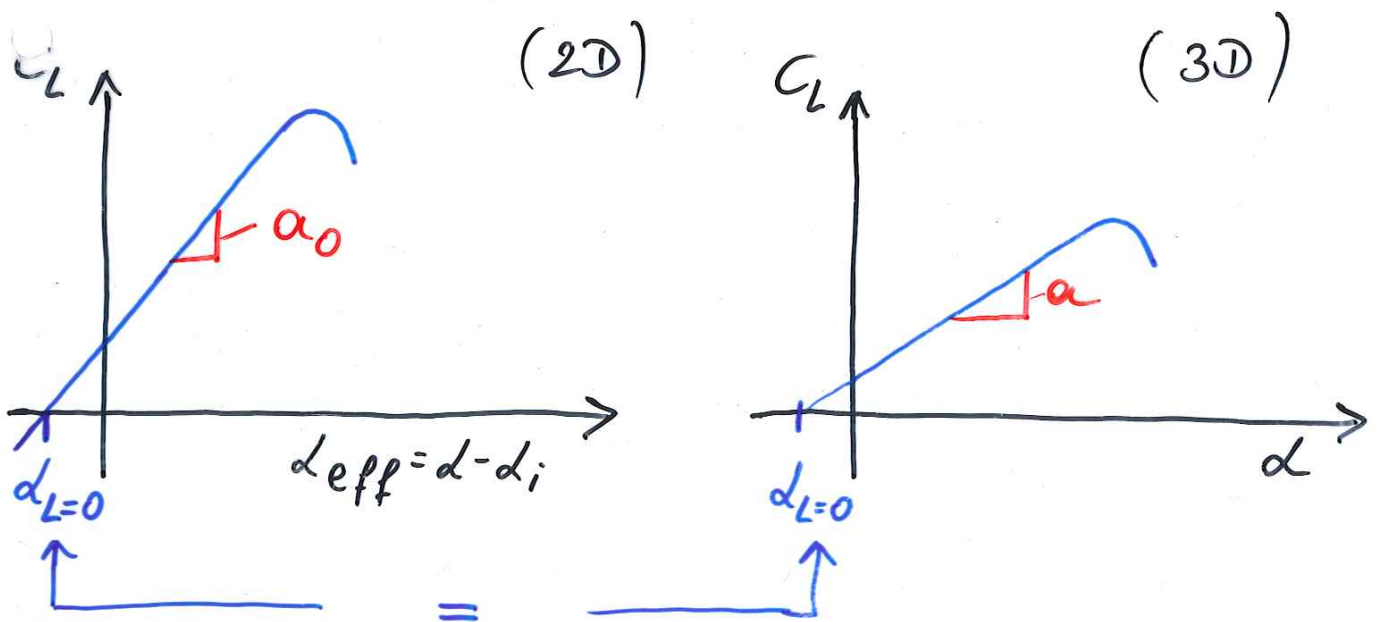
Annahme: unvorwinkelt Flügel,
ellipt. F

$$\Rightarrow d_i, d_{eff}, c_e \neq f(\gamma)$$

$$\Rightarrow C_L = c_e$$

$$\frac{dC_L}{dd_{eff}} = \alpha_0 \quad \xrightarrow{\text{z. Vgl.}} \quad \frac{dC_L}{dd} = ?$$

$$d = d_{eff} + d_i \quad \Rightarrow \quad \frac{dC_L}{dd} = \alpha < \frac{dC_L}{dd_{eff}} = \alpha_0$$



Zusammenhang: $\frac{dc_L}{dd_{eff}}$ u. $\frac{dc_L}{dd}$

$$\frac{dc_L}{dd_{eff}} = \frac{dc_L}{d(d-d_i)} = \alpha_0$$

$$\Rightarrow c_L = \alpha_0 (d - d_i) + \text{konst}$$

$$c_L = \alpha_0 \left(d - \frac{c_L}{\pi \Lambda} \right) + \text{konst}$$

impl. Differentiation

$$\frac{dc_L}{dd} = \alpha_0 - \frac{\alpha_0}{\pi \Lambda} \frac{dc_L}{dd}$$

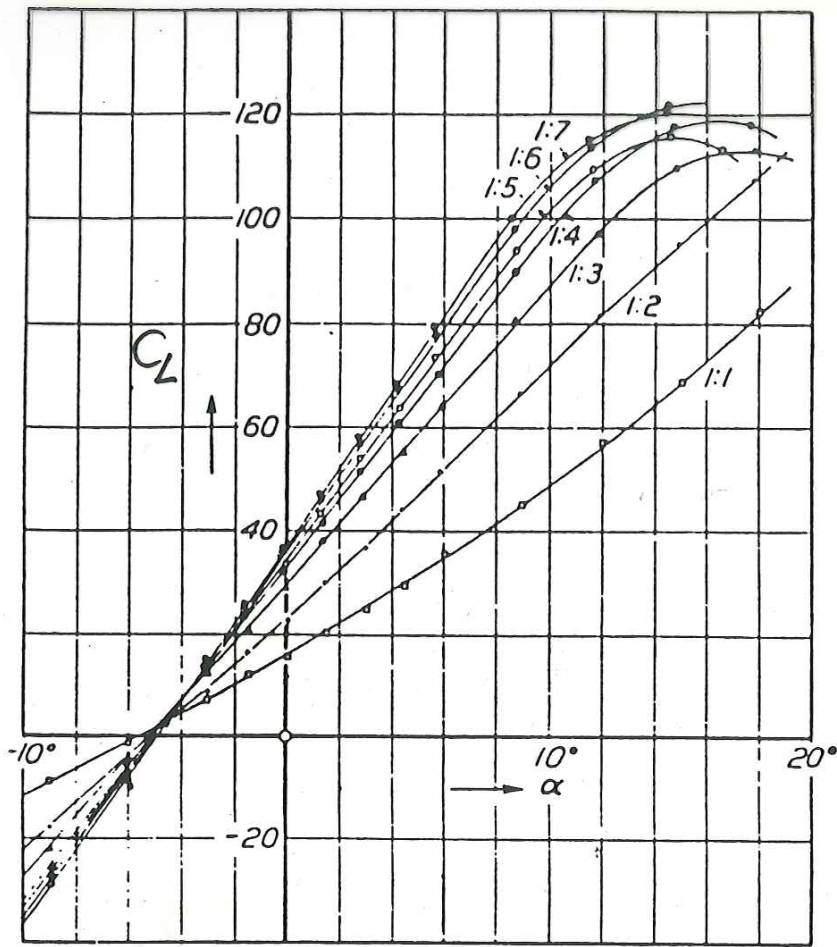
$$\frac{dc_L}{dd} = \frac{\alpha_0}{1 + \frac{\alpha_0}{\pi \Lambda}} = \alpha$$

ellipt. Grundriß

$$\alpha = \frac{\alpha_0}{1 + \frac{\alpha_0}{\pi \Lambda} (1 + \zeta)}$$

allg. Grundriß

$$0.05 \leq \zeta \leq 0.25$$



$\Lambda \rightarrow \infty \Rightarrow \alpha \rightarrow \alpha_0$

Λ klein \Rightarrow Diff. zw. α, α_0 groß

Basis d. Prandtl'schen Traglinientheorie; lin. Zshg. c_l & α

$$c_l = 2\pi [\alpha_{\text{eff}}(\gamma_0) - \alpha_{L=0}]$$

nicht gültig für α groß!

⇒ $c_{l,\text{max}}$ -Analyse nicht direkt mögl.

Erweiterung d. Traglinientheorie

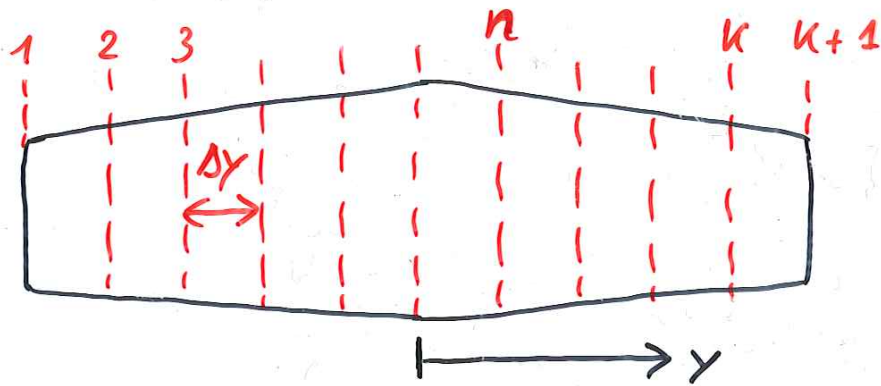
geschl. Lösg. für α ; u. L wird durch num., iterative Lösg. ersetzt

→ Lösg. in mehreren Profilschn.

Annahme: F , Verwindg., Profile sowie $c_l(\gamma; \alpha)$ -Daten bekannt

Schritte d. num. Verfahrens

1. Aufteilg., $k+1$ spannweite Schritte



2. Vorgabe $\Gamma^v = \Gamma^0_{\text{ellipt.}}$

3.
$$d_i(y_n) = \frac{1}{4\pi v_{\infty}} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{d\Gamma/dy}{y_n - y} dy$$

4.
$$d_{\text{eff}}(y_n) = d - d_i(y_n)$$

5. c_e am Rand von $c_e(\tilde{z})$ -Daten

6.
$$S_{\infty} v_{\infty} \Gamma^{v+1}(y_n) = \frac{1}{2} S_{\infty} v_{\infty}^2 c_n c_{e|n}$$

$$\Rightarrow \Gamma^{v+1}(y_n) = \frac{1}{2} v_{\infty} c_n c_{e|n}$$

7.
$$\frac{\Gamma^{\nu+1} - \Gamma^\nu}{\Gamma^\nu} < \varepsilon \equiv 10^{-5} \quad (\text{z. Bsp.})$$

ja \Rightarrow konvergiert

nein $\Rightarrow \Gamma^{\nu+1} = \Gamma^\nu + \varphi (\Gamma^{\nu+1} - \Gamma^\nu)$

$\varphi = 0.05$ (z. Bsp.)

8. $\Gamma^{\nu+1} \rightarrow$ Schritt 3.

9. wenn Γ konvergiert (siehe 7.)

$$C_L = \frac{2}{V_{\infty} F} \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(\gamma) d\gamma$$

$$C_{D,i} = \frac{2}{V_{\infty} F} \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(\gamma) d_i(\gamma) d\gamma$$

Verfahren ist näherungsweise gültig
im mittleren C_L -Bereich ($\rightarrow C_{L, \max}$)

Bemerkg.: große Anstellwinkel

\Rightarrow Strög. ablösegefährdet,
extrem dreidim.;

d.h. Verletzg. d. Voraus-
setzgn. d. Tragflügelth.;

einsetzbar in d. ersten
Entwurfsphasen!

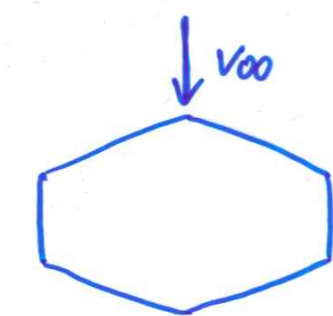
Tragflächentheorie

- Traglinientheorie: Λ groß,
Ergebnis L, D_i, R

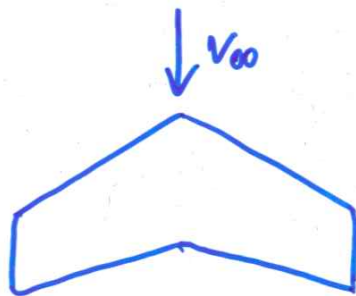
- Erweiterte Traglinientheorie oder
Dreiviertelpunktmethode:
→ Traglinie im Einviertelpkt.
→ kinemat. Strögsbedg. im Drei-
viertelpkt.

Ergebnis: L, D_i, R, M
für schiebende u. Pfeilflügel

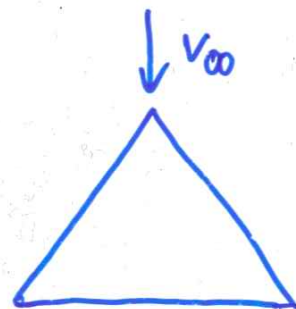
- Tragflächentheorie:
Flügel mit bel. F u. Λ



Λ klein



Pfeilflügel

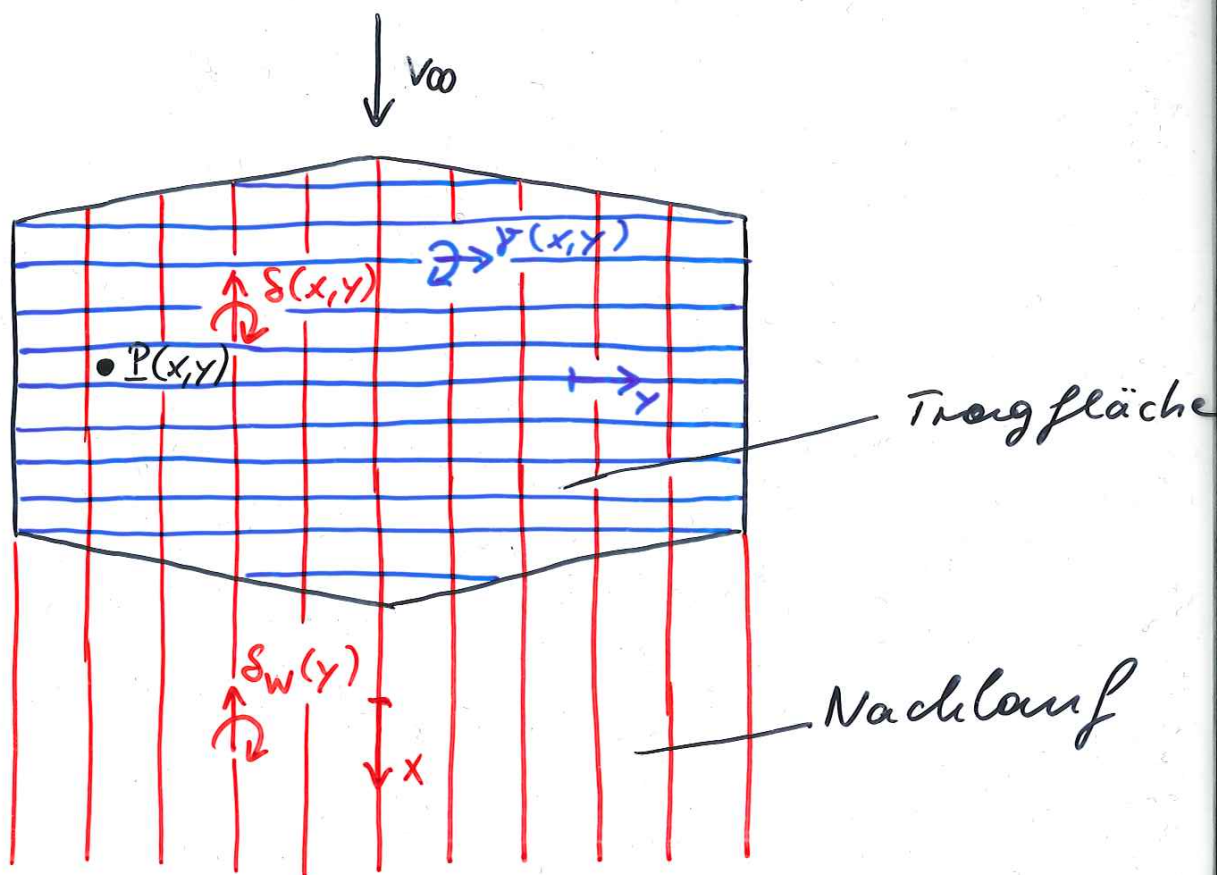


Δ -Flügel

Traglinientheorie: Γ auf Linie konz.

Tragflächentheorie: Γ flächenhaft verteilt

einzelne Traglinie ersetzt durch viele Traglinie in z -Richtung



∞ -viele Linien \Rightarrow Wirbelfläche

• Linien parallel zur y -Richtung:

$\gamma(x,y) \rightarrow$ Wirbelstärke / Einheitslänge

- Linien parallel zur x -Richtung:
 $\delta(x, y) \rightarrow$ Wirbelstärke / Einheitslänge

γ, δ soort, daß induz. Geschw.
 Drehungsfreiheit sichern

Überlappung v. $\gamma, \delta \Rightarrow$ tragende
 Fläche bzw.

γ : Spannweite, δ : ^{Tragfläche} flügel tief. Anteil

Nachlauf: freie Wirbel durch δ_w
 $\delta_w = f(y) = \delta(x_{te}, y)$

Bestimmung von $\gamma(x, y)$ u. $\delta(x, y)$
 aus kinemat. Randbedingung
 \rightarrow Grundriß ist Stromfläche, d.h.

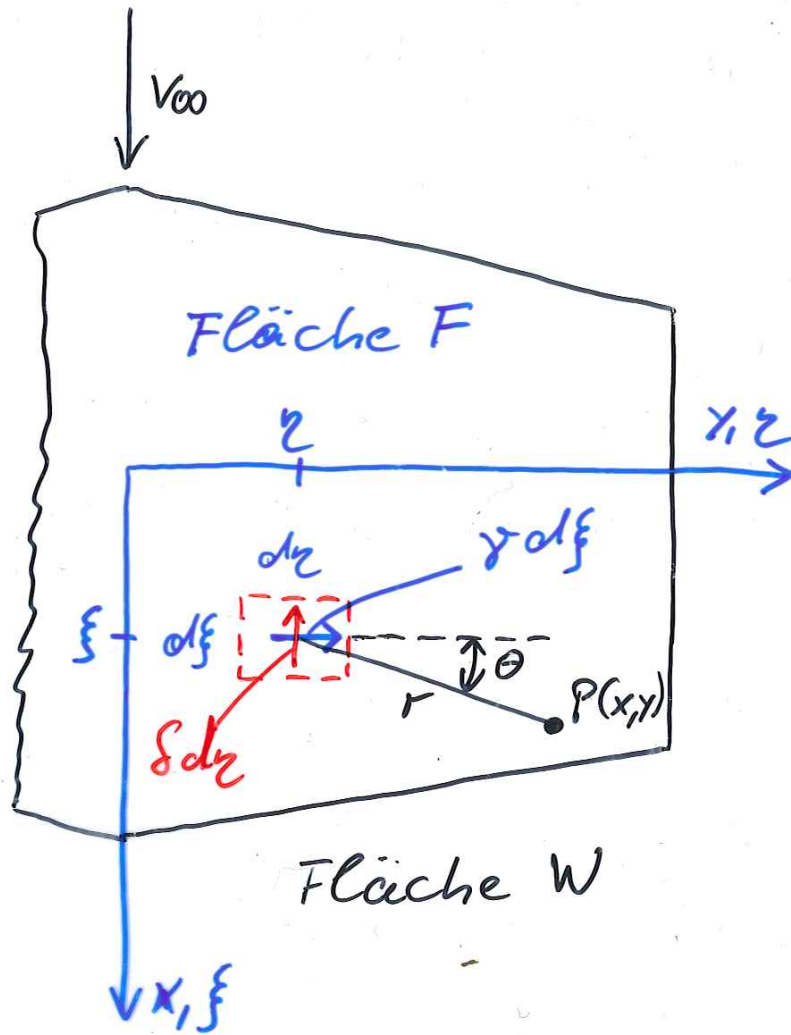
$$v_{\infty, n} + w(x, y) = 0,$$

Wölbung d. Flügels über $dz(x, y)$

$W(x, y) : ?$

Biot - Savart'sches Gesetz

$$dA = d\xi d\eta \text{ in } \xi, \eta$$



• induz. Geschw. $d\vec{w}$ durch $I d\vec{s}$

$$\|d\vec{w}\| = \left\| \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{\|\vec{r}\|^3} \right\| = \frac{I d\xi d\eta}{4\pi} \frac{r d\eta \sin\theta}{r^3}$$

$$\Rightarrow (dw)_y = - \frac{I d\xi d\eta}{4\pi} \frac{x - \xi}{r^3}$$

- Anteil an d. induz. Geschw. v. S d z

$$(dw)_S = - \frac{S d\xi dz}{4\pi} \frac{\gamma - z}{r^3}$$

- Anteil d. Nachlaufs

$$(dw)_{S_w} = - \frac{S_w d\xi dz}{4\pi} \frac{\gamma - z}{r^3}$$

Addition, Integration über F u. W

$\Rightarrow w(x, \gamma)$ in $\underline{P}(x, \gamma)$

$$w(x, \gamma) = - \frac{1}{4\pi} \iint_F \frac{(x-\xi) \varphi(\xi, z) + (\gamma-z) \delta(\xi, z)}{[(x-\xi)^2 + (\gamma-z)^2]^{3/2}} d\xi dz$$

$$- \frac{1}{4\pi} \iint_W \frac{(\gamma-z) S_w(\xi, z)}{[(x-\xi)^2 + (\gamma-z)^2]^{3/2}} d\xi dz$$

mittels $v_{\infty, n} + w(x, \gamma) = 0 \Rightarrow \varphi(\xi, z)$
 $\delta(\xi, z)$

für $F \equiv$ Strom-
 fläche

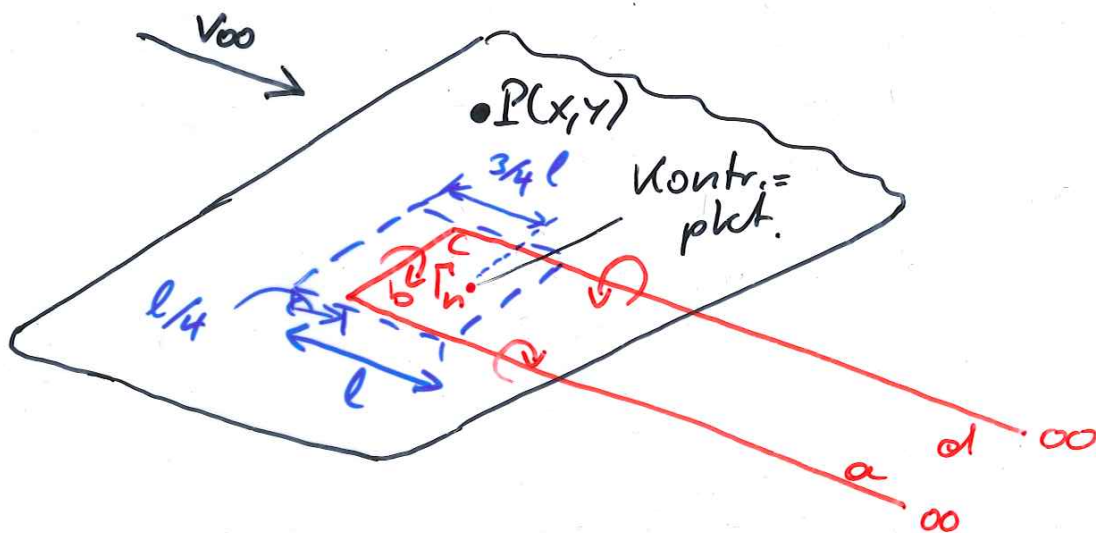
Berechnung von γ , δ wie beim
Panelverfahren

- Aufstufg. in Panels
- γ, δ konst. od. lin. od.
- algebr. Bgm. in Kontrollpkt.
- Lösg. d. Alg. systems num.

Vortex-Lattice Methode

"vereinfachte" diskrete Tragfl. th.

- endl. # v. Hufeisenwirbeln mit Γ_n

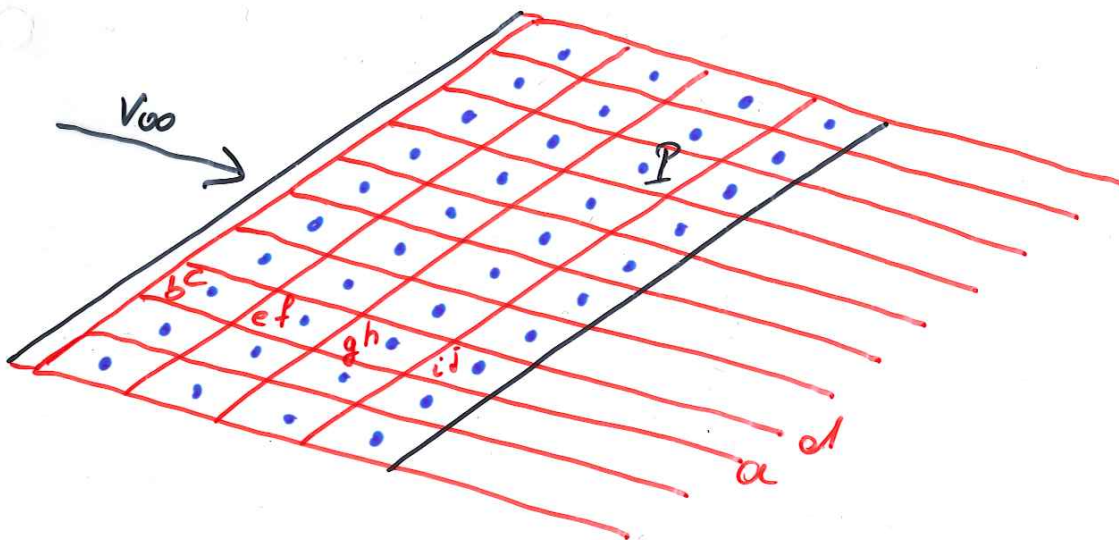


Element z. B. Quadr., Rechteck,
Trapez, etc.

Abschnitt bc auf $l/4$ -Linie
Kontrollpkt. auf $3/4 l$ -Linie

Biot-Savart, um in \mathcal{P} $w(x, y)$ zu best.

ein Gitter (lattice) aus Panels +
Hufeisenwirbeln für F



Hufeisenw. : z.B. $abcd$, $acfd$, ..., $aijd$
induz. Geschw. + kinemat. Ströpsbedg.
 \Rightarrow Glsystem für Γ_n

Vertex-Lattice Methode : wesentl.
Tool für den Entwurf

Bemerkg.: Tragflächen th. durch
verschied. Meth. zur
Bestg. v. Γ -Verteilg. gekenn-
zeichnet;

Ausätze i. a. vergleichbar,
Unterschiede in d. num.
Beschd. d. Systeme; z. B.
Mullthopp u. Trucken:
brocht: verschied. Lage
d. Aufpkt. Linien.

Tragflügel in kompt. Strömung

Ähnlichkeit

transformierte Größen (*)
aus d. Referenzdaten

→ Prandtl-Glauert Regel

Profil, α : konst.

Spannweite (y -Richtg.) transf.

⇒ Flügelgrundrißdaten

$$x^* = x, \quad z^* = z, \quad y^* = y \sqrt{1 - M_\infty^2}$$

$$b^* = b \sqrt{1 - M_\infty^2}, \quad l^* = l, \quad \lambda^* = \lambda$$

$$\Lambda^* = \Lambda \sqrt{1 - M_\infty^2}, \quad \cot \varphi^* = \cot \varphi \sqrt{1 - M_\infty^2}$$

Druckbeiwert $c_p = \frac{c_{p,ik}}{\sqrt{1 - \eta_{\infty}^2}}$

⇒ lok. Beiwerte

$$c_e(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{1 - \eta_{\infty}^2}} c_{e,ik}(\gamma_{ik}), \quad \alpha = \alpha_{ik}$$

$$c_m(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{1 - \eta_{\infty}^2}} c_{m,ik}(\gamma_{ik})$$

⇒ Gesamtbeiwerte

$$c_L = \frac{1}{\sqrt{1 - \eta_{\infty}^2}} c_{L,ik}, \quad \frac{dc_L}{d\alpha} = \frac{1}{\sqrt{1 - \eta_{\infty}^2}} \frac{dc_{L,ik}}{d\alpha}|_{ik}$$

$$c_M = \frac{1}{\sqrt{1 - \eta_{\infty}^2}} c_{M,ik}$$

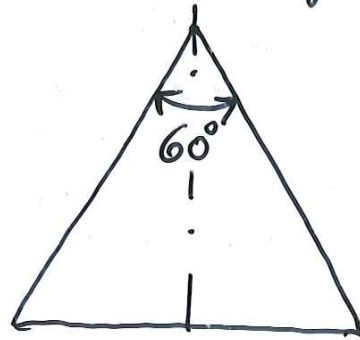
$$c_{D,i} = \frac{1}{\sqrt{1 - \eta_{\infty}^2}} c_{D,i,ik} \quad \text{bzw. mit}$$

$$c_{D,i,ik} = \frac{c_{L,ik}^2}{\pi \Lambda_{ik}} \Rightarrow c_{D,i} = \frac{c_L^2}{\pi \Lambda}$$

Trapezfl.

Dreieckfl.

Ref.

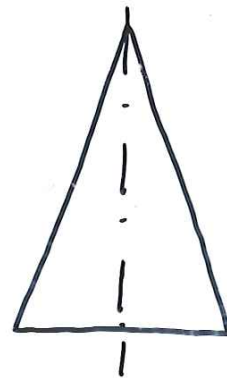


Ref.

$M_\infty = 0.8$
transf.

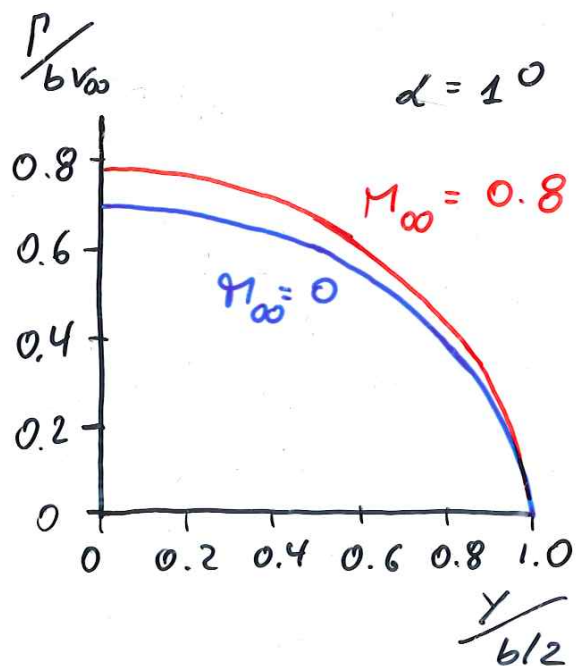
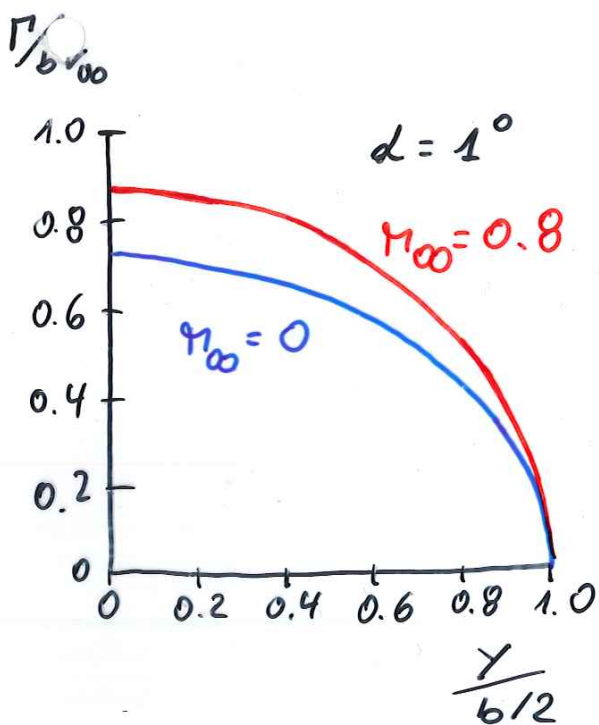


$M_\infty = 0.8$
transf.



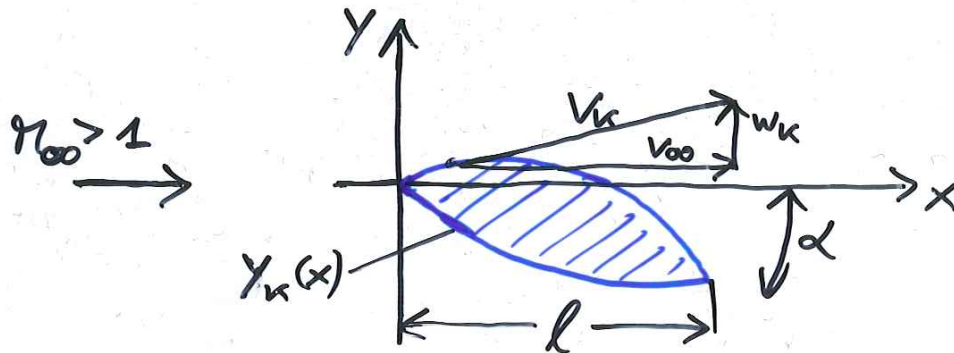
$\varphi = 0^\circ$
 $\Lambda = 2.75$
 $\lambda = 0.5$

$\varphi = 52.4^\circ$, $\Lambda = 2.31$,
 $\lambda = 0$



Überschallströmung

d'Alembert Lösung



lin. Potentialgleichg. :

$$(1 - M_{\infty}^2) \frac{\partial^2 \phi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi'}{\partial y^2} = 0$$

$M_{\infty} \leq 1$: ellipt. DGL
hyperbol. DGL

kl.
Störgr.
sub. und
superson.
Strög.

im Folgenden: $\varphi \equiv \phi'$ (Störpotential)
 $M_{\infty} > 1$

$$\Rightarrow \underbrace{(M_{\infty}^2 - 1)}_{\lambda^2} \varphi_{xx} - \varphi_{yy} = 0$$

lin. Randbedingungen

$$x \rightarrow -\infty : \varphi_x = \varphi_y = 0$$

$$\text{auf d. Körper } y_k(x) : \frac{dy_k}{dx} = \frac{v}{V_{\infty}}$$

bei $k_{\omega} > 1$: Wellengleichung

(\rightarrow schwing. Saite, Oberfl.wellen (2D),
elektromagn. Wellen)

beliebige Auslenkg. aus d. Ruhe
bewegt sich unabhängig von d.
Form (bei lin. Rückstellkräften) mit
konst. Ausbreitungsgeschw. im Raum
und Zeit, ohne d. Form zu ändern!

Kann jede "beliebige Funktion" Lösg.
d. Wellengleichung sein? wie kann
d. Ausbreitung erfasst werden?

Ausatz: $\varphi = \varphi(\xi, \eta)$,

wobei $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$

ξ, η : unbekannt

Transformation:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \varphi$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \varphi \right]$$
$$= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2$$

bzw. $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2$

einsetzen in Wellengleichung

$$\Rightarrow (\lambda^2 \xi_x^2 - \xi_y^2) \varphi_{\xi\xi} + 2(\lambda^2 \xi_x \eta_x - \xi_y \eta_y) \varphi_{\xi\eta} + (\lambda^2 \eta_x^2 - \eta_y^2) \varphi_{\eta\eta} = 0$$

φ soll beliebige Funktionen sein

$$\Rightarrow \lambda^2 \xi_x^2 - \xi_y^2 = 0 \quad (1)$$

$$\lambda^2 \eta_x^2 - \eta_y^2 = 0 \quad (2)$$

Achtung: $\lambda^2 \xi_x \eta_x - \xi_y \eta_y$ (3)
wird später separat betrachtet

aus (1) folgt

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \pm \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \xi}{\partial y}$$

wenn x, y beliebig, dann

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \pm \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \xi}{\partial y} = a = \text{const}, a \in \mathbb{R}$$

Integration $\xi = a(x \pm \lambda y) + c_0$
allgemein: $a = 1, c_0 = 0$ (keine Einschränkungen)

$$\Rightarrow \xi = x \pm \lambda y$$

$$\text{analog } \eta = x \pm \lambda y$$

Untersuchung von $\lambda^2 \xi_x \zeta_x - \xi_y \zeta_y$ (3)

a) $\lambda^2 \xi_x \zeta_x - \xi_y \zeta_y \equiv 0$

erfüllt für: $\xi = \zeta = x + \lambda y$

$\xi = \zeta = x - \lambda y$

d.h. $\varphi = f_1(x - \lambda y)$ oder

$\varphi = f_2(x + \lambda y)$

lin. DGL \Rightarrow $\varphi = f_1(x - \lambda y) + f_2(x + \lambda y)$

b) $\lambda^2 \xi_x \zeta_x - \xi_y \zeta_y \neq 0$ falls $\xi \neq \zeta$

DGL erfüllt für $\varphi_{\xi\zeta} = 0$

Integration $\varphi = f_1(x - \lambda y) + f_2(x + \lambda y)$

Ergebnis:

$\varphi = f_1(\xi) + f_2(\zeta)$ mit $\xi = x - \lambda y$, $\zeta = x + \lambda y$
allgemeine Lösp. d. Wellenglg.

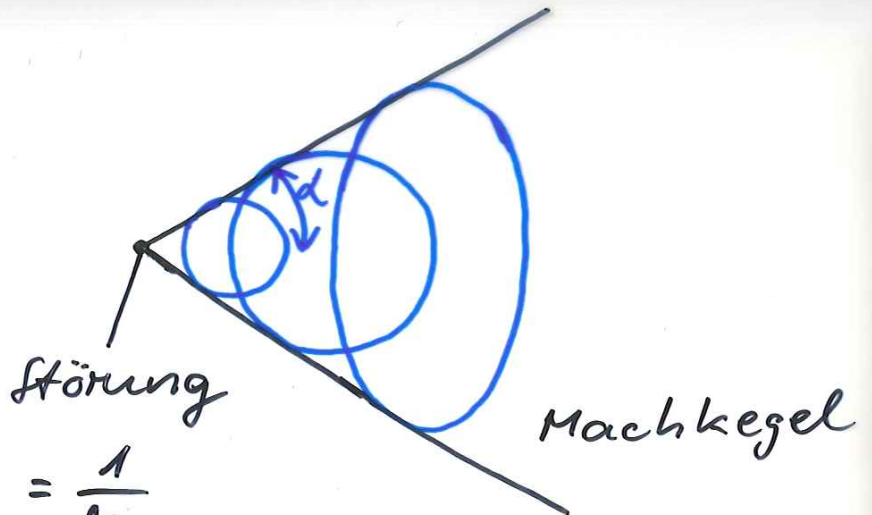
transformierte Wellengleichg. im
 ξ, ζ -Koordinatensystem

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \zeta} = 0$$

Lösung besteht aus rechts-
und linkslaufenden Wellen

$$M_{\infty} > 1$$

→



$$\sin d = \frac{c_{\infty} \Delta t}{V_{\infty} \Delta t} = \frac{1}{M_{\infty}}$$

$$\tan d = \frac{\sin d}{\sqrt{1 - \sin^2 d}} = \frac{1}{\sqrt{M_{\infty}^2 - 1}} = \frac{1}{\lambda}$$

im Folgenden:

$$\xi = y - x \tan d$$

$$\eta = y + x \tan d$$

Interpretation der d'Alembert Lösung.

Störgeschw.: $u = \varphi_x = \frac{df_1}{df} (-\tan d) + \frac{df_2}{df} \tan d$

$$= (f_2' - f_1') \tan d$$

$$v = \varphi_y = f_1' + f_2'$$

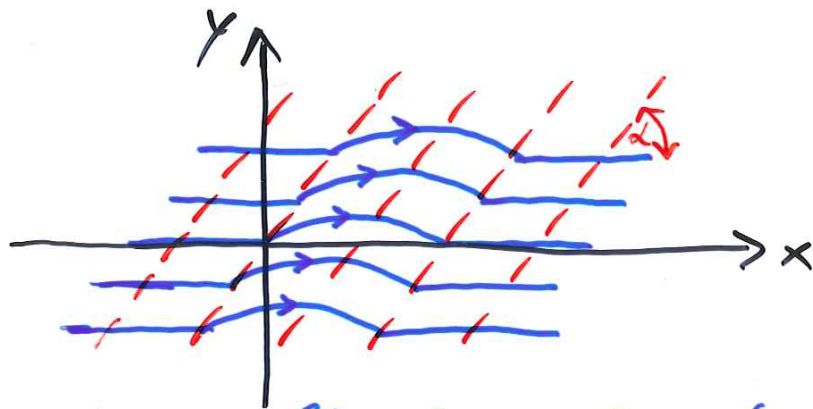
$$I) f_2 = \text{const}, f_2' = 0$$

$$\Rightarrow u = -\text{tand} f_1'(\xi)$$

$$v = f_1'(\xi)$$

$$\underline{\text{Linien } \xi = \text{const} = y - x \text{ tand}}$$

$$\text{bzw. } \frac{dy}{dx} = \text{tand} = \frac{1}{\sqrt{n_\infty^2 - 1}}$$



Stromlinienverlauf $f_2 = \text{const}$

links laufende Linien $\xi = \text{const}$
(Charakteristiken, Nachschublinien)

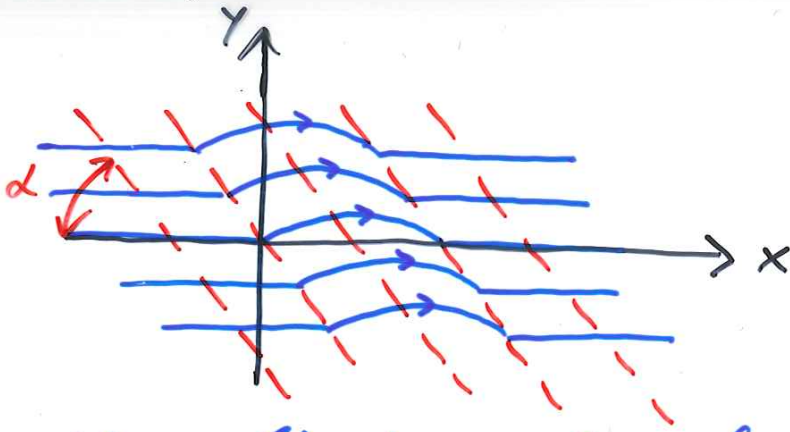
$$II) f_1 = \text{const}, f_1' = 0$$

$$\Rightarrow u = f_2' \text{ tand}$$

$$v = f_2'$$

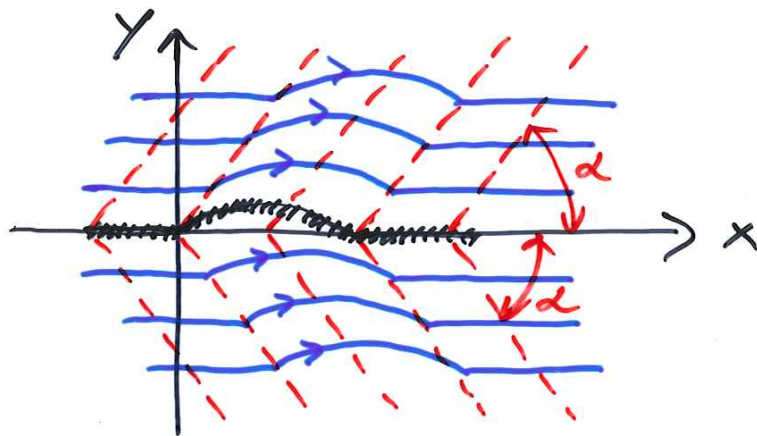
$$\text{Linien } \eta = \text{const} = y + x \text{ tand}$$

$$\text{bzw. } \frac{dy}{dx} = -\text{tand} = -\frac{1}{\sqrt{n_\infty^2 - 1}}$$



Stromlinienverlauf $f_1 = \text{const}$
 rechtslaufende Linien $\psi = \text{const.}$
 (Char., Nachschle Linien)

Überschallströmung über ein
 gewölbtes Skelett



links laufend: $\xi = \text{const.}, f_2 = \text{const.}$
 rechts laufend: $\psi = \text{const.}, f_1 = \text{const.}$

- keine Störung in d. Fortströmung
- Superposition d. Ober- und Unterseite =
 Seitenströmung
- keine Interferenz d. Störger d.
 Ober- und Unterseite

Druckbeiwert in d. Überschall=
strömung

$$u = \varphi_x = -\tan \alpha \, f_1'$$

$$v = f_1' = V_{\infty} \tan \Theta \approx V_{\infty} \Theta$$

$$\tan \Theta = dy/dx$$

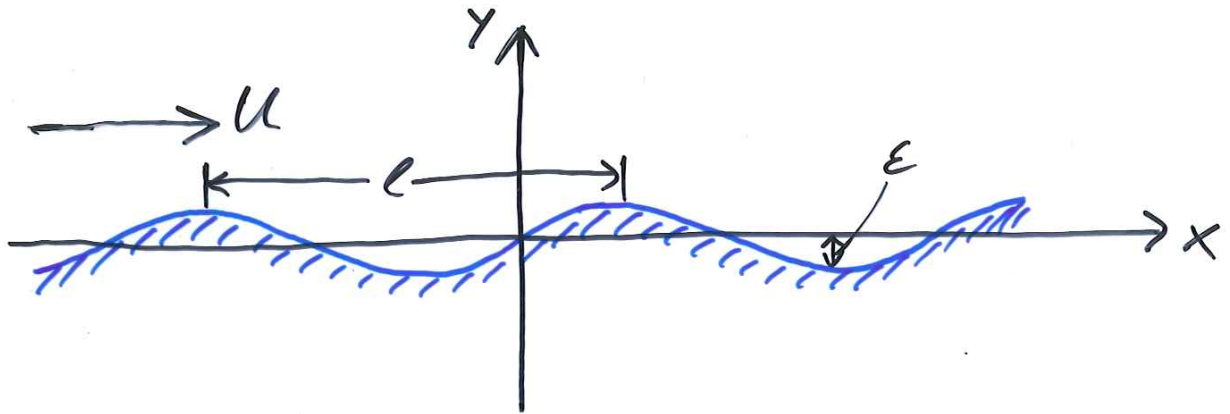
$$u = -\tan \alpha \, v$$

$$u = -V_{\infty} \Theta \tan \alpha$$

$$c_p = -\frac{2u}{V_{\infty}} = \frac{2\Theta}{\sqrt{M_{\infty}^2 - 1}}$$

lin. Überschallström.
2D, schlanker Körper (Θ klein)

Subsonische Strömung über
eine wellenförmige Oberfläche
(Ackeret)



$$y = \varepsilon \sin(\alpha x) \quad l = \frac{2\pi}{\alpha}$$

DGL (lin.): $(1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$

RB: $\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}$ endlich für $\frac{x}{y} \rightarrow \infty$

$$v(x, 0) \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Big|_{y=0} = U \frac{dy}{dx} \Big|_{\text{wand}} = U \varepsilon \alpha \cos(\alpha x)$$

$$1 - M_\infty^2 \equiv m^2 > 0$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{1}{m^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

Trennung d. Variablen

$$\varphi(x, y) = F(x) G(y)$$

$$m^2 F'' G + F G'' = 0$$

$$\frac{F''(x)}{F(x)} + \frac{1}{m^2} \frac{G''(y)}{G(y)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{F''}{F} = \text{konst} = -k^2$$

$$\frac{1}{m^2} \frac{G''}{G} = \text{konst} = +k^2$$

"rechte Seite dort "gewählt" dass
"harmonische" Lösg. für x' gilt

$$F = A_1 \sin kx + A_2 \cos kx$$

bzw.

$$G = B_1 \exp(-mky) + B_2 \exp(mky)$$

$$\circ \text{RB für } y \rightarrow \infty \Rightarrow B_2 = 0$$

$$v = v(x, 0) = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Big|_{y=0} = F(x) \frac{dG}{dy} \Big|_{y=0} \\ = U \varepsilon d \cos(dx)$$

$$\Rightarrow A_1 = 0, \quad k = d, \quad -A_2 B_1 m k = U \varepsilon d$$

$$\Rightarrow \varphi(x, y) = - \frac{U \varepsilon}{\sqrt{1 - M_{\infty}^2}} \exp(-y d \sqrt{1 - M_{\infty}^2}) \cos(dx)$$

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{U \varepsilon d}{\sqrt{1 - M_{\infty}^2}} \exp(-y d \sqrt{1 - M_{\infty}^2}) \sin(dx)$$

$$v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = U \varepsilon d \exp(-y d \sqrt{1 - M_{\infty}^2}) \cos(dx)$$

$$C_p = -2 \frac{u}{U} = - \frac{2 \varepsilon d}{\sqrt{1 - M_{\infty}^2}} \exp(-y d \sqrt{1 - M_{\infty}^2}) \sin(dx)$$

max. Störg. auf d. Wand $y=0$

$$c_p|_{\text{Wand}} = c_p|_{y=0} = -\frac{2\varepsilon d}{\sqrt{1-M_\infty^2}} \sin(\alpha x)$$

⇒ • kein Widerstand, da symmetr. zum Wellenberg

• c_p proportional zu $1/\sqrt{1-M_\infty^2}$,
d.h. c_p wächst mit M_∞

• Schwächung d. Störg für wachsendes y , da $\sqrt{1-M_\infty^2}$ im Exp. der e-Fktn.

⇒ allgemeines Ähnlichkeitsgesetz

$$\frac{c_p \sqrt{1-M_\infty^2}}{\varepsilon d} = f(\alpha d, \gamma d \sqrt{1-M_\infty^2})$$

weitere Diskussion d. Analyse:

1) Annahme: $\frac{u}{U}, \frac{v}{U} \ll 1$

$$\rightarrow \frac{\varepsilon d}{\sqrt{1-M_\infty^2}} \ll 1$$

2) $(1-M_\infty^2) \gg M_\infty^2 (\gamma+1) \frac{u}{U}$ (siehe lin. Pot.-glg!)

$$(1-M_\infty^2) \gg \frac{M_\infty^2 (\gamma+1) \varepsilon d}{\sqrt{1-M_\infty^2}}$$

bzw. $\frac{M_\infty^2 (\gamma+1) \varepsilon d}{(1-M_\infty^2)^{3/2}} \ll 1$

(*)

Glg. (*) besagt, lin. Potglg. ist OK für kl. η_{∞} ! Intresant ist γ und der Exp. $3/2$ in Glg. (*)

3) Bedeutg. d. RB: $v(x,0) = U \frac{dy}{dx} \Big|_{y=0}$

$$\frac{v}{U} = \varepsilon \alpha \exp(-\alpha y \sqrt{1-\eta_{\infty}^2}) \cos(\alpha x)$$

$$\frac{v}{U} \Big|_{\text{wand}} = \varepsilon \alpha \exp(-\varepsilon \alpha \sqrt{1-\eta_{\infty}^2} \sin(\alpha x)) \cos(\alpha x)$$

Entwicklg.: $v(x,y) = v(x,0) + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_{y=0} y + \dots$

$$\frac{v}{U} \Big|_{\text{wand}} = \varepsilon \alpha \cos(\alpha x) \left[1 - \underbrace{\varepsilon \alpha \sqrt{1-\eta_{\infty}^2} \sin(\alpha x)}_{\leq \varepsilon \alpha \sqrt{1-\eta_{\infty}^2}} + \dots \right]$$

ε klein \rightarrow vernachlässigbar

lin. Theorie OK, wenn $\varepsilon \alpha \sqrt{1-\eta_{\infty}^2} \ll 1$

bzw. $\beta \sqrt{1-\eta_{\infty}^2} \ll 1$

Supersonische Strömung über einer wellenförmigen Oberfläche
(Ackerst)

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad \lambda^2 \equiv \pi_{\infty}^2 - 1$$

Trennung d. Var. möglich, aber nicht nötig, da allg. Lösg. bekannt

$$\varphi(x, y) = f(x - \lambda y) + g(x + \lambda y)$$

RB: $\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}$ endlich für $y \rightarrow \infty$

$$v(x, 0) = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Big|_{y=0} = U \frac{dy}{dx} \Big|_{\text{Wand}} = U \varepsilon \cos(\alpha x)$$

Achtung: nur f-Wellen sind zu berücksichtigen!
(Grund: Strömungsrichts., Wand)

$$\Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Big|_{y=0} = -\lambda [f'(x - \lambda y)] \Big|_{y=0} = -\lambda f'(x) = U \varepsilon \cos(\alpha x)$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{U \varepsilon}{\lambda} \sin(\alpha x)$$

bzw.

$$\varphi(x, y) = f(x - \lambda y) = -\frac{U \varepsilon}{\lambda} \sin[\alpha(x - \lambda y)]$$

$$\varphi(x, y) = - \frac{U \varepsilon}{\sqrt{n_{\infty}^2 - 1}} \sin[\alpha(x - y \sqrt{n_{\infty}^2 - 1})]$$

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = - \frac{U \varepsilon \alpha}{\sqrt{n_{\infty}^2 - 1}} \cos[\alpha(x - y \sqrt{n_{\infty}^2 - 1})]$$

$$v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = U \varepsilon \alpha \cos[\alpha(x - y \sqrt{n_{\infty}^2 - 1})]$$

$$c_p = \frac{2 \varepsilon \alpha}{\sqrt{n_{\infty}^2 - 1}} \cos[\alpha(x - y \sqrt{n_{\infty}^2 - 1})]$$

- kein exponent. Ableitungsfaktor wie in subson. Ström. \rightarrow Ström. klingt nicht ab für $y \uparrow$
 $x - y \sqrt{n_{\infty}^2 - 1} = \text{const.}$ Linien konst. Ström.
 (Mach-Linien, Charakteristiken)

$$c_{p \text{ Wand}} = c_p|_{y=0} = \frac{2 \varepsilon \alpha}{\sqrt{n_{\infty}^2 - 1}} \cos(\alpha x)$$

Phasenverschieb. um $\frac{\pi}{2}$ gegenüber d. Min. und Max. d. Wandkontur y

\Rightarrow asymmetr. Druckverteilg. \Rightarrow Widerstand

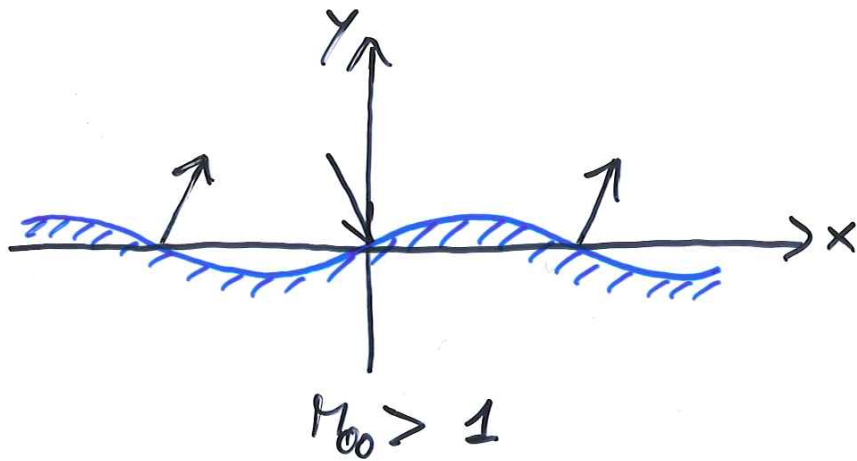
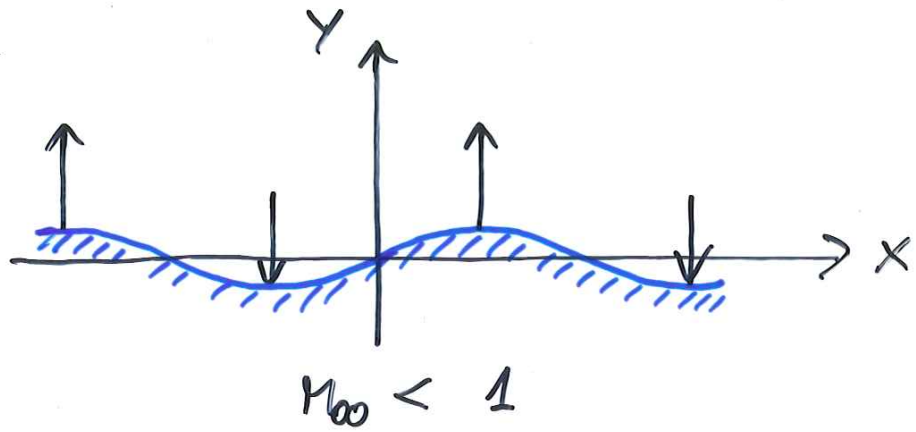
mit

$$c_p = \frac{2}{\sqrt{n_{\infty}^2 - 1}} \frac{dy}{dx}$$

$$C_D = \int_0^l \frac{c_p (dy/dx)}{l} dx = \frac{2}{\sqrt{n_{\infty}^2 - 1}} \frac{1}{l} \int_0^l \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx$$

$$C_D = \frac{2}{\sqrt{n_{\infty}^2 - 1}} \overline{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$$\underbrace{\frac{1}{l} \int_0^l \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx}_{\overline{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}$$

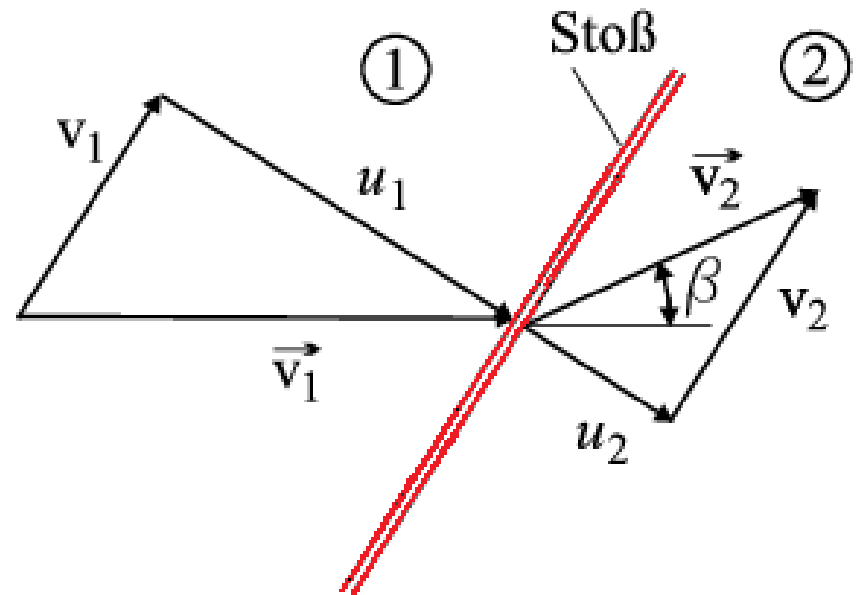
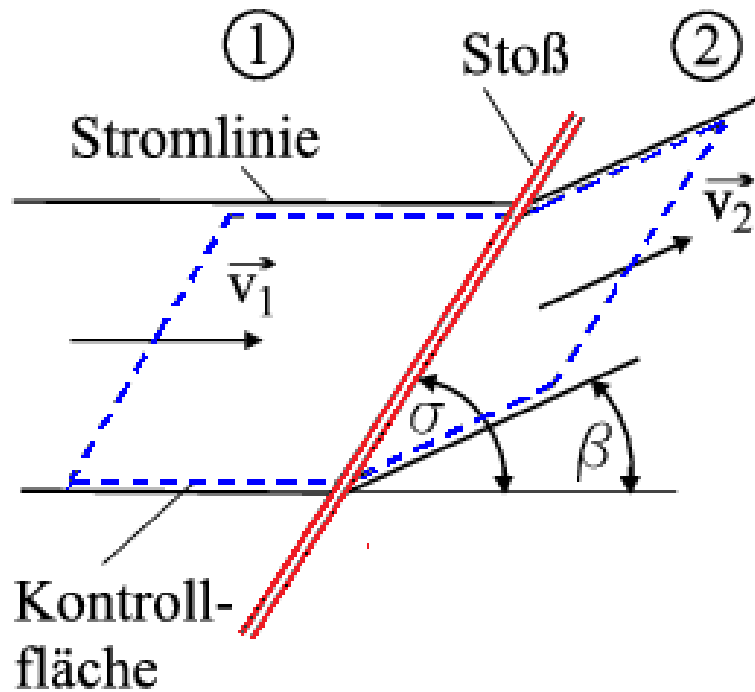


Kräfteverteilung entlang der
 wellenförmigen Oberfläche für
 $n \geq 1$

Schräger Verdichtungsstoß

Im allgemeinen sind Verdichtungsstöße gegenüber der Anströmung geneigt

→ der senkrechte Verdichtungsstoß ist ein Sonderfall



σ : Stoßwinkel

β : Umlenkwinkel

Formulierung der Erhaltungsgleichungen über den Stoß

Kontinuitätsgleichung : $\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2$

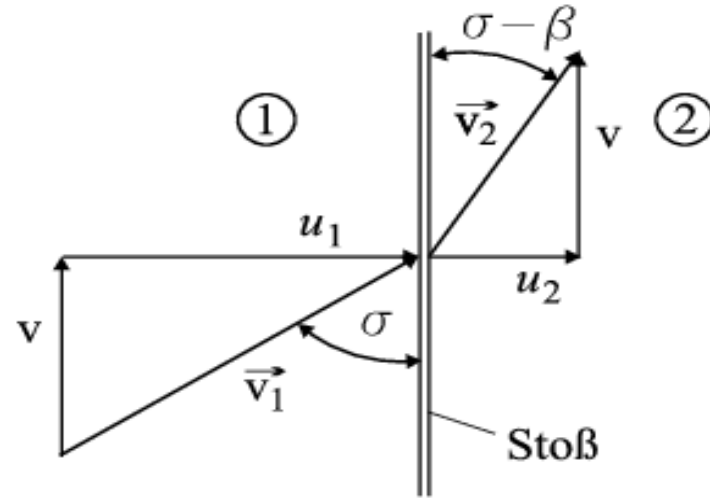
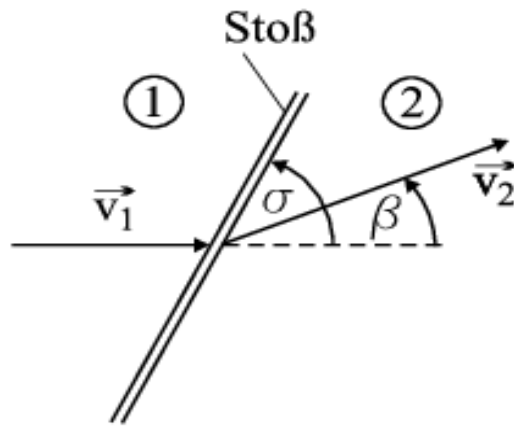
Impulssatz, tangential : $\rho_1 u_1 v_1 = \rho_2 u_2 v_2$

Impulssatz, normal : $\rho_2 u_2^2 - \rho_1 u_1^2 = p_1 - p_2$

Energiesatz : $\frac{\|\vec{v}_2\|^2}{2} - \frac{\|\vec{v}_1\|^2}{2} = c_p (T_1 - T_2)$

Impulssatz, tangential : $\Rightarrow v_1 = v_2 = v!$

→ Überlagerung des v -Feldes möglich



Analyse wie beim senkrechten Verdichtungsstoß :

$$\|\vec{v}_1\| = \sqrt{u_1^2 + v^2} \quad \sigma = \tan^{-1}(u_1 / v)$$

$$\|\vec{v}_2\| = \sqrt{u_2^2 + v^2} \quad \sigma - \beta = \tan^{-1}(u_2 / v)$$

! $u_2 < u_1 \Rightarrow$ Umlenkung der Strömung in Richtung des Stoßes !

Mach Zahlen senkrecht zum Stoß

$$M_{n1} = u_1 / c_1 = M_1 \sin \sigma > 1$$

$$M_{n2} = u_2 / c_2 = M_2 \sin(\sigma - \beta) < 1$$

$$\frac{p_2}{p_1}, \frac{\rho_2}{\rho_1}, \frac{T_2}{T_1}, \frac{\Delta S}{R} \text{ durch } M_1 \leftarrow M_{n1} = M_1 \sin \sigma$$

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_1^2 \sin^2 \sigma - 1)$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma+1)M_1^2 \sin^2 \sigma}{(\gamma-1)M_1^2 \sin^2 \sigma + 2} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{\tan \sigma}{\tan(\sigma - \beta)}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = 1 + \frac{2(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2} \frac{\gamma M_1^2 \sin^2 \sigma + 1}{M_1^2 \sin^2 \sigma} (M_1^2 \sin^2 \sigma - 1)$$

$$\frac{s_2 - s_1}{R} = \ln \left[\left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}} \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \right] = \ln \left\{ \left[\frac{(\gamma+1)M_1^2 \sin^2 \sigma}{(\gamma-1)M_1^2 \sin^2 \sigma + 2} \right]^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}} \left[1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_1^2 \sin^2 \sigma - 1) \right]^{\frac{1}{\gamma-1}} \right\}$$

die Prandtl Beziehung des senkrechten Verdichtungsstoßes

$$u_1 u_2 = c^{*2}$$

nimmt für den schrägen Verdichtungsstoß folgende Form an :

Energiesatz :

$$c_p T_1 + \frac{u_1^2 + v^2}{2} = c_p T_2 + \frac{u_2^2 + v^2}{2} = c_p T_0$$

mit $c_p = \gamma R / (\gamma - 1)$

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{u_1^2 + v^2}{2} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{u_2^2 + v^2}{2} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_0}{\rho_0}$$

Ruhe- und kritische Größen :

$$c^{*2} \frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)} = c_0^2 \frac{1}{\gamma - 1} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_0}{\rho_0}$$

⇒

$$p_1 = \rho_1 \left[\frac{\gamma + 1}{2\gamma} c^{*2} - \frac{\gamma - 1}{2\gamma} (u_1^2 + v_1^2) \right]$$

$$p_2 = \rho_2 \left[\frac{\gamma + 1}{2\gamma} c^{*2} - \frac{\gamma - 1}{2\gamma} (u_2^2 + v_1^2) \right]$$

in Impulssatz, normal

$$\rho_1 \left[\frac{\gamma+1}{2\gamma} (u_1^2 + c^{*2}) - \frac{\gamma-1}{2\gamma} v^2 \right] = \rho_2 \left[\frac{\gamma+1}{2\gamma} (u_2^2 + c^{*2}) - \frac{\gamma-1}{2\gamma} v^2 \right]$$

+ Kontinuitätsgleichung \implies Prandtl Beziehung für den schrägen Verdichtungsstoß.

$$u_2 u_1 = c^{*2} - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} v^2$$

$$M_2 = f(M_1, \sigma, \beta, \gamma) \text{ aus } M_2 = g(M_1, \gamma)$$

mittels $M_1 \leftarrow M_1 \sin \sigma$ und

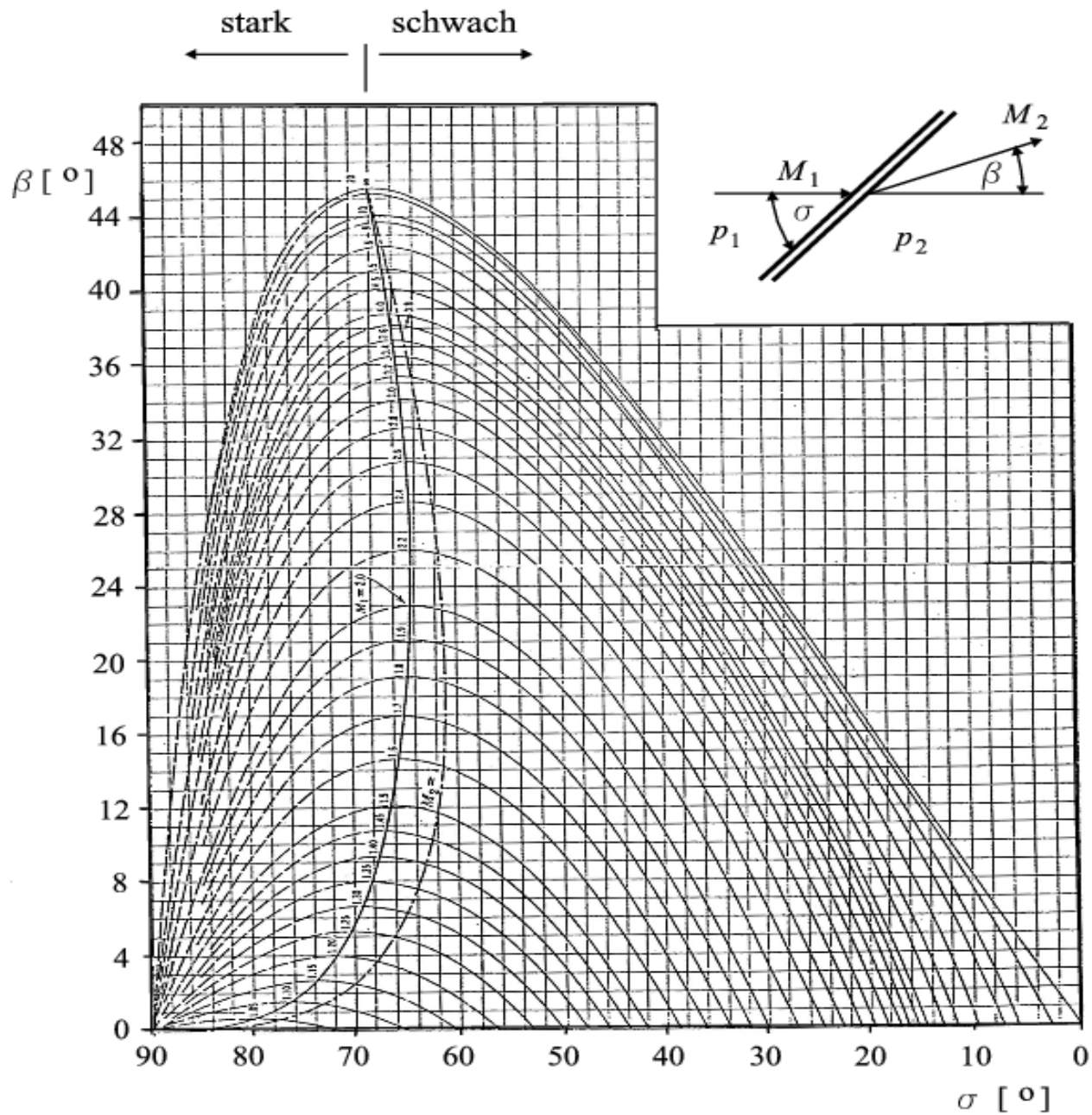
$$M_2 \leftarrow M_2 \sin(\sigma - \beta)$$

$$\rightarrow M_2^2 \sin^2(\sigma - \beta) = \frac{(\gamma-1)M_1^2 \sin^2 \sigma + 2}{2\gamma M_1^2 \sin^2 \sigma - (\gamma-1)}$$

Zusammenhang zwischen β, σ, M_1 mittels $\frac{\rho_2}{\rho_1} = f(M_1, \sigma) = g(\sigma, \beta)$

mit $\tan(\sigma - \beta) = \frac{\tan \sigma - \tan \beta}{1 + \tan \sigma \tan \beta}$

$$\Rightarrow \tan \beta = 2 \cot \sigma \frac{M_1^2 \sin^2 \sigma - 1}{M_1^2 (\gamma + \cos 2\sigma) + 2}$$



$$\left. \begin{array}{l} \sigma = \frac{\pi}{2} \quad \rightarrow \quad \tan \beta = 0 \\ \sigma = \alpha_1 = \sin^{-1}\left(\frac{1}{M_1}\right) \quad \rightarrow \quad \tan \beta = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Max. existiert !}$$

Analyse für $M_1 \rightarrow \infty$:

$$r = \lim_{M_1 \rightarrow \infty} (\tan \beta) = \frac{2 \cot \sigma \sin^2 \sigma}{\gamma + \cos^2 \sigma} = \frac{\sin 2\sigma}{\gamma + \cos 2\sigma}$$

$$\frac{dr}{d\sigma} = \frac{2 \cos 2\sigma (\gamma + \cos 2\sigma) + 2 \sin^2 2\sigma}{(\gamma + \cos 2\sigma)^2} = 0$$

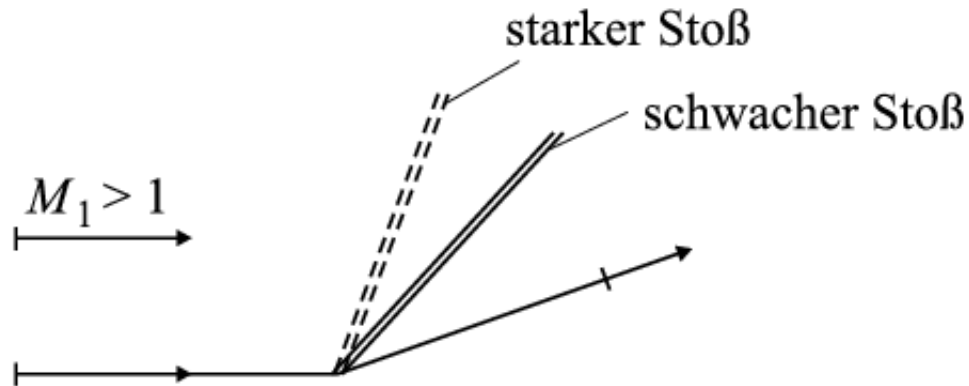
$$\Rightarrow \cos 2\sigma = -\frac{1}{\gamma}; \gamma = 1.4 : \sigma \approx 67.5$$

$$\tan \beta_{\max} = \frac{\sin 2\sigma}{\gamma + \cos 2\sigma} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 2\sigma}}{\gamma + \cos 2\sigma} = \frac{\sqrt{1 - 1/\gamma^2}}{\gamma - 1/\gamma} = \frac{\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma^2 - 1} = (\gamma^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\beta_{\max} \approx 45^\circ$$

$\beta < \beta_{\max}$: 2 Lösungen

- schwache Lösung , $M_2 > 1$ (*i.a.*)
- starke Lösung , $M_2 < 1$

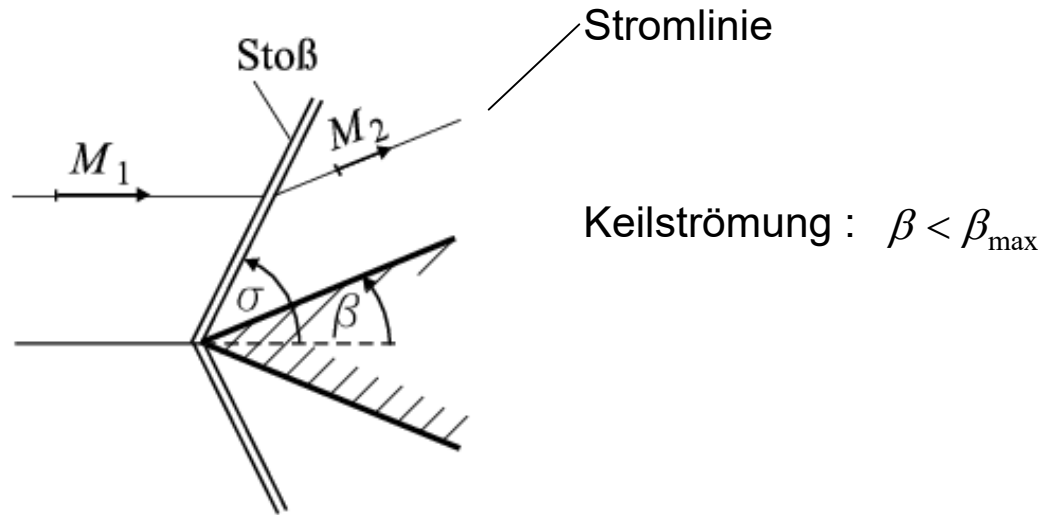


schwache Lösung entspricht der natürlichen Lösung

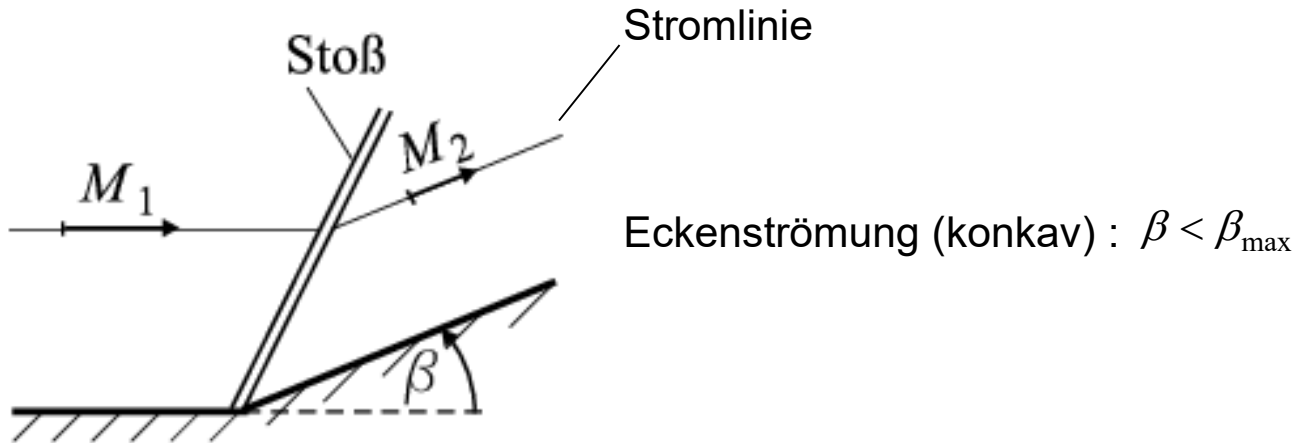
$\beta > \beta_{\max}$: keine geschlossene analytische Lösung

Entstehung von schrägen Verdichtungsstößen

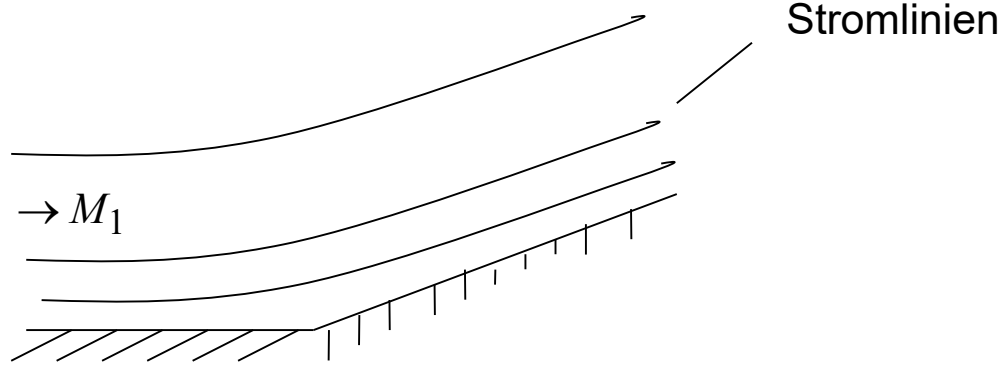
$M_1 > 1$



$M_1 > 1$

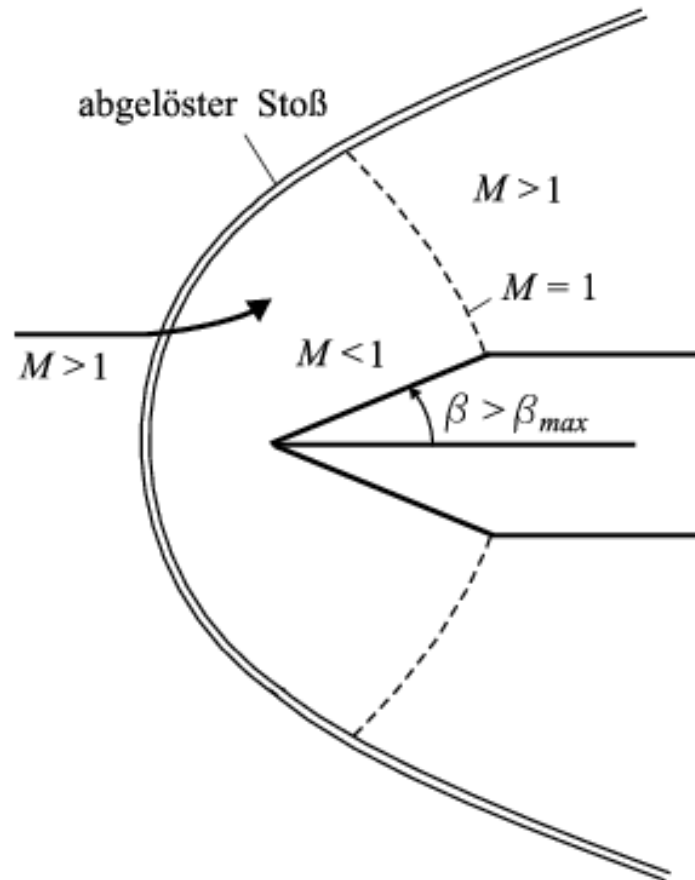


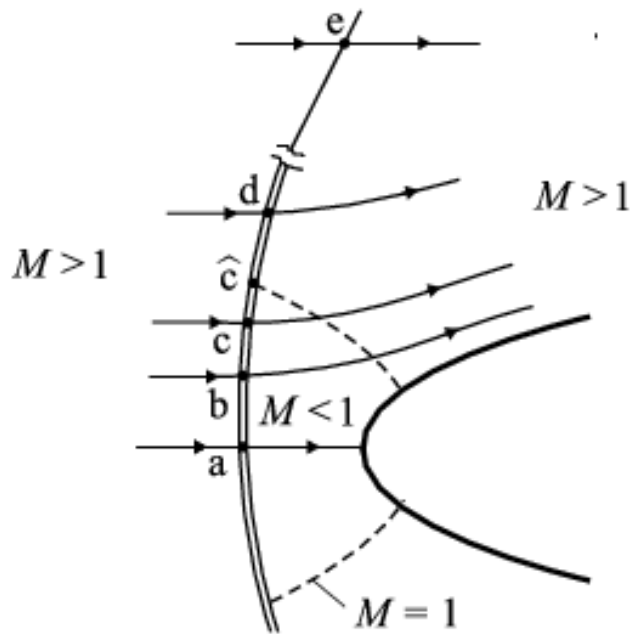
$M_1 < 1$



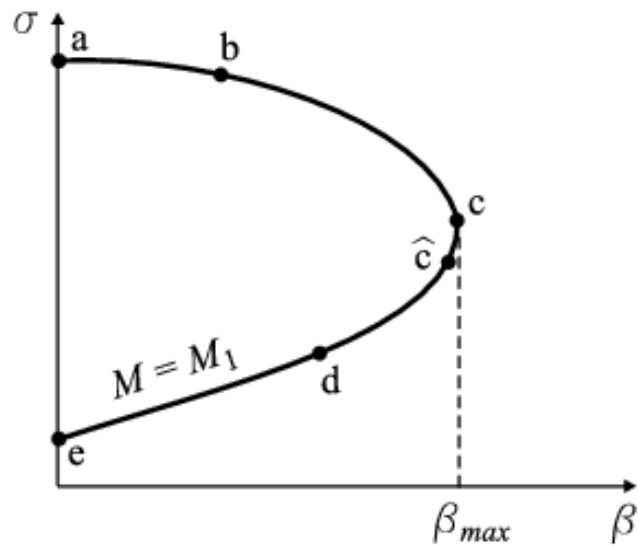
Eckenströmung (konkav, subsonisch)

$\beta > \beta_{max}$: Ablösung des Verdichtungsstoßes





abgelöster Verdichtungsstoß



Herzkurve

σ, β, M_1 - Zusammenhang

Approximationen für schräge Verdichtungsstöße

- Hyperschallströmungen : $M_1^2 \sin^2 \sigma \gg 1$, $\sin \sigma \ll 1$

aus

$$\frac{\tan(\sigma - \beta)}{\tan \sigma} = \frac{\gamma - 1 + 2/M_1^2 \sin^2 \sigma}{\gamma + 1}$$

und

$$\sigma \approx \beta$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \frac{\sigma - \beta}{\sigma} &= \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \\ &= \frac{\gamma + 1}{2} \beta \quad \text{Newton-Theorie} \end{aligned}$$

- Näherung für schwache Stöße : Annahme : β klein

$$\beta \rightarrow 0: \Rightarrow \sigma \rightarrow \alpha_1 = \sin^{-1}(1/M_1)$$

$$\text{in } \beta = f(M_1, \sigma)$$

$$\Rightarrow \quad \tan \beta \approx 2 \cot \alpha_1 \frac{M_1^2 \sin^2 \sigma - 1}{M_1^2 (\gamma + \cos 2\alpha_1) + 2}$$

mit $\tan \beta \approx \beta$

$$\cot \alpha_1 = \sqrt{M_1^2 - 1}$$

$$\cos 2\alpha_1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha_1 = 1 - 2 / M_1^2$$

$$\Rightarrow M_1^2 \sin^2 \sigma - 1 \approx \frac{M_1^2 (\gamma + 1)}{2\sqrt{M_1^2 - 1}} \beta$$

in $\frac{p_2}{p_1} = h(M_1, \sigma)$

\Rightarrow relative Druckänderung für β klein

$$\frac{p_2 - p_1}{p_1} \approx \frac{\gamma M_1^2}{\sqrt{M_1^2 - 1}} \beta$$

gültig : schwache Komp. + Exp.wellen

Grund :

$$\frac{s_2 - s_1}{R} \approx \frac{\gamma + 1}{12\gamma^2} \left(\frac{p_2 - p_1}{p_1} \right)^3 = \frac{\gamma + 1}{12\gamma^2} \left(\frac{\gamma M_1^2}{\sqrt{M_1^2 - 1}} \right)^3 \beta^3$$

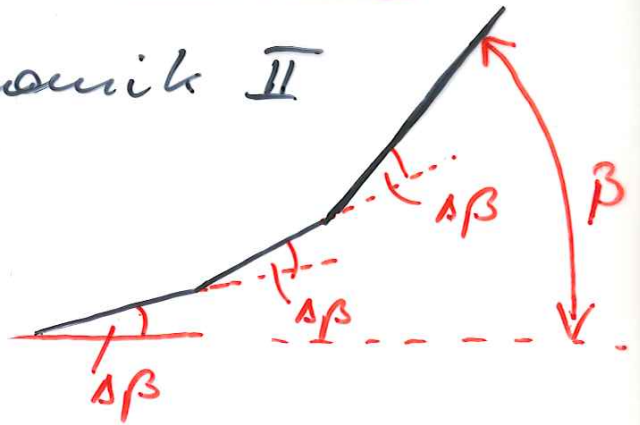
\Rightarrow schwache Stöße näherungsweise isentrop \rightarrow reversibel

Prandtl-Meyer-Strömung

aus Fluidmechanik II

$$\Delta p \sim \Delta \beta$$

$$\Delta S \sim \Delta \beta^3$$



n Segmente

$$\beta = n \Delta \beta = n \beta_k$$

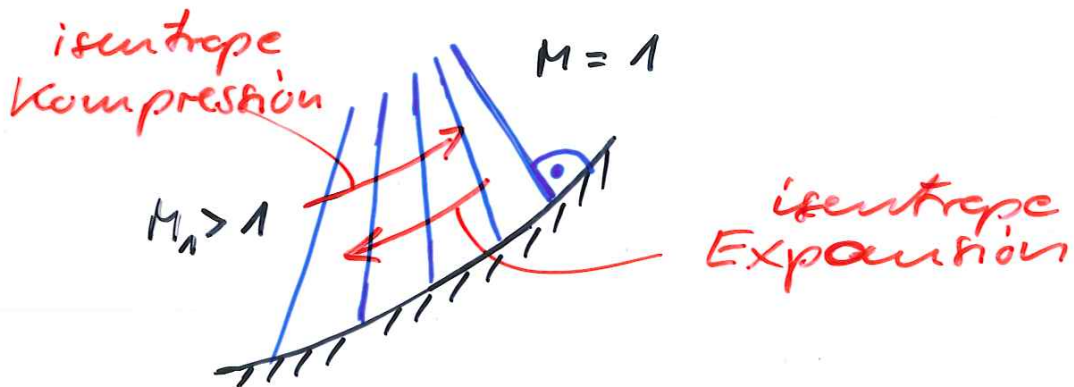
$$p_k - p_1 \sim n \Delta p \sim \beta$$

$$S_k - S_1 \sim n \Delta S \sim \beta^3$$

$$\Delta \beta = \beta / n$$

$$S_k - S_1 \sim \frac{1}{n^2} \beta^3$$

⇒ Entropieverlust ist prop. zu $\frac{1}{n^2}$
für $n \rightarrow \infty$ kontinuierliche (isentrope) Umlenkung

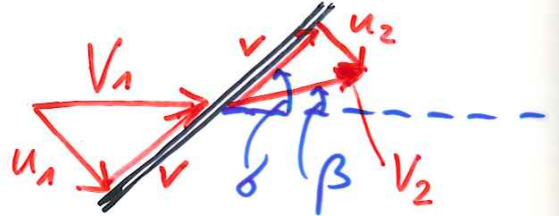


Herleitung d. Näherung für
schwache Stöße: $\Delta V \sim \Delta \beta$

$$\frac{V_2^2}{V_1^2} = \frac{\left(\frac{u_2}{V}\right)^2 + 1}{\left(\frac{u_1}{V}\right)^2 + 1}$$

$$\frac{u_1}{V} = \tan \delta$$

$$\frac{u_2}{V} = \tan(\delta - \beta)$$



$$\frac{V_2^2}{V_1^2} = \frac{\tan^2(\delta - \beta) + 1}{\tan^2 \delta + 1} = \frac{\cos^2 \delta}{\cos^2(\delta - \beta)}$$

$$\delta = \alpha + \epsilon$$

$$\sin \delta = \sin(\alpha + \epsilon) \approx \sin \alpha + \epsilon \cos \alpha + \epsilon^2 \dots$$

$$\sin \alpha = 1/n_1; \quad \cos \alpha = \sqrt{n_1^2 - 1}/n_1$$

$$\sin^2 \delta = \frac{1}{n_1^2} + 2\epsilon \frac{\sqrt{n_1^2 - 1}}{n_1^2}$$

$$\cos^2 \delta = 1 - \sin^2 \delta = \frac{n_1^2 - 1}{n_1^2} \left(1 - \frac{2\epsilon}{\sqrt{n_1^2 - 1}}\right)$$

$$\cos^2(\delta - \beta) = \frac{n_1^2 - 1}{n_1^2} \left(1 - \frac{2(\epsilon - \beta)}{\sqrt{n_1^2 - 1}}\right)$$

$$(1 - \mu)^{-1} = 1 + \mu + \mu^2 + \dots \quad |\mu| < 1$$

$$\frac{V_2^2}{V_1^2} \approx \left(1 - \frac{2\epsilon}{\sqrt{n_1^2 - 1}}\right) \left(1 + \frac{2(\epsilon - \beta)}{\sqrt{n_1^2 - 1}}\right)$$

$$\frac{V_2^2}{V_1^2} = \left(1 - \frac{2\varepsilon}{\sqrt{\eta_1^2 - 1}} + \frac{2\varepsilon}{\sqrt{\eta_1^2 - 1}} - \frac{2\beta}{\sqrt{\eta_1^2 - 1}} - \frac{4\varepsilon(\varepsilon - \beta)}{\eta_1^2 - 1} \right)$$

$$\frac{V_2^2}{V_1^2} = \left(1 - \frac{\beta}{\sqrt{\eta_1^2 - 1}} \right)^2 \quad \text{alle Terme } \varepsilon^2, \varepsilon\beta \text{ werden vernachlässigt!}$$

$$\Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = 1 - \frac{\beta}{\sqrt{\eta_1^2 - 1}} \quad \text{bzw.}$$

$$\frac{\Delta V}{V_1} = - \frac{\beta}{\sqrt{\eta_1^2 - 1}} \rightarrow \underline{\underline{\frac{dV}{V} = - \frac{d\beta}{\sqrt{\eta^2 - 1}}}} \quad (*)$$

Integration von (*) nach

Prandtl-Meyer

Energiegleichung

$$\frac{V^2}{2} + \frac{c^2}{\gamma - 1} = \frac{c_0^2}{\gamma - 1}; \quad c_0^2 = \frac{\gamma + 1}{2} c^*{}^2$$

$$\frac{c_0^2}{c^2} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} \eta^2$$

$$V = c \eta$$

$$\frac{dV}{V} = \frac{d\eta}{\eta} + \frac{dc}{c}$$

$$- d\beta = \sqrt{\eta^2 - 1} \frac{dV}{V}$$

$$- \beta + \text{const} = \int \sqrt{\eta^2 - 1} \frac{dV}{V} = \nu(\eta)$$

$$\frac{dV}{V} = \frac{dM}{M} \left(1 + \frac{M}{c} \frac{dc}{dM} \right)$$

$$\frac{dc}{dM} = - \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{-3/2} \frac{(\gamma-1) M}{2} c_0$$

$$\frac{M}{c} \frac{dc}{dM} = - \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{-1} \frac{\gamma-1}{2} M^2$$

$$1 + \frac{M}{c} \frac{dc}{dM} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{-1}$$

$$\nu(M) = \int \frac{\sqrt{M^2-1}}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} \frac{dM}{M}$$

$$\nu(M) = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1} (M^2-1)} - \tan^{-1} \sqrt{M^2-1}$$

γ : Bogenmaß Prandtl-Meyer Fkt.

Integrationskont: $\nu=0$: $M=1$

$dM > 0$ (von $M=1$ bis $M \rightarrow \infty$)

$$\Rightarrow \nu_{\max} = \frac{\pi}{2} \left(\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} - 1 \right)$$

$$\gamma = 1.4 \quad \nu_{\max} = 130,5^\circ$$

$$\gamma = 1.06 \quad \nu_{\max} = 437,4^\circ$$

TABLE V

MACH NUMBER AND MACH ANGLE VERSUS PRANDTL-MEYER FUNCTION

ν (deg)	M	ϕ (deg)	ν (deg)	M	ϕ (deg)
0.0	1.000	90.000	17.5	1.689	36.293
0.5	1.051	72.099	18.0	1.706	35.874
1.0	1.082	67.574	18.5	1.724	35.465
1.5	1.108	64.451	19.0	1.741	35.065
2.0	1.133	61.997	19.5	1.758	34.673
2.5	1.155	59.950	20.0	1.775	34.290
3.0	1.177	58.180	20.5	1.792	33.915
3.5	1.198	56.614	21.0	1.810	33.548
4.0	1.218	55.205	21.5	1.827	33.188
4.5	1.237	53.920	22.0	1.844	32.834
5.0	1.256	52.738	22.5	1.862	32.488
5.5	1.275	51.642	23.0	1.879	32.148
6.0	1.294	50.619	23.5	1.897	31.814
6.5	1.312	49.658	24.0	1.915	31.486
7.0	1.330	48.753	24.5	1.932	31.164
7.5	1.348	47.896	25.0	1.950	30.847
8.0	1.366	47.082	25.5	1.968	30.536
8.5	1.383	46.306	26.0	1.986	30.229
9.0	1.400	45.566	26.5	2.004	29.928
9.5	1.418	44.857	27.0	2.023	29.632
10.0	1.435	44.177	27.5	2.041	29.340
10.5	1.452	43.523	28.0	2.059	29.052
11.0	1.469	42.894	28.5	2.078	28.769
11.5	1.486	42.287	29.0	2.096	28.491
12.0	1.503	41.701	29.5	2.115	28.216
12.5	1.520	41.134	30.0	2.134	27.945
13.0	1.537	40.585	30.5	2.153	27.678
13.5	1.554	40.053	31.0	2.172	27.415
14.0	1.571	39.537	31.5	2.191	27.155
14.5	1.588	39.035	32.0	2.210	26.899
15.0	1.605	38.547	32.5	2.230	26.646
15.5	1.622	38.073	33.0	2.249	26.397
16.0	1.639	37.611	33.5	2.269	26.151
16.5	1.655	37.160	34.0	2.289	25.908
17.0	1.672	36.721	34.5	2.309	25.668

TABLE V (Continued)

MACH NUMBER AND MACH ANGLE VERSUS PRANDTL-MEYER FUNCTION

ν (deg)	M	δ (deg)	ν (deg)	M	δ (deg)
35.0	2.329	25.430	52.5	3.146	18.532
35.5	2.349	25.196	53.0	3.174	18.366
36.0	2.369	24.965	53.5	3.202	18.200
36.5	2.390	24.736	54.0	3.230	18.036
37.0	2.410	24.510	54.5	3.258	17.873
37.5	2.431	24.287	55.0	3.287	17.711
38.0	2.452	24.066	55.5	3.316	17.551
38.5	2.473	23.847	56.0	3.346	17.391
39.0	2.495	23.631	56.5	3.375	17.233
39.5	2.516	23.418	57.0	3.406	17.076
40.0	2.538	23.206	57.5	3.436	16.920
40.5	2.560	22.997	58.0	3.467	16.765
41.0	2.582	22.790	58.5	3.498	16.611
41.5	2.604	22.585	59.0	3.530	16.458
42.0	2.626	22.382	59.5	3.562	16.306
42.5	2.649	22.182	60.0	3.594	16.155
43.0	2.671	21.983	60.5	3.627	16.005
43.5	2.694	21.786	61.0	3.660	15.856
44.0	2.718	21.591	61.5	3.694	15.708
44.5	2.741	21.398	62.0	3.728	15.561
45.0	2.764	21.207	62.5	3.762	15.415
45.5	2.788	21.017	63.0	3.797	15.270
46.0	2.812	20.830	63.5	3.832	15.126
46.5	2.836	20.644	64.0	3.868	14.983
47.0	2.861	20.459	64.5	3.904	14.840
47.5	2.886	20.277	65.0	3.941	14.698
48.0	2.910	20.096	65.5	3.979	14.557
48.5	2.936	19.916	66.0	4.016	14.417
49.0	2.961	19.738	66.5	4.055	14.278
49.5	2.987	19.561	67.0	4.094	14.140
50.0	3.013	19.386	67.5	4.133	14.002
50.5	3.039	19.213	68.0	4.173	13.865
51.0	3.065	19.041	68.5	4.214	13.729
51.5	3.092	18.870	69.0	4.255	13.593
52.0	3.119	18.701	69.5	4.297	13.459

TABLE V (Continued)
MACH NUMBER AND MACH ANGLE VERSUS PRANDTL-MEYER FUNCTION

ν (deg)	M	α (deg)	ν (deg)	M	α (deg)
70.0	4.339	13.325	87.5	6.390	9.003
70.5	4.382	13.191	88.0	6.472	8.888
71.0	4.426	13.059	88.5	6.556	8.774
71.5	4.470	12.927	89.0	6.642	8.660
72.0	4.515	12.795	89.5	6.729	8.546
72.5	4.561	12.665	90.0	6.819	8.433
73.0	4.608	12.535	90.5	6.911	8.320
73.5	4.655	12.406	91.0	7.005	8.207
74.0	4.703	12.277	91.5	7.102	8.095
74.5	4.752	12.149	92.0	7.201	7.983
75.0	4.801	12.021	92.5	7.302	7.871
75.5	4.852	11.894	93.0	7.406	7.760
76.0	4.903	11.768	93.5	7.513	7.649
76.5	4.955	11.642	94.0	7.623	7.538
77.0	5.009	11.517	94.5	7.735	7.428
77.5	5.063	11.392	95.0	7.851	7.318
78.0	5.118	11.268	95.5	7.970	7.208
78.5	5.174	11.145	96.0	8.092	7.099
79.0	5.231	11.022	96.5	8.218	6.989
79.5	5.289	10.899	97.0	8.347	6.881
80.0	5.348	10.777	97.5	8.480	6.772
80.5	5.408	10.656	98.0	8.618	6.664
81.0	5.470	10.535	98.5	8.759	6.556
81.5	5.532	10.414	99.0	8.905	6.448
82.0	5.596	10.294	99.5	9.055	6.340
82.5	5.661	10.175	100.0	9.210	6.233
83.0	5.727	10.056	100.5	9.371	6.126
83.5	5.795	9.937	101.0	9.536	6.019
84.0	5.864	9.819	101.5	9.708	5.913
84.5	5.935	9.701	102.0	9.885	5.806
85.0	6.006	9.584			
85.5	6.080	9.467			
86.0	6.155	9.350			
86.5	6.232	9.234			
87.0	6.310	9.119			

Numerical values taken from *Publication No. 26*, Jet Propulsion Laboratory, California Institute of Technology.

Beziehung zwischen Prandtl-Meyer Winkel ν und Neigung der Stromlinie β

$$\int \sqrt{M^2 - 1} \frac{dV}{V} = - \int d\beta$$

$$\nu - \nu_1 = -(\beta - \beta_1)$$

$$\nu = \nu_1 - (\beta - \beta_1)$$

Expansion: $\nu > \nu_1$, $\beta < \beta_1$
bzw. $\nu = \nu_1 + |\beta - \beta_1| = \nu_1 + |\Delta\beta|$

Kompression: $\nu < \nu_1$, $\beta > \beta_1$
bzw. $\nu = \nu_1 - |\beta - \beta_1| = \nu_1 - |\Delta\beta|$

Beispiel:

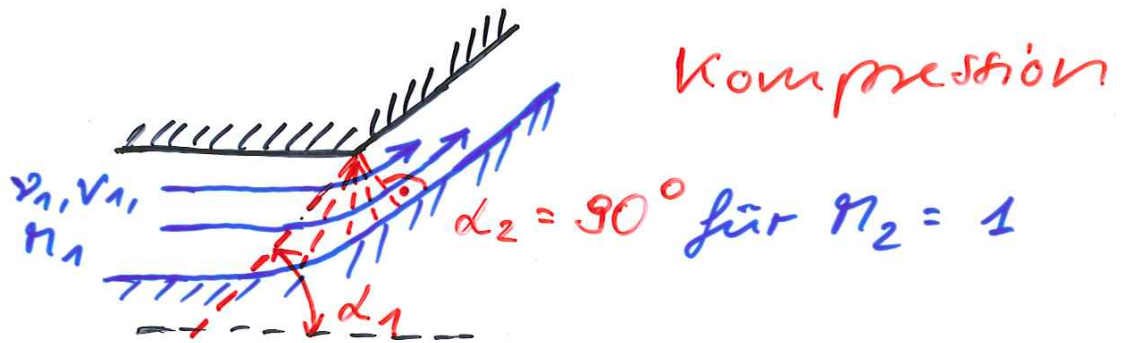
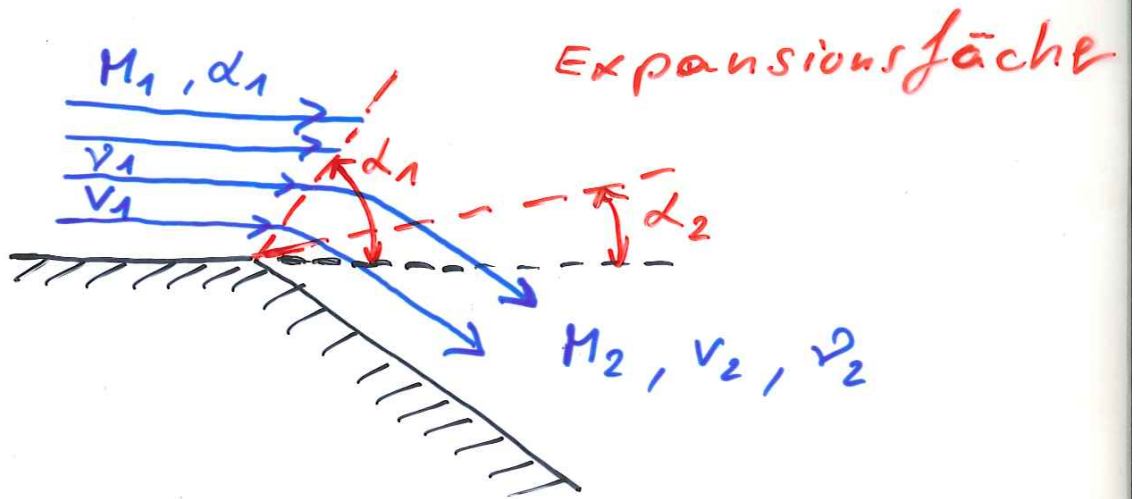
I) $M_1 = 1$ $\Delta\beta$ für $M = 3$?
 $\nu_1 = 0 \Rightarrow \Delta\beta = \nu(M=3) = 50^\circ$

II) $M_1 = 2$, $\nu_1 = 26.5^\circ$, $\Delta\beta = 10^\circ$

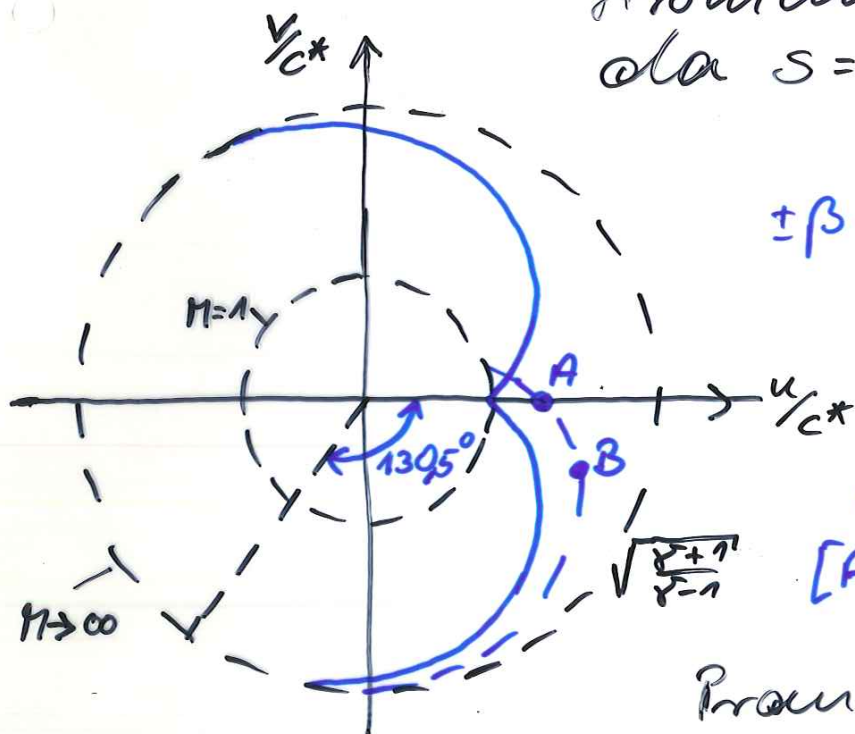
Exp.: $\nu = \nu_1 + |\Delta\beta| = 36.5^\circ$
 $\Rightarrow M_2 = 2.39$

Komp.: $\nu = \nu_1 - |\Delta\beta| = 16.5^\circ$
 $\Rightarrow M_2 = 1.66$

Prandtl-Meyer-Ecke



Umkehrung der Strömung möglich, da $s = \text{konst.}$



$$\pm \beta + \beta_1 = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \tan^{-1} \omega - \tan^{-1} \sqrt{M^2 - 1}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1} (M^2 - 1)}$$

(Epizykloide)

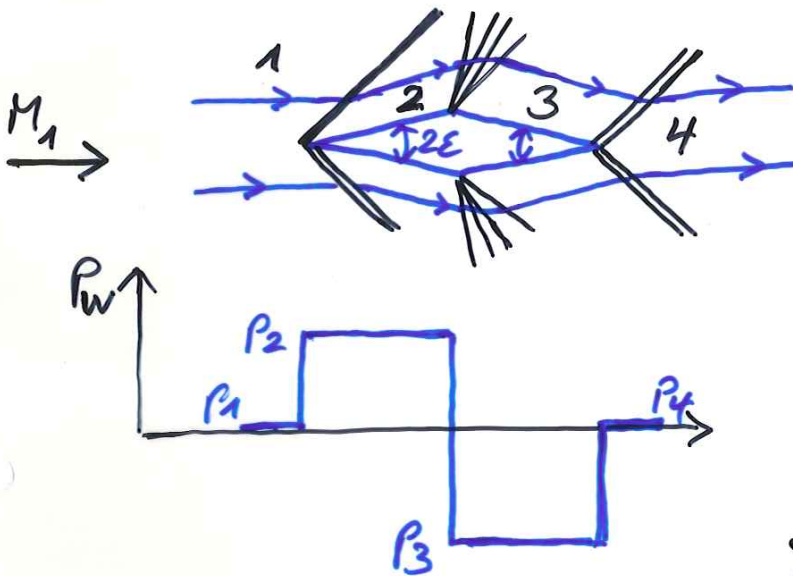
[A, B]: Umkehrg. von $\beta_1 = 0^\circ$ auf $\beta > 0$

Prandtl-Meyer-Diagr.

Stoß-Expansions-Theorie

2D, reibungsfrei, supersonische Strömungen → Zusammen-
setzung von Stoß- und Prandtl-Meyer Lösungen

Doppelkeilprofil



Widerstand in reibungsfreier Strömung

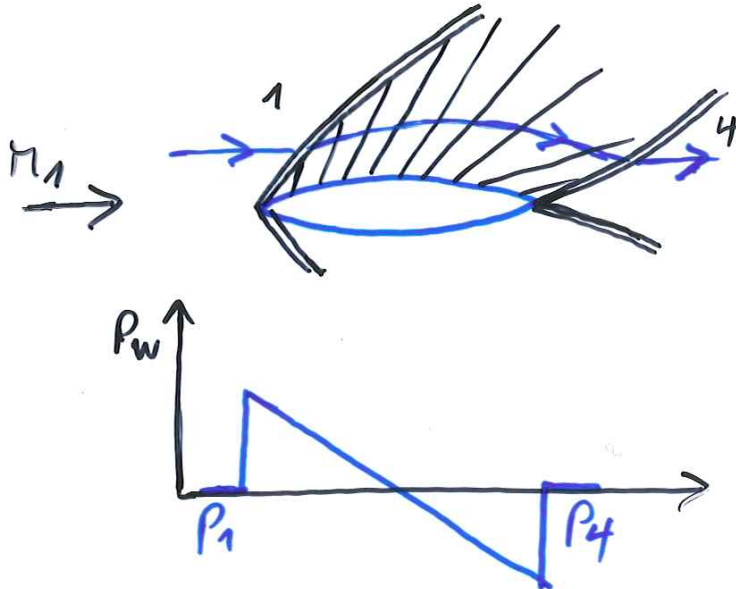
$$D = (P_2 - P_3) t$$

t : Dicke an d. Schulter

Wellenwiderstand (nicht Reibungs- od. Druckwiderstand)

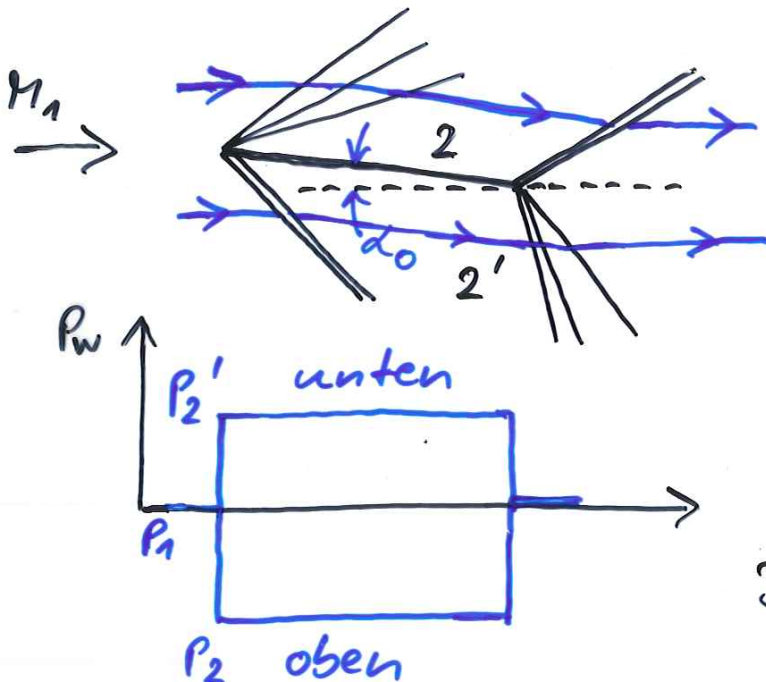
entsteht durch Viskositätseffekte innerhalb d. Stoßes; Entropieänderung im Stoß unabhängig von dem detaillierten Nichtgleichgewichtsprozess

Kreisbogenprofil



Öffnungswinkel
kleiner als
 β_{max}

Angestellte, ebene Platte



c : Sehnenlänge

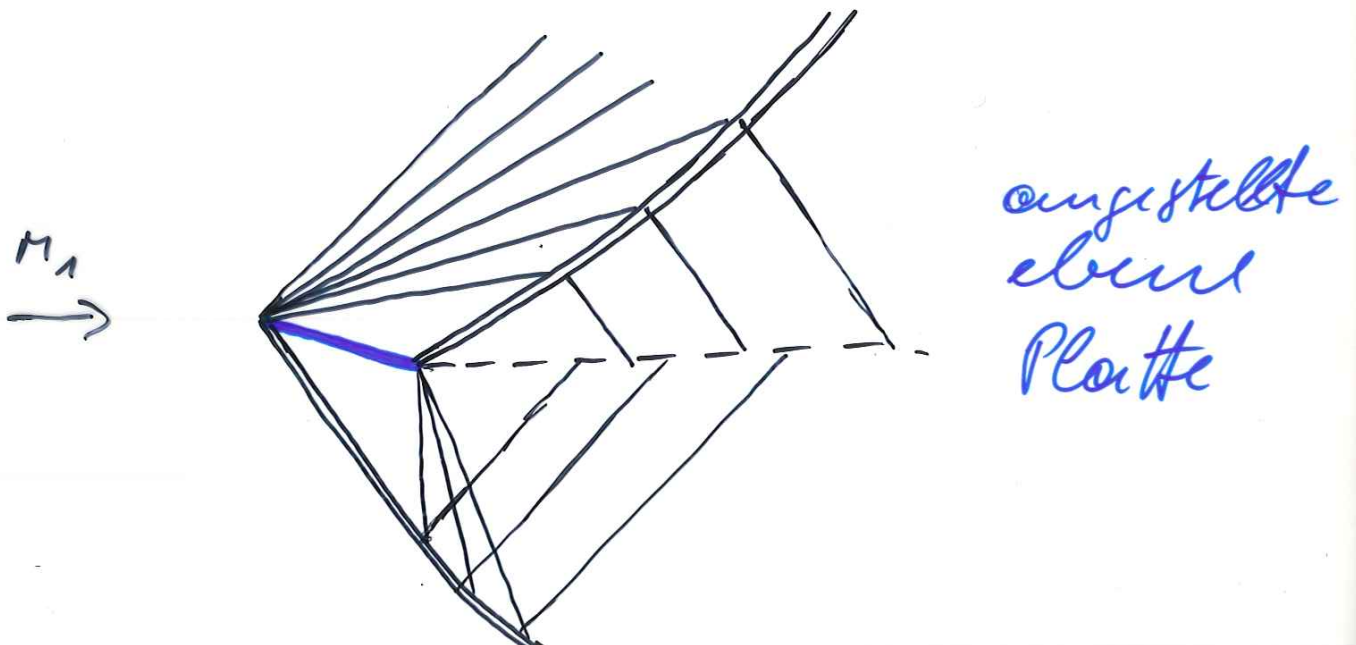
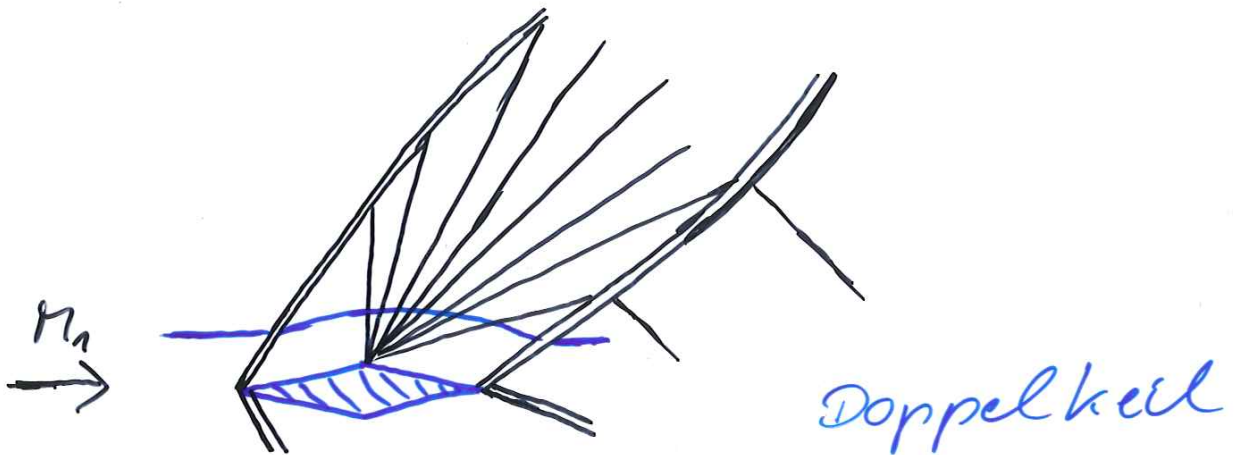
$$L = (P_2' - P_2) c \cos \alpha_0$$

$$D = (P_2' - P_2) c \sin \alpha_0$$

Achtung: Entropieerhöhung auf Ober- und Unterseite unterschiedlich

Interaktion zwischen Stoß und Expansion

→ Expansion schwächt den Stoß;
im Unendlichen wird d. Stoß
zur Nach-Linie



Theorie für dünne Flügel

schlanke Flügel, kleine Anstellwinkel \rightarrow analytische Lösungen für L, D basierend auf Näherungslösung für schw. Stöße und Expansionen

schräger Verdichtungsstoß

$$\frac{p_2 - p_1}{p_1} = \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M_1^2 \sin^2 \theta - 1) \quad (*)$$

kleine Anstellwinkel β

$$M_1^2 \sin^2 \theta - 1 = \frac{\gamma + 1}{2} \frac{M_1^2}{\sqrt{M_1^2 - 1}} \beta \quad (\Delta)$$

$$\Rightarrow \text{in Glg. } (*) \quad \frac{p_2 - p_1}{p_1} = \frac{\Delta p}{p} = \frac{\gamma M_1^2}{\sqrt{M_1^2 - 1}} \Delta \beta$$

\rightarrow Stärke d. Welle $\sim \beta$

p_1 : Anströmdruck, freie Anströmung hat keine Anstellw. $\beta = 0$

$$\Rightarrow \frac{p - p_1}{p_1} = \frac{\gamma M_1^2}{\sqrt{M_1^2 - 1}} \beta$$

$$c_p = \frac{p - p_1}{\rho_1} = \frac{2}{\gamma M_1^2} \frac{p - p_1}{p_1} = \frac{2\beta}{\sqrt{M_1^2 - 1}}$$

$c_p \sim$ zur örtl. Strömungsrichtung!

siehe auch Lösung mit d. l. W. Wellenl.

Gleichung für $\beta = f(n_1, \delta)$

$$\tan \beta = 2 \cot \delta \frac{n_1^2 \sin^2 \delta - 1}{n_1^2 (\gamma + \cos 2\delta) + 2} \quad (\text{FD II})$$

$$\beta \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad \delta \rightarrow \alpha_1$$

$$\Rightarrow \tan \beta \approx 2 \cot \alpha_1 \frac{n_1^2 \sin^2 \delta - 1}{n_1^2 (\gamma + \cos 2\alpha_1) + 2}$$

$$\tan \beta \approx \beta$$

$$\cot \alpha_1 = \sqrt{n_1^2 - 1}$$

$$\cos 2\alpha_1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha_1 = 1 - 2/n_1^2$$

$$\Rightarrow n_1^2 \sin^2 \delta - 1 \approx \frac{n_1^2 (\gamma + 1)}{2\sqrt{n_1^2 - 1}} \beta \quad (\Delta)$$

eingestellte, ebene Platte, d_0 klein

$$c_p = \pm \frac{2 d_0}{\sqrt{n_1^2 - 1}} \quad \begin{array}{l} \text{oben (upper)} \\ \text{unten (lower)} \end{array}$$

$$c_L = \frac{(P_{lo} - P_{up}) c \cos d_0}{q_1 c} = (c_{P_{lo}} - c_{P_{up}}) \cos d_0$$

$$c_d = \frac{(P_{lo} - P_{up}) c \sin d_0}{q_1 c} = (c_{P_{lo}} - c_{P_{up}}) \sin d_0$$

$$\cos d_0 = 1, \quad \sin d_0 = d_0$$

$$c_L = \frac{4 d_0}{\sqrt{n_1^2 - 1}} \quad c_d = \frac{4 d_0^2}{\sqrt{n_1^2 - 1}}$$

$$\frac{c_d}{c_L^2} = \frac{1}{4} \sqrt{n_1^2 - 1} \neq f(d_0)$$

Kraftausgriffspunkt in d. Mitte!

Doppelkeilprofil, ε klein

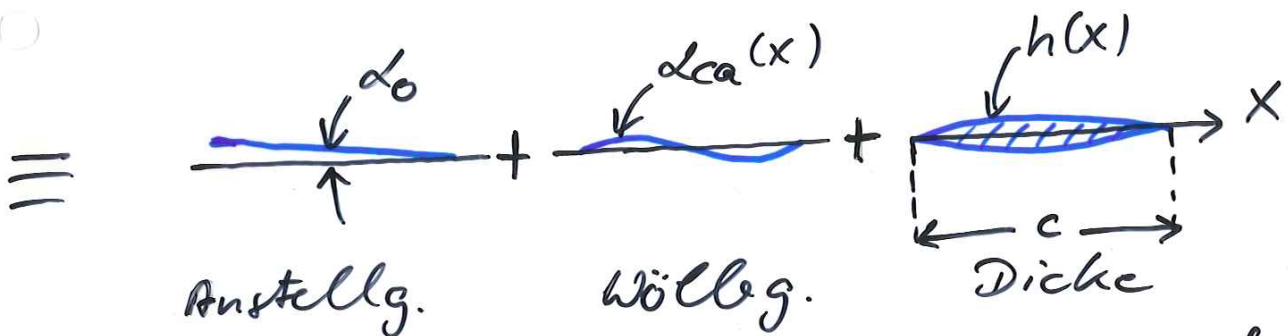
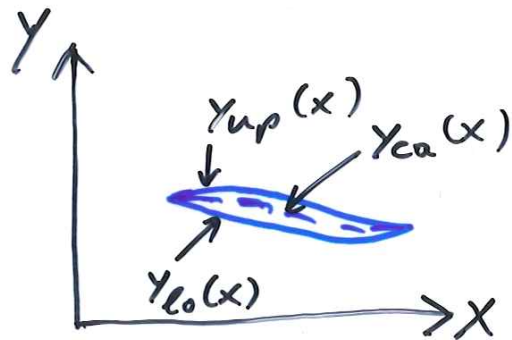
$$c_p = \pm \frac{2 \varepsilon}{\sqrt{n_1^2 - 1}} \quad \begin{array}{l} \text{Vordrseite} \\ \text{Rückseite} \end{array}$$

$$P_2 - P_3 = \frac{4 \varepsilon}{\sqrt{n_1^2 - 1}} q_1$$

$$D = (P_2 - P_3) t = (P_2 - P_3) \varepsilon c = \frac{4 \varepsilon^2}{\sqrt{n_1^2 - 1}} q_1 c$$

$$c_d = \frac{4 \varepsilon^2}{\sqrt{n_1^2 - 1}} = \frac{4}{\sqrt{n_1^2 - 1}} \left(\frac{t}{c}\right)^2$$

Flügel mit Dicke, Wölb. und Anstellwinkel



lin. Aufstlg. in: Anstellg., Wölb., Dicke

Druckbeiwert (Ober [upper]- und Unter [lower] Seite)

$$c_{pup} = \frac{2}{\sqrt{\pi_1^2 - 1}} \frac{dy_{up}}{dx}$$

$$c_{plo} = \frac{2}{\sqrt{\pi_1^2 - 1}} \left(- \frac{dy_{lo}}{dx} \right)$$

Aufteilung: Dicke $h(x)$ + Wölb. $y_{ca}(x)$

$$\frac{dy_{up}}{dx} = \frac{dy_{ca}}{dx} + \frac{dh}{dx} = -\alpha(x) + \frac{dh}{dx}$$

$$\frac{dy_{lo}}{dx} = \frac{dy_{ca}}{dx} - \frac{dh}{dx} = -\alpha(x) - \frac{dh}{dx}$$

$$\alpha(x) = \alpha_0 + \alpha_{ca}(x)$$

Auftrieb und Widerstand

$$L = \rho_1 \int_0^c (c_{p_{lo}} - c_{p_{up}}) dx$$

$$D = \rho_1 \int_0^c \left[c_{p_{lo}} \left(-\frac{dy_{eo}}{dx} \right) + c_{p_{up}} \left(\frac{dy_{up}}{dx} \right) \right] dx$$

mit $c_{p_{lo,up}}$ und $dy_{eo,up}/dx$

$$L = \frac{2\rho_1}{\sqrt{n_1^2 - 1}} \int_0^c \left(-2 \frac{dy_{ca}}{dx} \right) dx = \frac{4\rho_1}{\sqrt{n_1^2 - 1}} \int_0^c \alpha(x) dx$$

$$D = \frac{2\rho_1}{\sqrt{n_1^2 - 1}} \int_0^c \left[\left(\frac{dy_{eo}}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dy_{up}}{dx} \right)^2 \right] dx$$

$$= \frac{4\rho_1}{\sqrt{n_1^2 - 1}} \int_0^c \left[\alpha^2(x) + \left(\frac{dh}{dx} \right)^2 \right] dx$$

Integrale durch Mittelwerte ausdrücken

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{c} \int_0^c \alpha(x) dx \quad ; \quad \bar{\alpha}_{ca} = 0 \quad (\text{p. def.})$$

$$\bar{\alpha} = \alpha_0$$

$$\bar{\alpha}^2 = \overline{(\alpha_0 + \alpha_{ca})^2} = \bar{\alpha}_0^2 + 2\bar{\alpha}_0\bar{\alpha}_{ca} + \overline{\alpha_{ca}^2} = \bar{\alpha}_0^2 + \overline{\alpha_{ca}^2}$$

$$c_L = \frac{L}{\rho_1 c} = \frac{4\bar{\alpha}}{\sqrt{n_1^2 - 1}} = \frac{4\alpha_0}{\sqrt{n_1^2 - 1}}$$

$$c_D = \frac{D}{\rho_1 c} = \frac{4}{\sqrt{n_1^2 - 1}} \left[\overline{\left(\frac{dh}{dx} \right)^2} + \alpha_0^2 + \overline{\alpha_{ca}^2}(x) \right]$$

schlankes Profil in Überschallström.

3 Anteile d. Widerstands:

- Dickenverteilg. dh/dx
- Auftrieb d_0
- Wölbq. dca

Auftrieb: nur abhängig von d_0

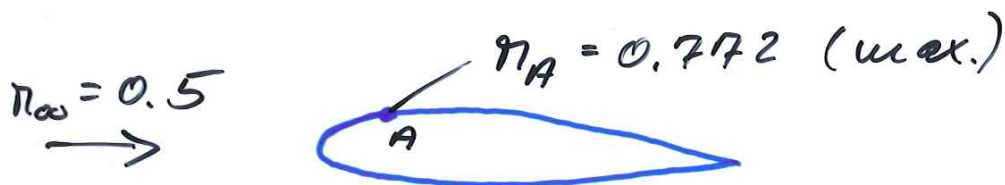
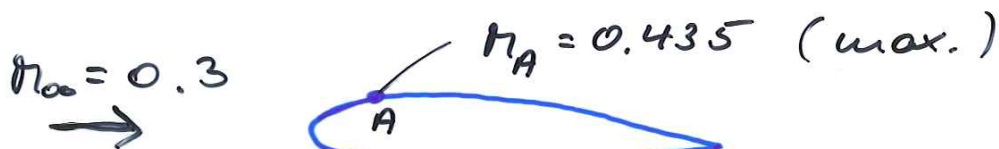
diese Einteilg. d. Widerstands und Auftriebs ist durch d. Linearität d. DGL bedingt; kleine Störgr.
jedoch nicht ausreichend als Begründg. d. Linearität (siehe Transonik oder Hyperschall)

Kutta Bedingung: nicht explizit berücksichtigt;
superson. Strög. $\hat{=}$
Vergabe d. Richtung!

Kritische Machzahl

lin. Theorie nicht gültig in
trans. Ström. ($0.8 \leq M_{\infty} \leq 1.2$); trans.
Ström. stark nichtlin.

Störung über Prof. für $M_{\infty} \uparrow$



Bestimmung von $C_{p,cr}$, d.h.

von C_p ($\eta_{\infty} = \eta_{cr}$)

$$\frac{p_A}{p_{\infty}} = \frac{p_A/p_0}{p_{\infty}/p_0} = \left(\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{\infty}^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_A^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$C_{p,A} = \frac{2}{\gamma M_{\infty}^2} \left(\frac{p_A}{p_{\infty}} - 1 \right)$$

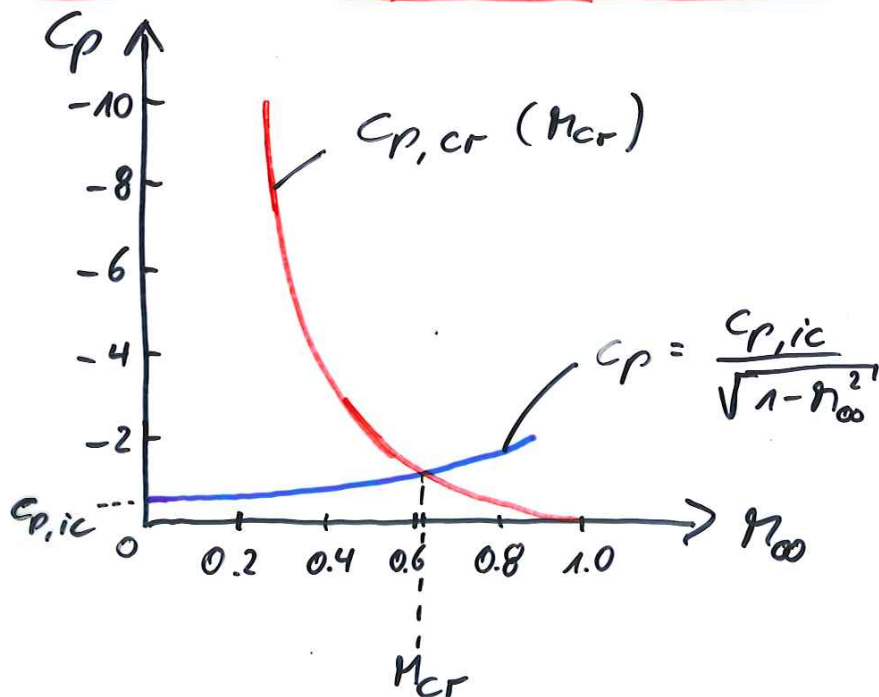
$$\Rightarrow C_{p,A} = \frac{2}{\gamma M_{\infty}^2} \left[\left(\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{\infty}^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_A^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - 1 \right]$$

$$C_{p,cr} = C_{p,A} (\eta_A = 1)$$

$$C_{p,cr} = \frac{2}{\gamma M_{\infty}^2} \left[\left(\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{\infty}^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2}} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - 1 \right]$$

bzw.

$$C_{p,cr} = \frac{2}{\gamma M_{cr}^2} \left[\left(\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} \eta_{cr}^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2}} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - 1 \right] \quad (*)$$



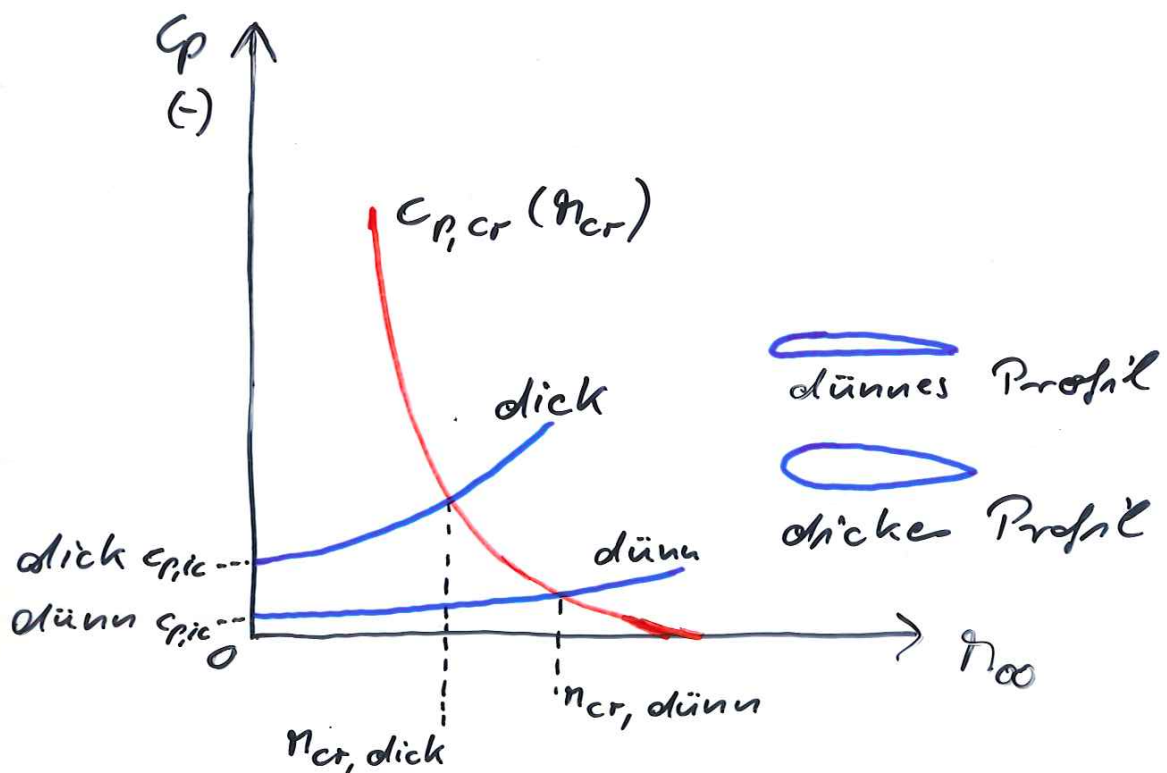
$c_{p,cr}(Re)$ gültig f. isentrope Strömung;
Form d. Profils tritt nicht auf

⇒ Glg. (*) allgemein gültig, unab-
hängig v. Profil

approx. Bestimmung d. krit. Reynoldszahl

- Bestg. von $c_{p,ic}$ (exp., theor., num.)
f. best. Profil
- Bestg. von $c_p = f(c_{p,ic}, Re)$ via
Ähnlichkeitsregel (z.B. Prandtl-Glauert)
- Bestg. des Schnittpkt. von
 $c_p(c_{p,ic}, Re)$ und $c_{p,cr}(Re)$
⇒ Re_{cr}

Achtg.: Näherg. durch Ähnlichkeitsgesetz

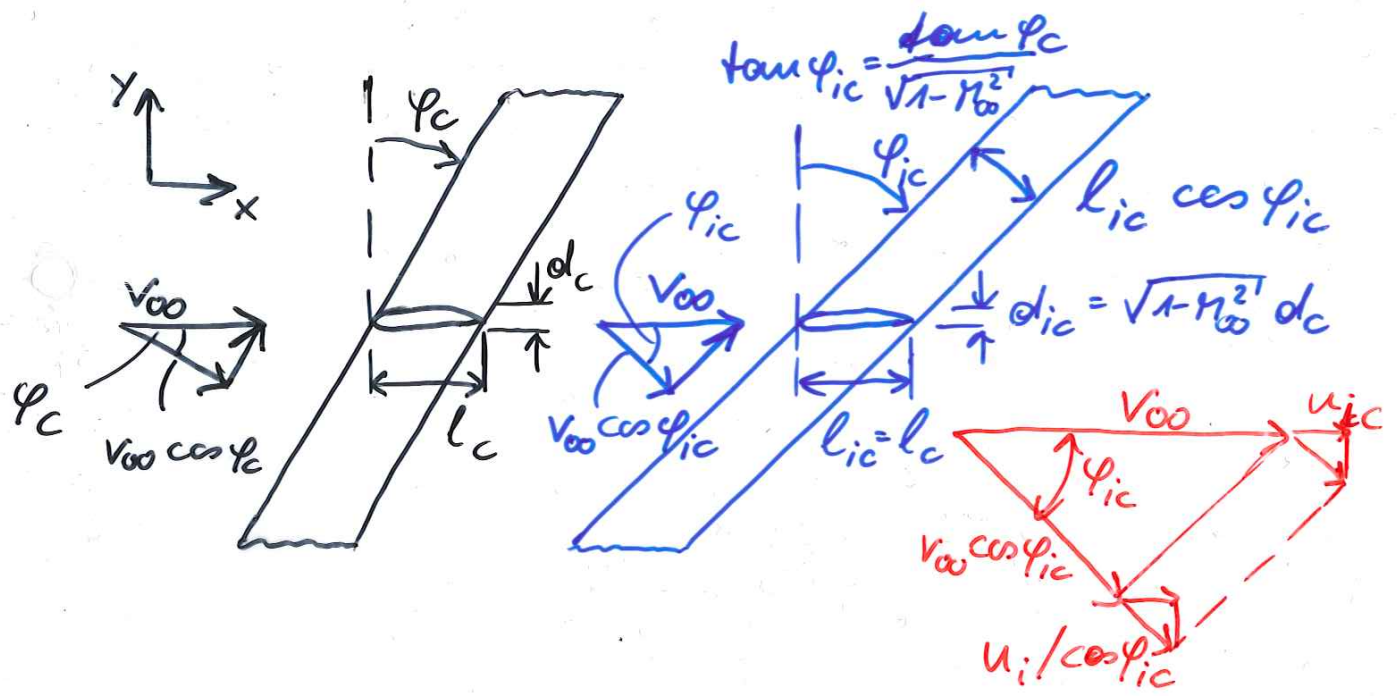


Pfeilflügel

Pfeilung \rightarrow Reduzierung d. Kompressibilitäts effekte

Erläuterung d. physikal. Prinzips:

- Flügel unendl. Spannweite
- v_{∞}
- φ_c c : kompressibel



Mitbewegter Beobachter in Spannw. richtg.

$v_{\infty} \sin \varphi_c \Rightarrow$ auftreffende Strög.
⊥ zur Profilnase

Verstellung: p-Verteilg. unbeeinflusst
von $v_{\infty} \sin \varphi_c$,
Auswirkungen auf t-Verteilg.

\Rightarrow effektive Mach zahl : $M_{\infty} \cos \varphi_c$

$$\rightarrow M_{\infty} = O(1) > M_{\infty} \cos \varphi_c$$

Nachteil d. Pfeilung:

$v_{\infty} \cos \varphi_c < v_{\infty} \Rightarrow c_L \downarrow$
Ausgleich über größere \overline{F} .

Pfeilung ebenfalls bei: Propellern,
Kompressoren

▽ Regel f. d. Beschreibg. d. Einflusses
o d. Pfeilung

Ausgang: ellipt. Profil

Ähnlichkeit: Göthert Regel

→ Ref. geo. skal. mit $(1-M_\infty^2)^{-1/2}$

u : Störgeschwindigkeit

$$\text{es gilt: } \left(\frac{u}{V_\infty} \right)_{\max} = \frac{d}{l}$$

mitbewegte Beobachter:

$$\left(\frac{u_{ic} / \cos \varphi_{ic}}{V_\infty \cos \varphi_{ic}} \right)_{\max} = \frac{d_{ic}}{l_{ic} \cos \varphi_{ic}}$$

bzw.

$$\left(\frac{u_{ic}}{V_\infty} \right)_{\max} = \left(\frac{d}{l} \right)_{ic} \cos \varphi_{ic} = \frac{d_{ic}}{l_{ic}} \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi_{ic}}}$$

Göthert:

$$\left(\frac{d}{l} \right)_{ic} = \sqrt{1 - M_\infty^2} \left(\frac{d}{l} \right)_c, \quad \tan \varphi_{ic} = \frac{\tan \varphi_c}{\sqrt{1 - M_\infty^2}}$$

$$\left(\frac{u}{V_\infty} \right)_{ic} = (1 - M_\infty^2) \left(\frac{u}{V_\infty} \right)_c$$

Vernachlässigung von "c"

$$\left(\frac{u}{V_{\infty}}\right)_{\max} = \frac{dl/l}{\sqrt{1 - \eta_{\infty}^2 + \tan^2 \varphi}}$$

in kompr. Strömung $\eta_{\infty} = 0$

$$\left(\frac{u_{ic}}{V_{\infty}}\right)_{\max} = \frac{dl/l}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi}}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{u}{V_{\infty}}\right)_{\max} / \left(\frac{u_{ic}}{V_{\infty}}\right)_{\max}$$

$$\frac{\left(\frac{u}{V_{\infty}}\right)_{\max}}{\left(\frac{u_{ic}}{V_{\infty}}\right)_{\max}} = \frac{-c_{p,\max}}{-c_{p_{ic},\max}} = \frac{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi}}{\sqrt{1 - \eta_{\infty}^2 + \tan^2 \varphi}}$$

$\varphi = 0 \Rightarrow$ Prandtl-Glauert Regel

$\varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{-c_{p,\max}}{-c_{p_{ic},\max}} \neq f(\eta_{\infty})$

Bsp.: $\varphi = 0, \eta_{\infty} = 0 \rightarrow \eta_{\infty} = 0.8$

$$\Rightarrow \frac{c_{p,\max}}{c_{p_{ic},\max}} = 1.67$$

$\varphi = 30^\circ, \eta_{\infty} = 0 \rightarrow \eta_{\infty} = 0.8$

$$\Rightarrow \frac{c_{p,\max}}{c_{p_{ic},\max}} = 1.39$$

$$\varphi = 45^\circ \Rightarrow \frac{c_p}{c_{p_{ic}}} = 1.21$$

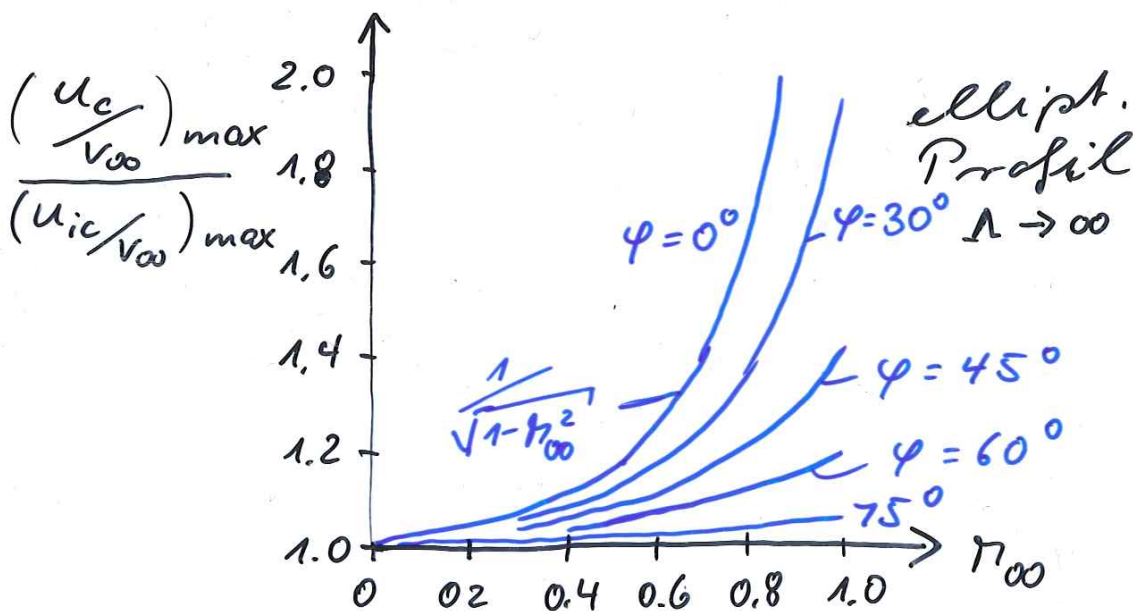
$$\varphi = 60^\circ \Rightarrow \frac{c_p}{c_{p_{ic}}} |_{max} = 1.09$$

$$\varphi = 0 : M_\infty \rightarrow 1 \Rightarrow \frac{u}{v_\infty} |_{max} \rightarrow \infty$$

$$\varphi \neq 0 : M_\infty \rightarrow \sqrt{1 + \tan^2 \varphi} \Rightarrow \frac{u}{v_\infty} |_{max} \rightarrow \infty$$

M_∞ im Überschall!

Bemerkg.: lin. Theorie bei $M_\infty \rightarrow 1$ nicht gültig, da $\frac{u}{v_\infty} |_{max} \rightarrow \infty$



! Einfluß von φ auf $M_{0,cr}$!

I) Annahme: Profile \perp zur Vorderkante unverändert;

v_{∞} ungestörte Anströmung;

$\delta = d/l$ in Strömungsrichtung; $\delta_N \perp$ zur Vorderkante

$$\Rightarrow \delta = \delta_N \cos \varphi$$

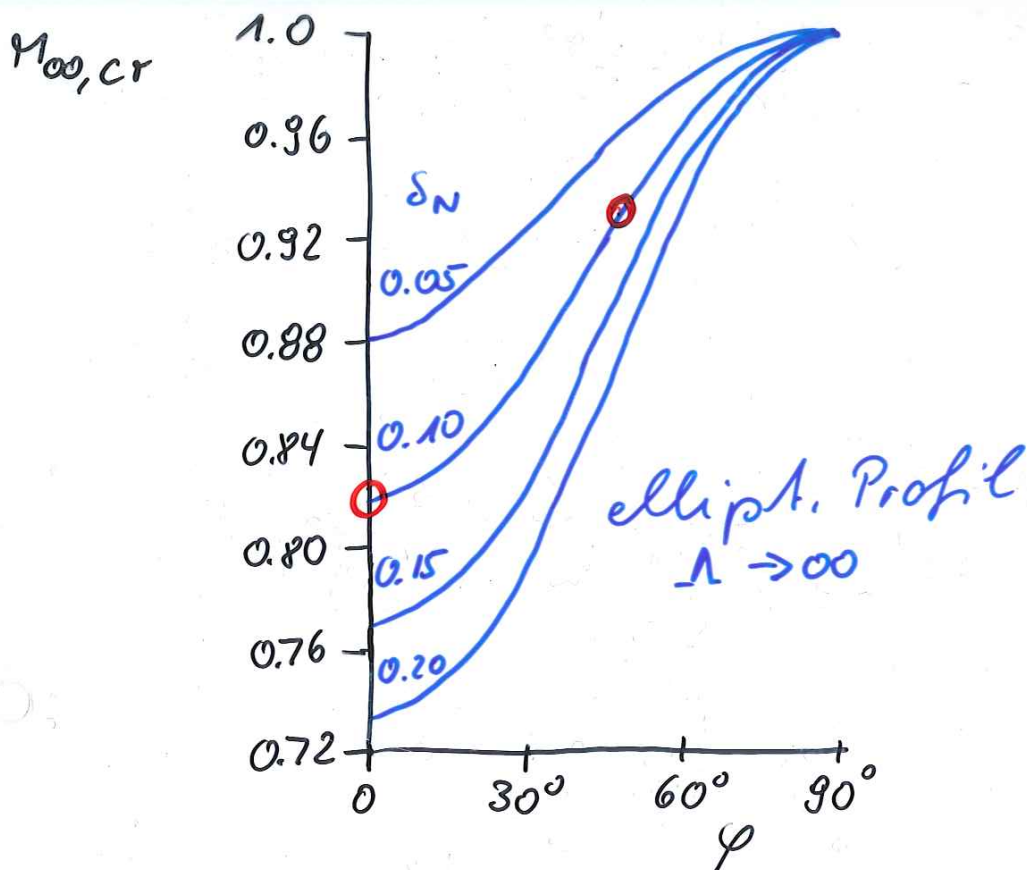
$$\Rightarrow \left(\frac{u}{v_{\infty}} \right)_{\max} = \frac{\delta_N \cos \varphi}{\sqrt{1 - M_{\infty}^2 + \tan^2 \varphi}}$$

$\frac{u}{v_{\infty}} \Big|_{\max}$ $\xrightarrow{\text{Isentrop. Beziehung}}$ $M_{\text{lok.}}$

$\Rightarrow \delta$ bekannt $\rightarrow M_{\text{lok, max}} = f(M_{\infty}, \varphi)$

$\Rightarrow M_{\text{lok, max}} = 1 \rightarrow \underline{\underline{M_{0,cr}}}$ für δ

D. h. $M_{0,cr}$ mittels sootische. Fktol.
d. Gesamtgeschwindigkeit ∇



$$\delta_N = 0.10 \quad M_{\infty, cr} = 0.82 \quad (\varphi = 0^\circ)$$

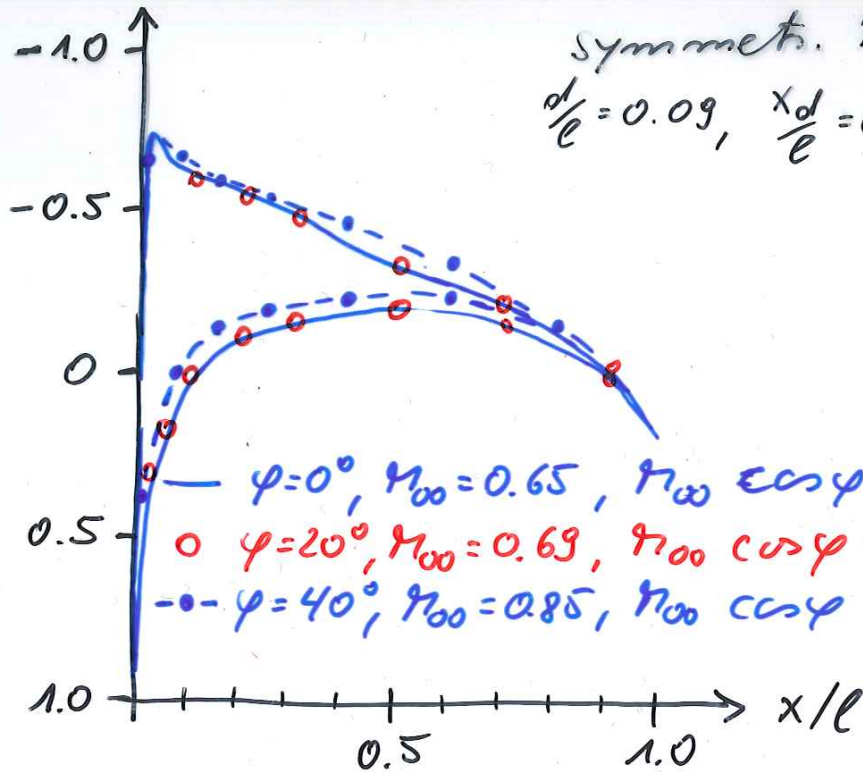
bzw. $M_{\infty, cr} = 0.93 \quad (\varphi = 45^\circ)$

II) Prüfung: Normalkomp. bestimmt $M_{\infty, cr}$

$$\Rightarrow M_{\infty, cr|II} > M_{\infty, cr|I}$$

$$\rightarrow \text{real} : M_{\infty, cr|I} < M_{\infty, cr} < M_{\infty, cr|II}$$

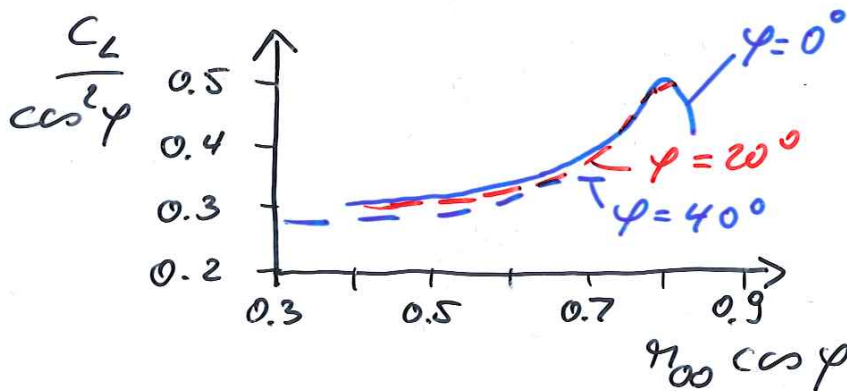
$$\frac{p - p_{\infty}}{\frac{\rho_{\infty}}{2} v_{\infty}^2 \cos^2 \varphi}$$



Symmetrisch. Prof.,
 $d/l = 0.09$, $x_d/l = 0.4$, $\alpha = -2^\circ$

— $\varphi = 0^\circ$, $M_{\infty} = 0.65$, $M_{\infty} \cos \varphi = 0.65$
 ○ $\varphi = 20^\circ$, $M_{\infty} = 0.69$, $M_{\infty} \cos \varphi = 0.65$
 -●- $\varphi = 40^\circ$, $M_{\infty} = 0.85$, $M_{\infty} \cos \varphi = 0.65$

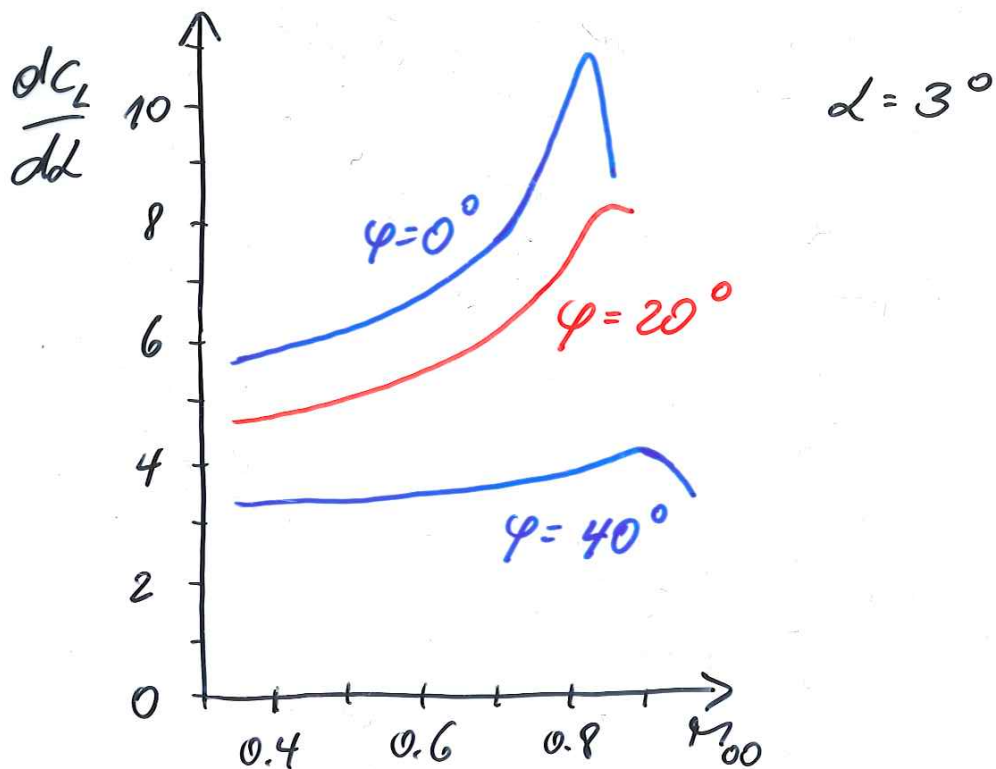
⇒ Normalkomp. entscheidend
 f. Druckverteilg.: c_p nahezu
 deckungsgleich!



$\alpha = 3^\circ$

⇒ $\frac{c_L}{\cos^2 \varphi} \neq f(\varphi)$ (näherungsweise!)

Absinken von C_L infolge φ

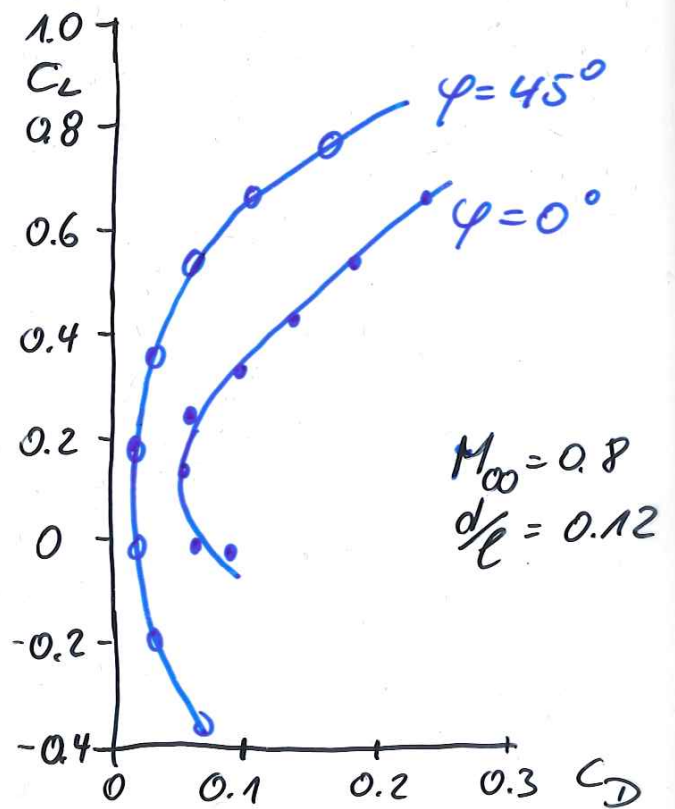
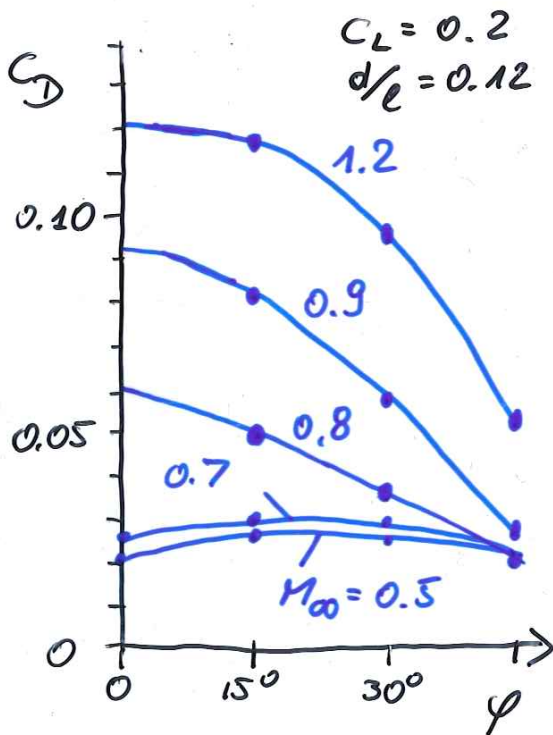
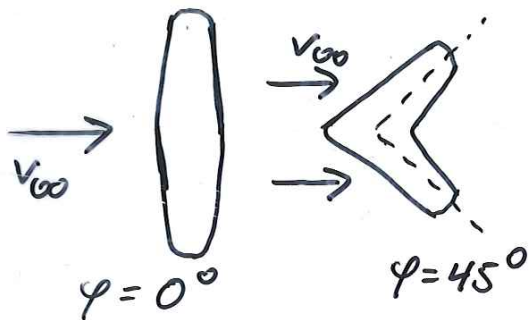


$\varphi \uparrow$ Kompressibilitätseffekte bei gr. M_∞ ;

$\varphi = 40^\circ \Rightarrow C_L \downarrow (\approx 40\%), M_{\infty,cr} \uparrow (0.82 \rightarrow 0.90)$

! Tragflügel endl. Spannweite !

Kompressibilitätseffekte: pos. Einfl.
von φ durch Λ verstärkt



▽ Korrelation zur Berücksichtigung
 • d. Effekte von φ und Λ
 (nach Diederich, 50er Jahre) ▽

$$\frac{dC_L/dd}{(dC_{LN}/dd) \cos \varphi} = \frac{\tilde{F}}{2 + \tilde{F} \sqrt{1 + 4/\tilde{F}^2}}$$

$$\tilde{F} = \frac{\Lambda}{\frac{1}{2\pi} \left(\frac{dC_{LN}}{dd} \right) \cos \varphi}$$

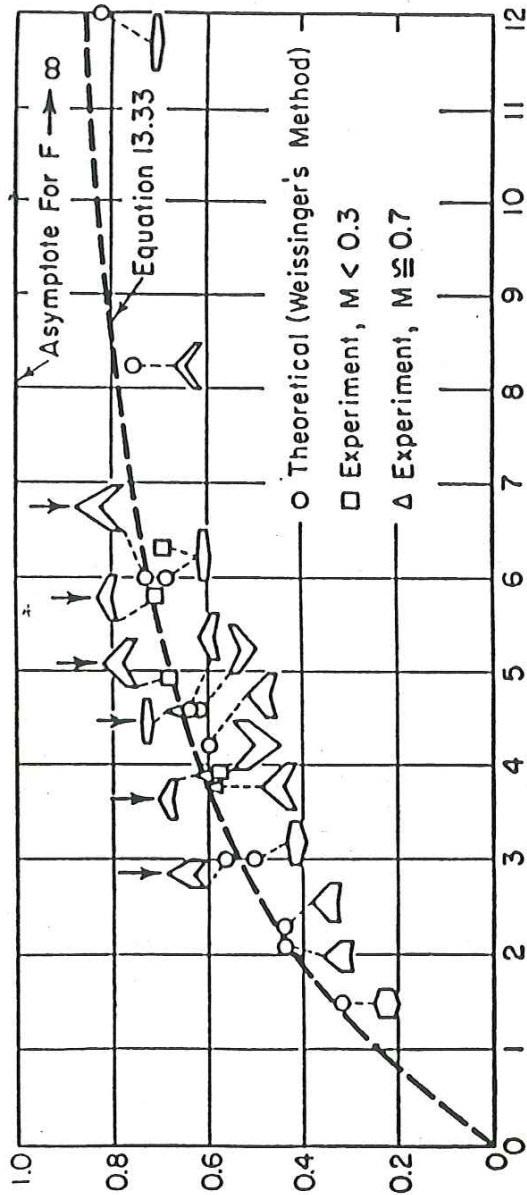
C_{LN} : Auftriebskoeff. d. Prof. \perp zur $n\%$ -
 Sehnenlinie

α : Anstellwinkel d. Flügels

C_L : Auftriebskoeff. d. Flügels

→ zu berücksichtigende Genauig-
 keit für verschied. F ! ▽

$$\frac{dc_2/d\alpha}{dc_{2N}/d\alpha} \cos \varphi$$

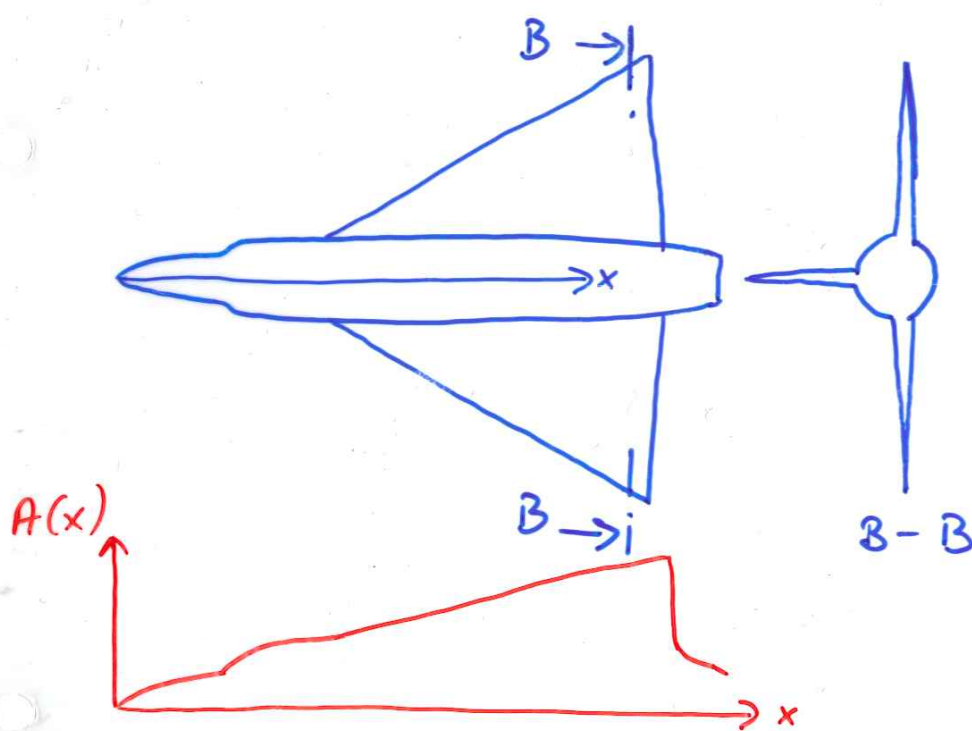


$$F = \frac{-\Lambda}{\frac{1}{2\pi} \left(\frac{dc_{2N}}{d\alpha} \right) \cos \varphi}$$

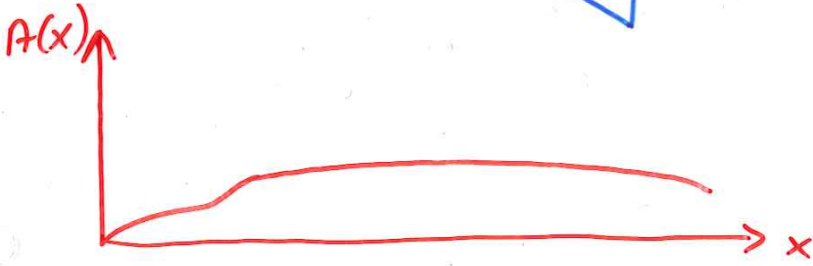
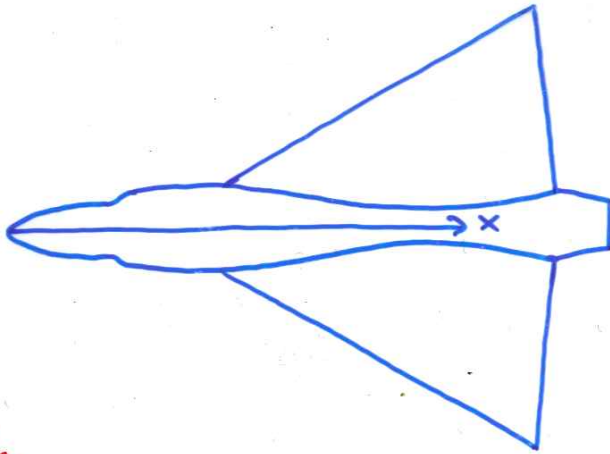
Flächenregel

Whitcomb 50er Jahre

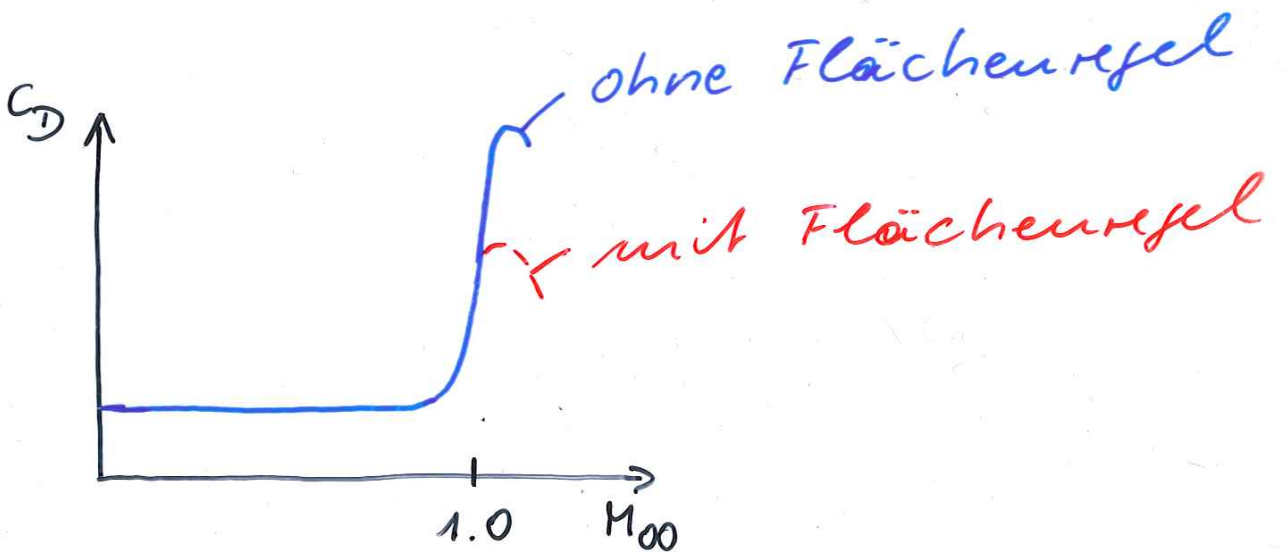
c_D -Reduktion bei $M_\infty > 1$ ∇



starke Änderung: $A(x)$, dA/dx



$A(x)$: Flächenregel berücksichtigt



Inkompressible Strömung über Profile

Konforme Abbildung

Panelverfahren

- Tropfen-theorie
- Skelett-Theorie
- Profile endl. Dicke mit Auftrieb

Inkompressible Strömung über
Tragflügel unendlicher Spannweite

→ Profiltheorie

Konforme Abbildung

→ exakte Lösung,
jedoch nur 2D

Singularitätenverfahren

→ Näherungslösungen,
aber 3D-Ström.

Konforme Abbildung

bisher indirekte Analyse d. Strömung

Vorgabe v. El. Strom \Rightarrow Strömungsfeld

Umkehrg. [Strömungsfeld \rightarrow El. Strom]
ist praxisorientierter

Konforme Abbildung

allgemein:

Ausgangsebene $\xrightarrow{f(z)}$ Abbildungsebene
(z-Ebene) ! gleiche Winkel ! (w-Ebene)

Abbildungsfunktion $f(z)$

$$f(z) = f(x+iy) = f = f(x,y) + i g(x,y)$$

Bsp.:

$$f(z) = \frac{1}{2} z^2$$

$$\Rightarrow f = \frac{1}{2} (x^2 - y^2), \quad g = xy$$

Komplexe Strömfkt. = Potentiälfkt. +
 i Stromfkt.
 $= \phi + i\psi$

$\phi \perp \psi$ in z - bzw. f -Ebene

Aufgabe: Für d. Strög. um d. Geometrie
 B in d. f -Ebene wird
 $f(z)$ gesucht, die bekannte
Kontr. A d. z -Ebene auf
 B abbildet.

Geschw.feld d. f -Ebene

$$w_f(f) = \frac{dF}{df} = \frac{dF}{dz} \frac{dz}{df} = w_z(z) \frac{dz}{df}$$

Bezugsströg.: Kreiszyklinder umströg.,
denn

Abbildg. zw. einfach zusammenh.
hängenden Gebieten und einem
Kreis (fast) immer möglich
[Riemannsche Abbildungssatz]

Parallel angeströmte Platte

z -Ebene : Kreiszylinder

ζ -Ebene : Platte

$$F(z) = u_{\infty} \left(z + \frac{a^2}{z} \right)$$

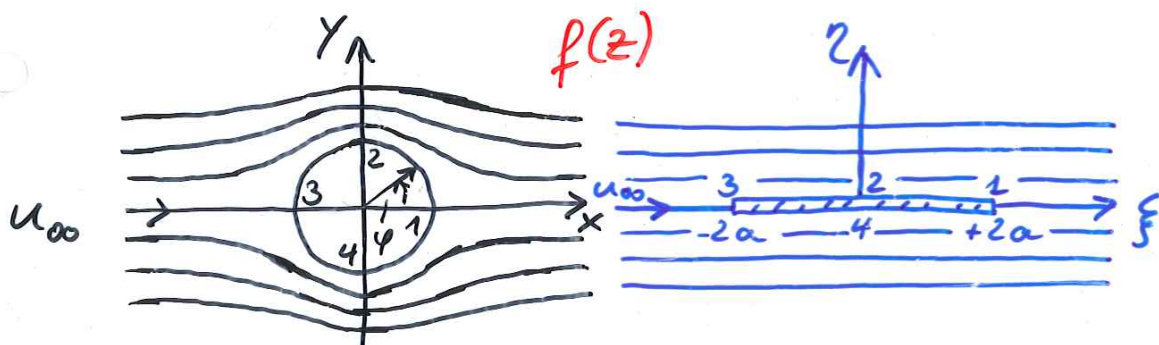
$$\zeta = f(z) = z + \frac{a^2}{z}$$

(Zukhovskij'sche
Abbildfkt.)

$$z = a e^{i\varphi}$$

$$\zeta = a (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) = 2a \cos \varphi$$

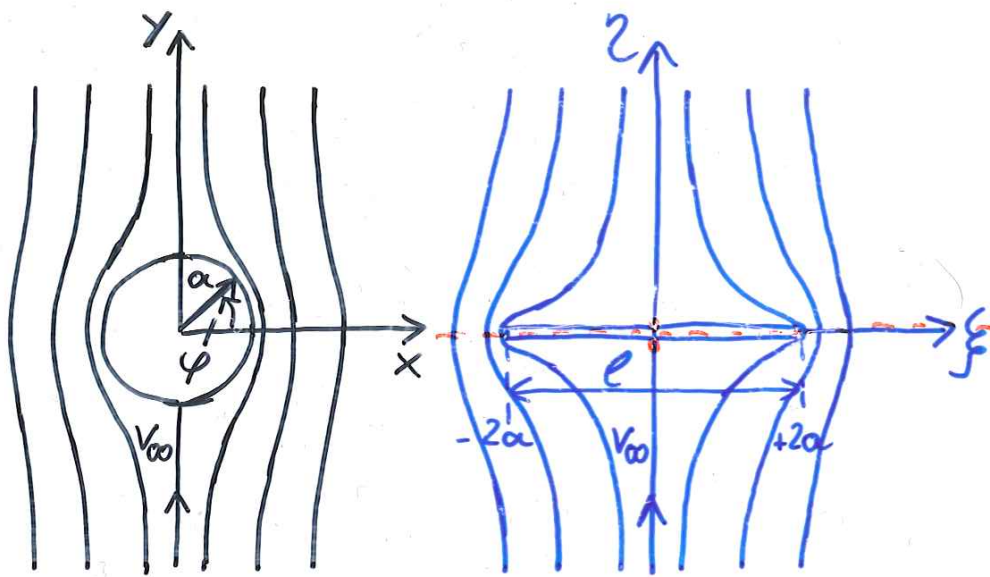
$$\Rightarrow \zeta = 2a \cos \varphi, \quad z = 0$$



$$F(z) = u_{\infty} \left(z + \frac{a^2}{z} \right)$$

$$F(\zeta) = u_{\infty} \zeta$$

Senkrecht angeströmte Platte



$$F(z) = i v_{\infty} \left(-z + \frac{a^2}{z} \right)$$

$$w_z = \frac{dF}{dz} = -i v_{\infty} \left(1 + \frac{a^2}{z^2} \right)$$

$$f = f(z) = z + \frac{a^2}{z}, \quad \frac{df}{dz} = \frac{z^2 - a^2}{z^2}$$

$$w_f = w_z \frac{1}{df/dz} = -i v_{\infty} \frac{z^2 + a^2}{z^2 - a^2}$$

$$\frac{z^2 - a^2}{z} = \pm \sqrt{f^2 - 4a^2}$$

$$\Rightarrow w_f = \pm i v_{\infty} \frac{f}{\sqrt{f^2 - 4a^2}}$$

$$\xi = 0 : w_\xi = 0$$

$$\xi = \pm 2a : w_\xi \rightarrow \infty$$

$$\eta = 0 \text{ Ebene} : \xi = \xi, \quad a = \ell/4$$

$$u - iv = \pm i v_\infty \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - (\ell/2)^2}}$$

unterseite

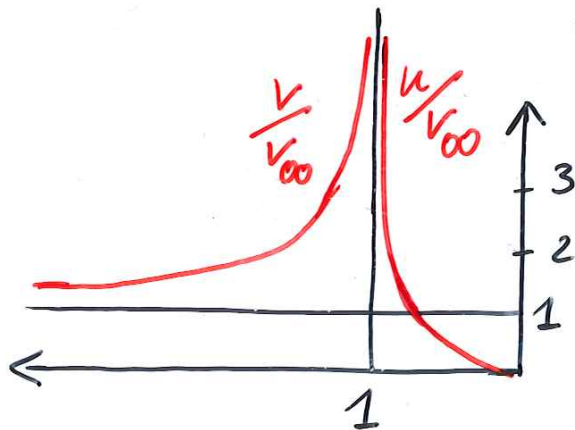
$$0 < |\xi| < \ell/2 :$$

$$u = \begin{matrix} \oplus \\ \ominus \end{matrix} v_\infty \frac{\xi}{\sqrt{(\ell/2)^2 - \xi^2}}$$

oberseite

$$|\xi| > \ell/2 :$$

$$v = v_\infty \frac{|\xi|}{\sqrt{\xi^2 - (\ell/2)^2}}$$



$\eta = 0 !!$

Aufgestellte ebene Platte mit Auftrieb

→ einfachste Form d. Tragfl. strög.

längsangestr. Platte

$$F_1(z) = u_{\infty} \left(z + \frac{a^2}{z} \right)$$

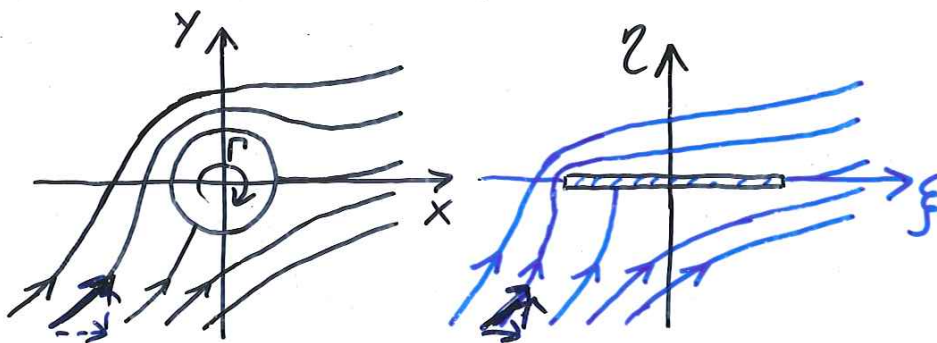
⊥ angestr. Platte

$$F_2(z) = -iv_{\infty} \left(z - \frac{a^2}{z} \right)$$

Potentialwirbel

$$F_3(z) = \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z$$

$$\Rightarrow F(z) = (u_{\infty} - iv_{\infty})z + (u_{\infty} + iv_{\infty})\frac{a^2}{z} + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z$$



$$w_z(z) = \frac{dF}{dz} = (u_{\infty} - iv_{\infty}) - (u_{\infty} + iv_{\infty})\frac{a^2}{z^2} + \frac{i\Gamma}{2\pi} \frac{1}{z}$$

$$f = z + \frac{a^2}{z}, \quad \frac{df}{dz} = \frac{z^2 - a^2}{z^2}, \quad w_f = w_z \frac{z^2}{z^2 - a^2}$$

$$w_f = u_{\infty} - iv_{\infty} \frac{z^2 + a^2}{z^2 - a^2} + \frac{i\Gamma}{2\pi} \frac{z}{z^2 - a^2}$$

$$W_f (f \rightarrow \infty) = W_z (z \rightarrow \infty) = u_{\infty} - i v_{\infty}$$

$$\frac{z^2 + a^2}{z^2 - a^2} = \pm \frac{f}{\sqrt{f^2 - 4a^2}} \quad , \quad \frac{z}{a^2 - z^2} = \pm \frac{1}{\sqrt{f^2 - 4a^2}}$$

$$W_f (f) = u_{\infty} \mp i \frac{v_{\infty} f - \frac{\Gamma}{2\pi}}{\sqrt{f^2 - 4a^2}}$$

Kutta-Beding. bei $f = 2a \Rightarrow \Gamma = 4\pi a v_{\infty} = \pi l v_{\infty}$

$$\Rightarrow W_f (f) = u_{\infty} \mp i v_{\infty} \sqrt{\frac{f - l/2}{f + l/2}}$$

$\eta = 0$
 $\zeta = 0$: $f = \xi$ und $|\xi| \leq l/2$ (Platte)

$$u = u_{\infty} \pm v_{\infty} \sqrt{\frac{l - 2\xi}{l + 2\xi}} \quad \begin{array}{l} \text{Oberseite} \\ \text{Unterseite} \end{array}$$

result. Geschw.: $W_{\infty}^2 = u_{\infty}^2 + v_{\infty}^2$

Anstellwinkel α : $u_{\infty} = W_{\infty} \cos \alpha$

$v_{\infty} = W_{\infty} \sin \alpha$

$$u = w_{\infty} \left(\cos \alpha \pm \sin \alpha \sqrt{\frac{l-2\xi}{l+2\xi}} \right)$$

Vordrücke $\xi = -\frac{l}{2} : u \rightarrow \infty$

Hindrücke $\xi = \frac{l}{2} : u = w_{\infty} \cos \alpha$

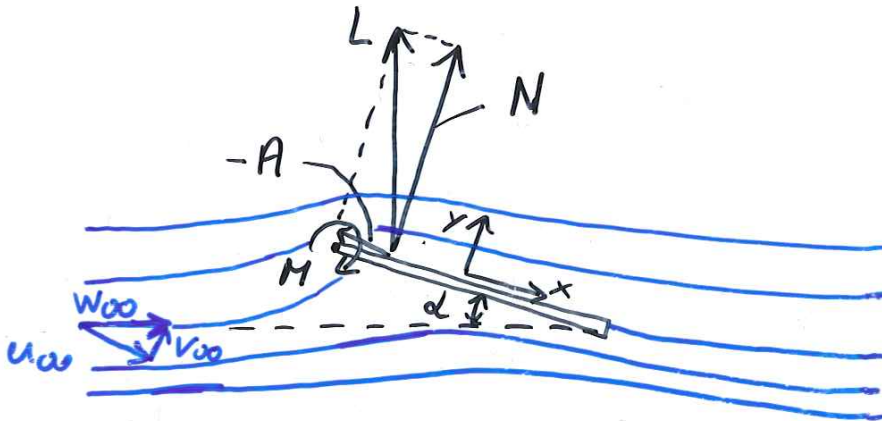
Geschwindigkeitsprung Δu

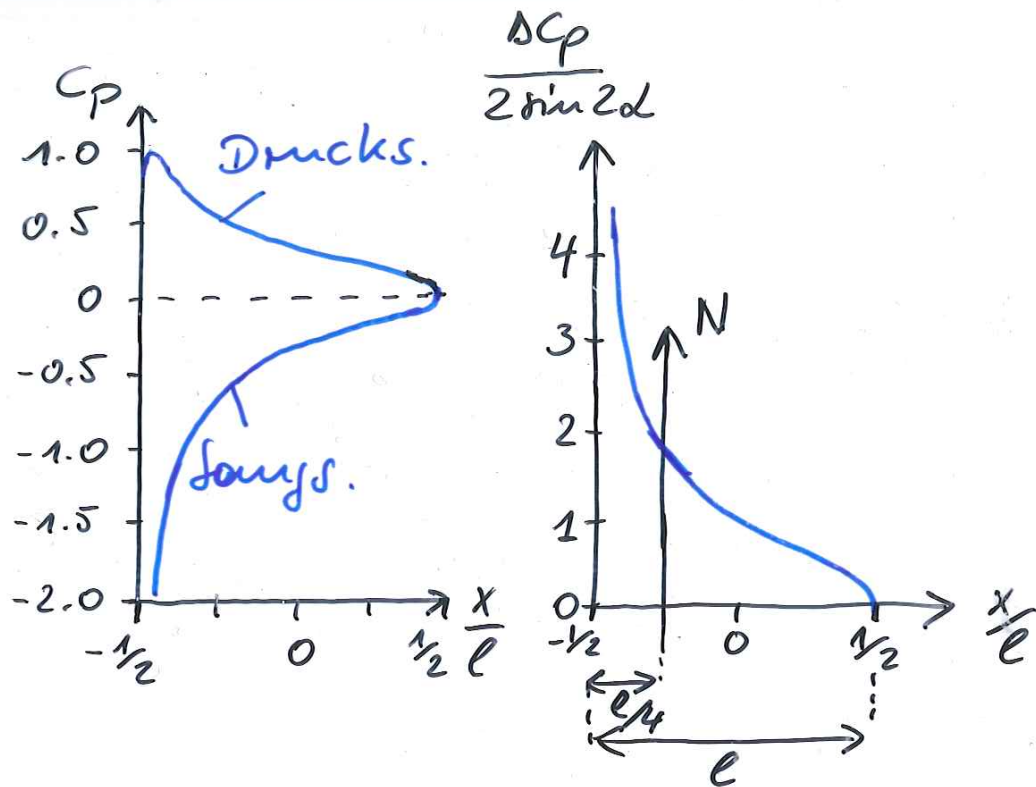
$$\Delta u = u_0 - u_u = 2 w_{\infty} \sin \alpha \sqrt{\frac{l-2\xi}{l+2\xi}}$$

$$\Delta u \left(\xi = \frac{l}{2} \right) = 0$$

Druckbeiwert $c_p = \frac{p - p_{\infty}}{\frac{\rho}{2} w_{\infty}^2} = 1 - \left(\frac{u}{w_{\infty}} \right)^2$

$$\Delta c_p = c_{p_u} - c_{p_0} = 2 \sin 2\alpha \sqrt{\frac{l-2x}{l+2x}}$$





resultierende Kraft L

$$L = \sqrt{N^2 + A^2}$$

Kutta-Zhukhovskij : $N = \rho b u_{\infty} \Gamma$
 $A = -\rho b v_{\infty} \Gamma$

$$\Gamma = v_{\infty} \pi c$$

$$\Rightarrow A = -\rho \pi b c v_{\infty}^2 \sin^2 \alpha$$

$$N = \rho \pi b c v_{\infty}^2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\Rightarrow L = \rho \pi b c v_{\infty}^2 \sin \alpha$$

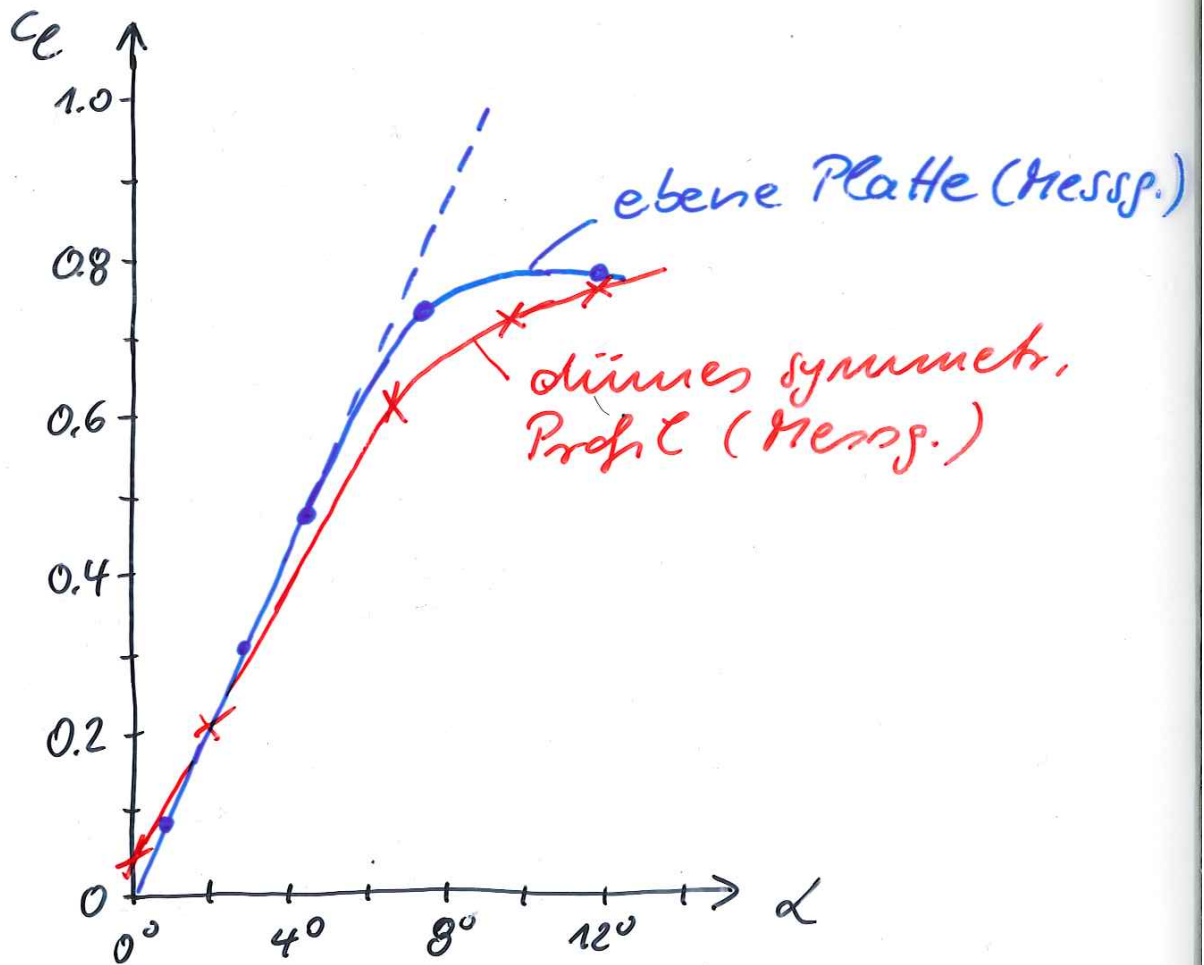
Auftriebskoeffizient $c_e = \frac{L}{\rho \cdot l \cdot b}$

$$c_e = 2\pi \sin \alpha$$

bzw.

$$c_e = 2\pi \alpha, \quad \frac{dc_e}{d\alpha} = 2\pi$$

Bemerkg.: gültig f. schlanke Profile
mit geringer Wölbgs.



Momentenberechnung

Koordinatensystem $\tilde{x} = x + \frac{l}{2}$

$$dM = - \left(x + \frac{l}{2}\right) dN \quad \curvearrowright +$$

$$dN = \rho b u_{\infty} d\Gamma$$

$$d\Gamma = (u_0 - u_n) dx$$

$$\Rightarrow dN = 2 \rho b u_{\infty} v_{\infty} \sqrt{\frac{l-2x}{l+2x}} dx$$

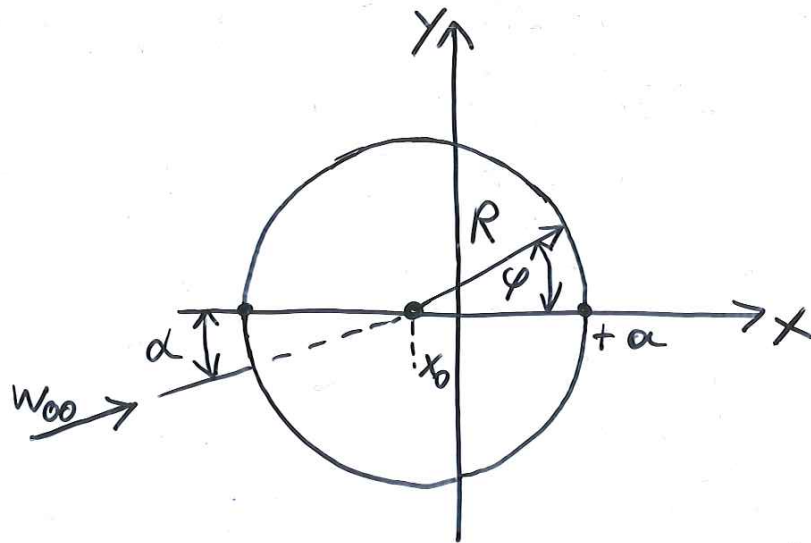
$$\Rightarrow M = - \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left(x + \frac{l}{2}\right) 2 \rho b u_{\infty} v_{\infty} \sqrt{\frac{l-2x}{l+2x}} dx$$

$$M = -\frac{1}{4} \rho b \pi l^2 u_{\infty}^2 \sin d \cos d = -\frac{l}{4} N$$

$$C_m = \frac{M}{\rho l^2 u_{\infty}^2} = -\frac{\pi}{2} \sin d \cos d = -\frac{\pi}{4} \sin(2d)$$

d klein $\Rightarrow \frac{C_m}{C_e} = -\frac{1}{4}$

Symmetrisches Zhukovskij-Profil

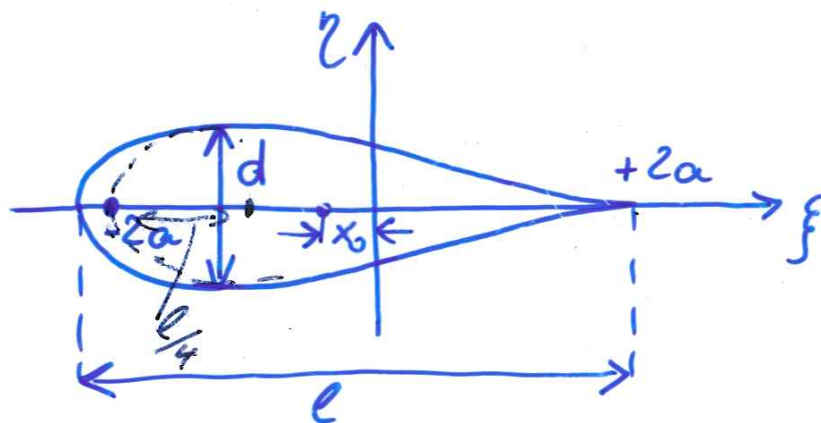


Abbildungsfkt. $f = f(z) = z + \frac{a^2}{z}$

$z = -x_0 + R e^{i\varphi}$, $R = a + x_0 = a(1 + \varepsilon_2)$

$$\Rightarrow \frac{f}{a} = [(1 + \varepsilon_2) \cos \varphi - \varepsilon_2] \left[1 + \frac{1}{1 + 2\varepsilon_2(1 + \varepsilon_2)(1 - \cos \varphi)} \right]$$

$$\frac{z}{a} = (1 + \varepsilon_2) \sin \varphi \left[1 - \frac{1}{1 + 2\varepsilon_2(1 + \varepsilon_2)(1 - \cos \varphi)} \right]$$



schlankes Profil: $\varepsilon_2^2 \ll 1$

$$\frac{f}{a} = 2(\cos \varphi - \varepsilon_2 \sin^2 \varphi)$$

$$\frac{z}{a} = 2\varepsilon_2 \sin \varphi (1 - \cos \varphi)$$

$$\varepsilon_2 \ll 1 \Rightarrow l \rightarrow 4a, \quad \frac{d}{l} \rightarrow \frac{3}{4} \sqrt{3} \varepsilon_2$$

max. Dicke: $\varphi = 120^\circ$, $\frac{1}{4}$ -Linie

Zhukhovskij - Tropfen

$$\frac{z}{l} = \frac{1}{2} \varepsilon_2 (1 - 2 \frac{f}{l}) \sqrt{1 - 4(\frac{f}{l})^2}$$

I. Blasius'sche Formel

$$C_l = \frac{L}{\rho \frac{1}{2} W_\infty^2} \quad \downarrow \quad = \quad 8\pi \frac{R}{l} \sin(\alpha + \beta)$$

β : Nullauftriebswinkel ($\beta = 0$, symmetr. Profil)

$$C_l = 8\pi \frac{R}{a} \frac{a}{l} \sin \alpha = 2\pi (1 + \varepsilon_2) \sin \alpha$$

$$C_l = 2\pi (1 + 0.77 \frac{d}{l}) \sin \alpha$$

II. Blasius'sche Formel \Rightarrow

$$C_m = \frac{\pi}{4} \sin 2\alpha \approx \frac{\pi}{2} \sin \alpha \quad \text{für } \xi = -x_0$$

Momentenvergleichswert um $\xi = -x_0$

$$\Rightarrow \frac{s}{l} = -\frac{C_m}{C_l} = -\frac{1}{4} \frac{1}{1+\epsilon_2} \approx -\frac{1}{4} (1-\epsilon_2)$$

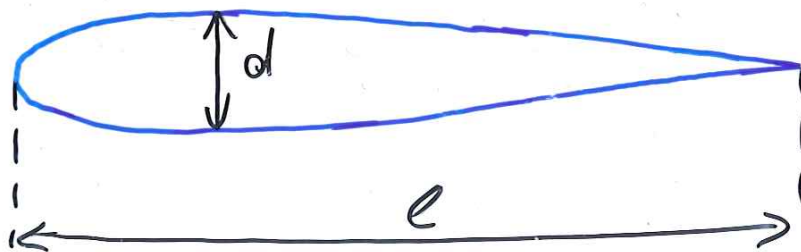
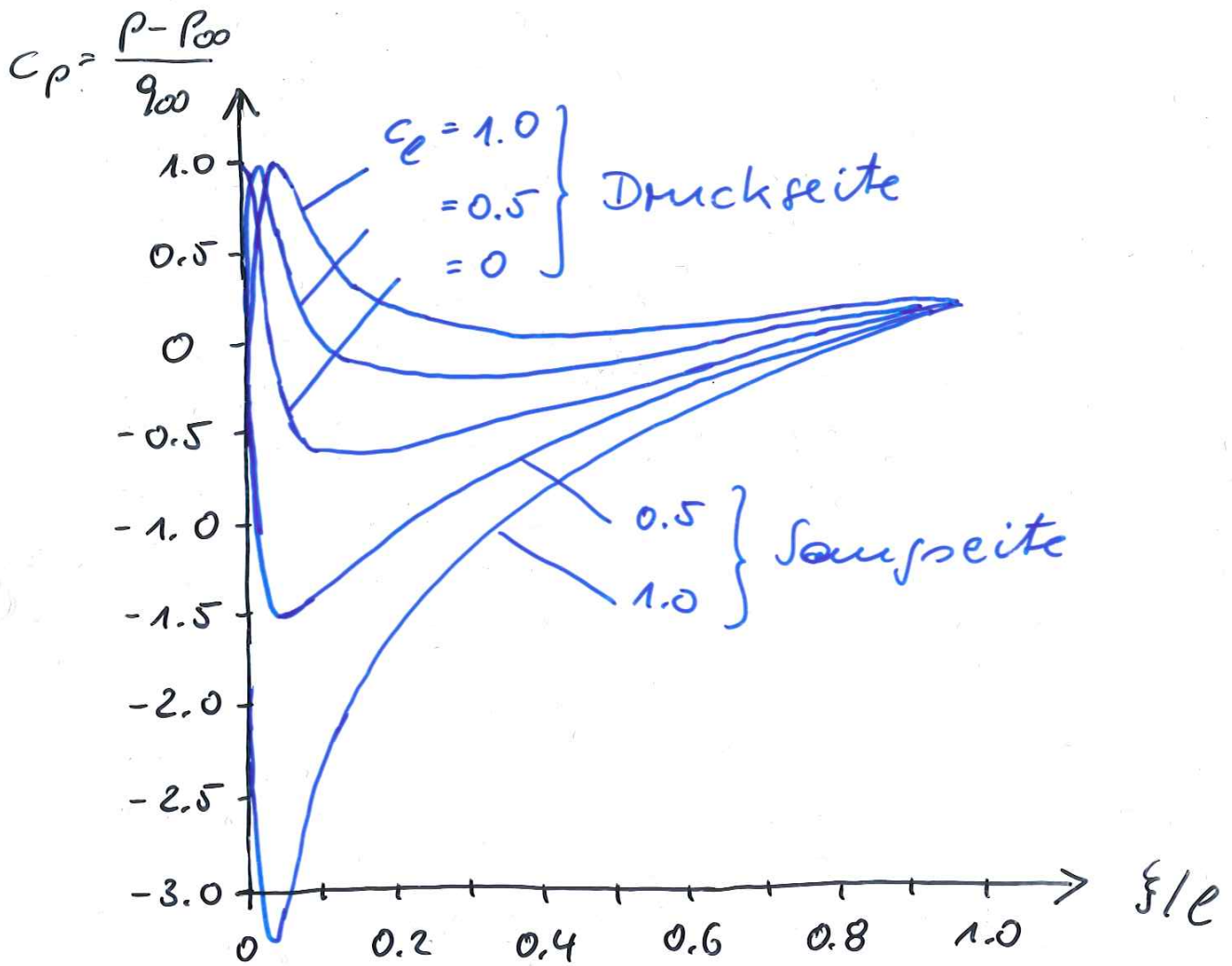
$-l/4$ gemessen von $\xi = -x_0$ aus

$$x_0 = \epsilon_2 \frac{l}{4} \Rightarrow x_{cp} : \frac{l}{4} \text{ Stromab v. Prof.nase}$$

Geschwindigkeit auf d. Kontur

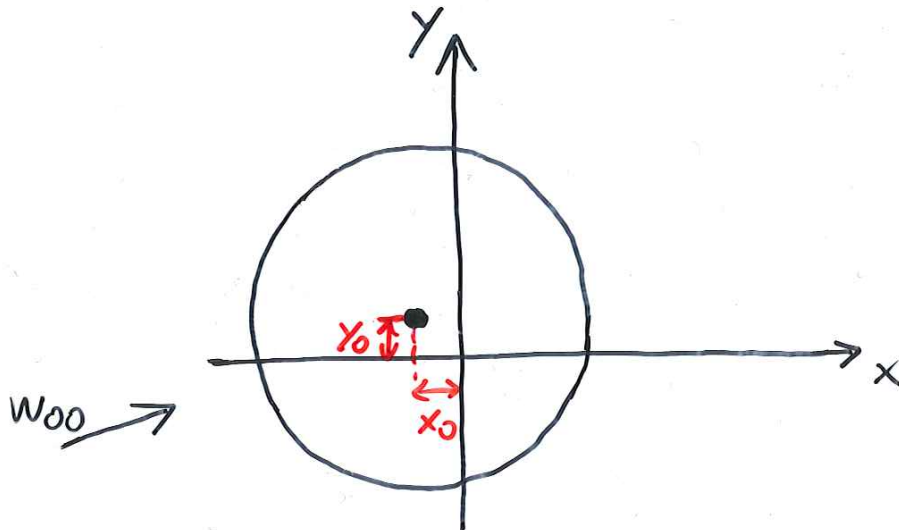
$$w_{\xi, \kappa} = w_{z, \kappa} \left. \frac{dz}{d\xi} \right|_{\kappa}$$

$$\Rightarrow w_{\kappa} = w_{\infty} [\sin(\varphi - \alpha) + \sin \alpha] \frac{1 + 2\epsilon_2(1 + \epsilon_2)(1 - \cos \varphi)}{(1 + \epsilon_2) \sqrt{\epsilon_2^2(1 - \cos \varphi)^2 + \sin^2 \varphi}}$$

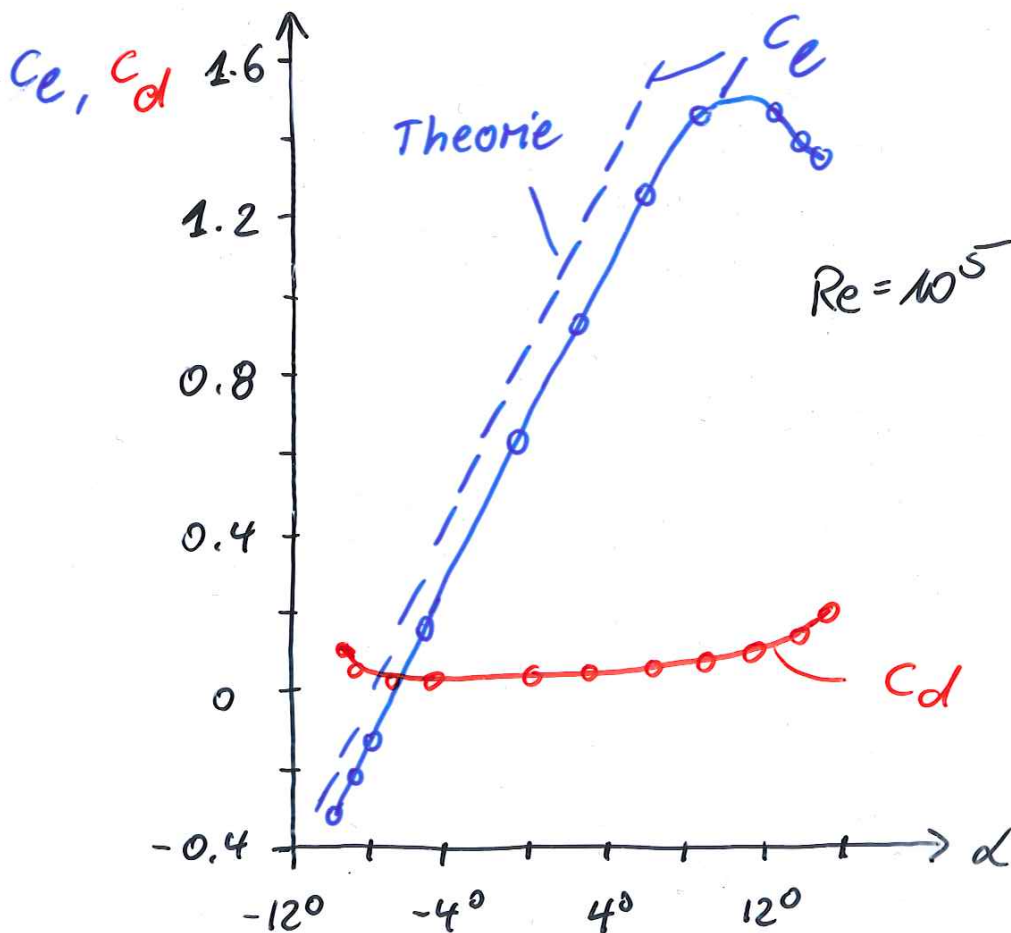


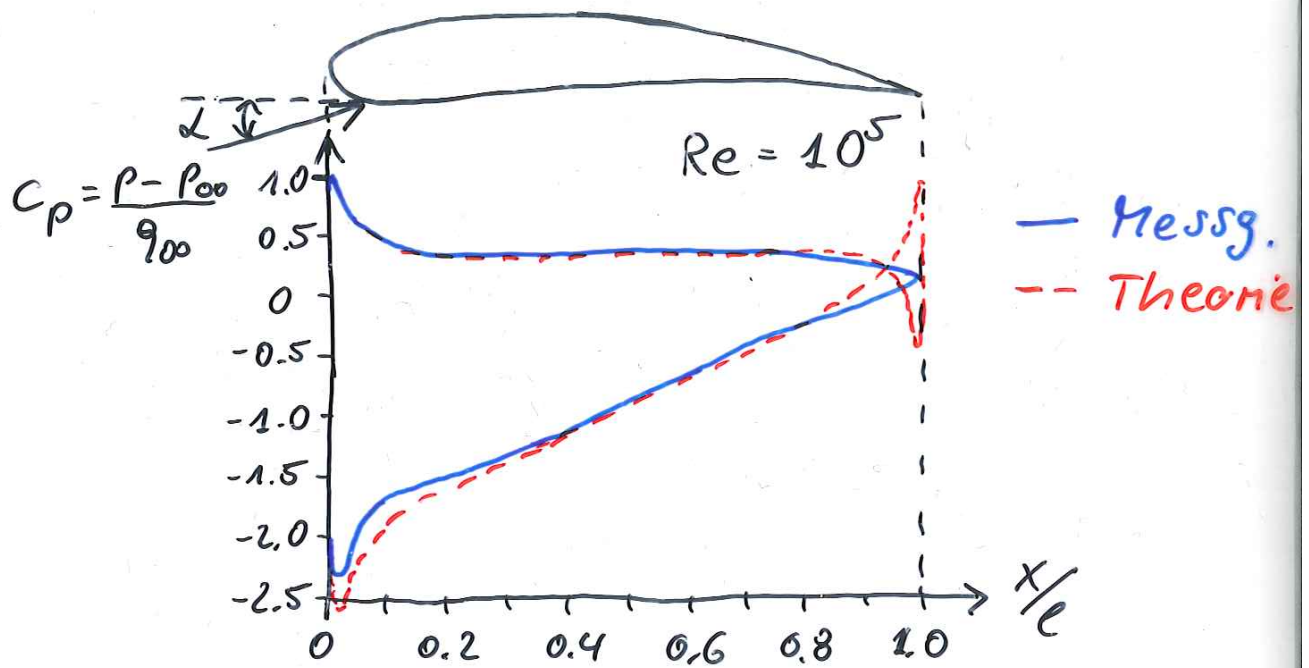
symmetr. Zhukhovskij Profil, $\frac{d}{l} = 0.18$

zentrum d. Bildkreises versetzt
in x - u. y - Richtung.



⇒ gewölbtes Zhukovskij Profil in
der f -Ebene





neue Abb.fktn. \Rightarrow and. Prof.fam.

Nachteile d. konf. Abbildg.

- Bestg. d. Abb.fktn. aus Prof.kontur schwierig
- nur für 2D-Probleme gültig

\Rightarrow Notwendigkeit d. Panelverfahren

Panclverfahren

Bestimmung d. drehungsfreien Strömung über einen beliebigen Körper

bekannt: Elementarströme.
⇒ Konturstromlinie

neue Methode: Konturvorgabe
⇒ Elementarströme. ?

Ermittlung d. Singularitäten:
Verteilung mit Rechnern!

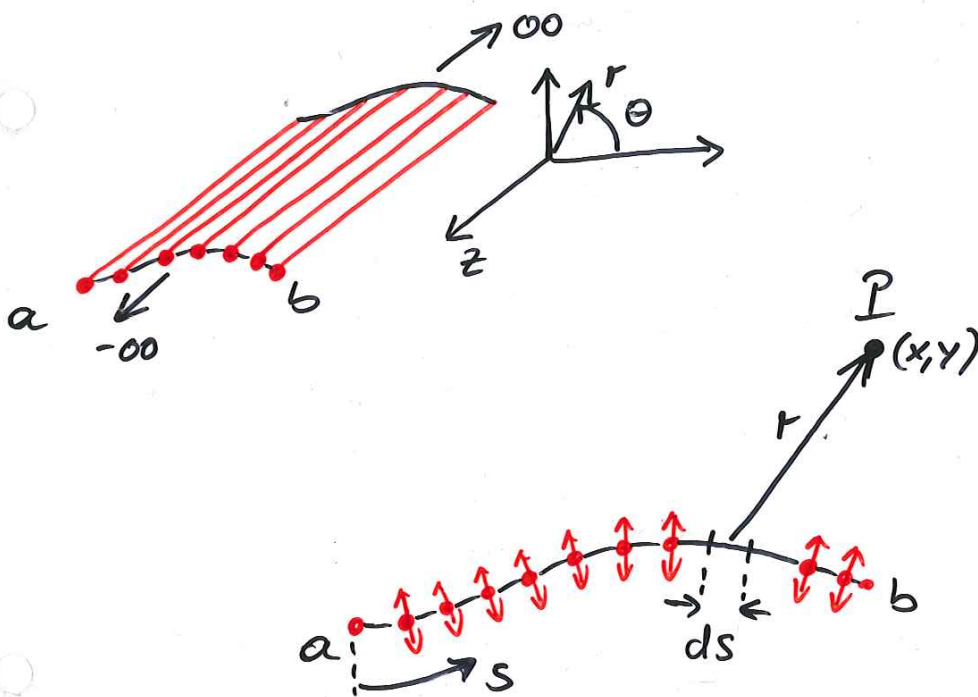
Vorgehensweise f. Tropfentheorie

- grundlegende Begriffe
- Darstellg. für ein symmetr. Profil
- Beispiel für Zylinderumströmung

Tropfentheorie

Punktquelle \rightarrow "Schlitzquelle"

Anordnung unendl. vieler Quellen
mit infinitesimalen Quellenstärke



$\lambda(s)$: Ergiebigkeit pro Einheitslänge

$\lambda(s) ds$ Ergiebigkeit von ds

infinites. Pot. $d\phi$ in P durch ds

$$d\phi = \frac{\ln r}{2\pi} \lambda ds$$

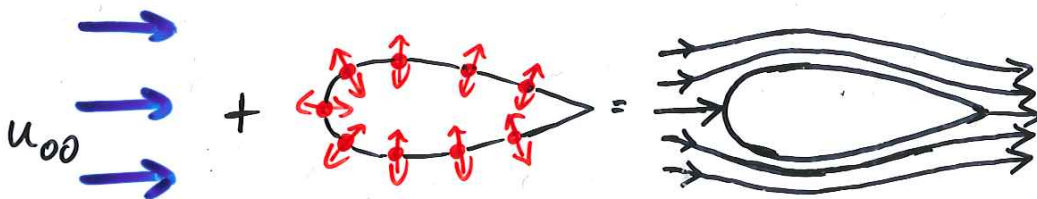
Integration

$$\phi(x, y) = \int_a^b \frac{\ln r}{2\pi} \lambda \, ds$$

Grundlegende Idee:

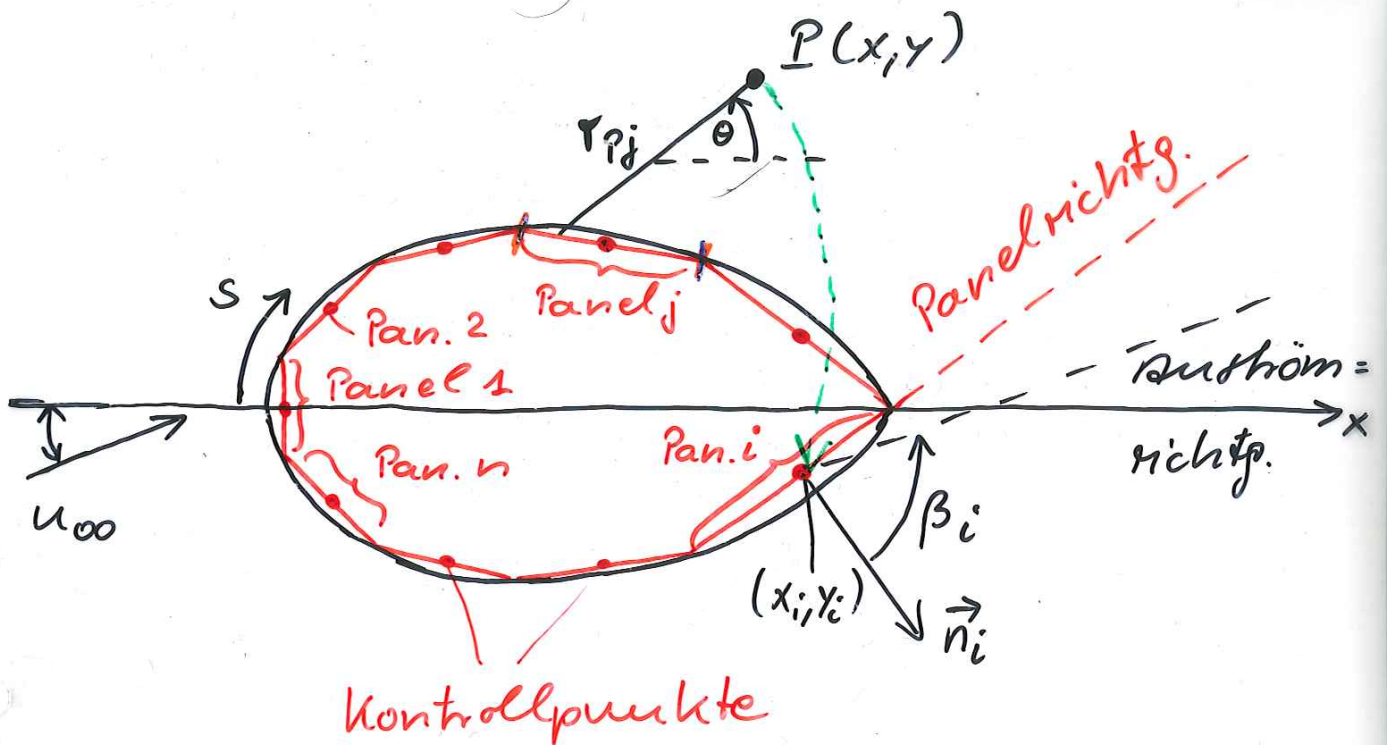
Oberfläche d. Körpers ist eine
Quellenfläche;

Bestr. v. $\lambda(s)$, daß Kontur eine
Stromlinie' wird.



Konzept: • Quellenfläche durch
Polygonzüge \rightarrow Panels

- $\lambda_j = \text{konst}$ für Panel j
- $\lambda_j \neq \lambda_i$ für $i \neq j$



n Panels mit (bis zu) $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$
 Bestp. v. λ_j , so daß Kontur \rightarrow Stromlinie
 \Rightarrow Verschwinden d. Normalkomp.
 (kinemat. Randbedingung)

Induktion v. $\Delta\phi_j$ des Panels j in \mathcal{P}

$$\Delta\phi_j = \frac{\lambda_j}{2\pi} \int_j \ln r_{pj} ds_j$$

Berücksichtigung d. übrigen $\lambda_i \quad i=1, 2, \dots, n$

$$\phi(I) = \sum_{j=1}^n \Delta\phi_j = \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_j}{2\pi} \int_j \ln r_{P_j} ds_j$$

wobei $r_{P_j} = \sqrt{(x-x_j)^2 + (y-y_j)^2}$

Punkt I in Kontrollpkt. d. Panels

$$\Rightarrow \phi(x_i, y_i) = \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_j}{2\pi} \int_j \ln r_{ij} ds_j$$

$$r_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$$

kinemat. Randbedingung f. Panel i

mit $dy/dx|_i$, \vec{n}_i , $\beta_i \neq (\vec{u}_\infty, \vec{n}_i)$

$$u_{\infty, n} = \vec{u}_\infty \cdot \vec{n}_i = u_\infty \cos \beta_i \quad \text{Norm. Komp. d. Panels i}$$

$$u_n = \frac{\partial \phi(x_i, y_i)}{\partial n}$$

Norm. geschw. durch Quellen = Verteilg. λ_j $j=1, \dots, n$

Benutzkg.:

$$\left. \frac{\partial \phi(x_i, y_i)}{\partial n} \right|_{j=i} = \frac{\lambda_i}{2} \Rightarrow$$

$$u_n = \frac{\lambda_i}{2} + \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^n \frac{\lambda_j}{2\pi} \int_j \frac{\partial}{\partial n_i} (\ln r_{ij}) ds_j$$

kinemat. Randbedingung für Panel i

$$u_{\infty, n} + u_n = 0$$

$$\frac{\lambda_i}{2} + \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^n \frac{\lambda_j}{2\pi} \int_j \frac{\partial}{\partial n_i} (\ln r_{ij}) ds_j + \underbrace{u_{\infty} \cos \beta_i}_{u_{\infty, n}} = 0$$

I_{ij}

d. Unbekannten : $\lambda_j \quad j = 1, 2, \dots, n$

entsprechende Gleichun. für alle n Panel

=> lineares (n, n) -Gleichungssystem für λ_j

Bestimmung der tang. Geschw. Komp.

$$u_{\infty, s} = u_{\infty} \sin \beta_i$$

tang. Komp. d. freien Anströms.

$$u_s = \frac{\partial \phi}{\partial s} = \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_j}{2\pi} \int_j \frac{\partial}{\partial s} (\ln r_{ij}) ds_j$$

tang. Komp. durch Induzierung.

Geschw. im i -ten Kontrollpt.

$$u_i = u_{\infty, s} + u_s = u_{\infty} \sin \beta_i + \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_j}{2\pi} \int_j \frac{\partial}{\partial s} (\ln r_{ij}) ds_j$$

$$\Rightarrow c_{p,i} = \frac{p_i - p_{\infty}}{\frac{\rho}{2} u_{\infty}^2} = 1 - \left(\frac{u_i}{u_{\infty}} \right)^2$$

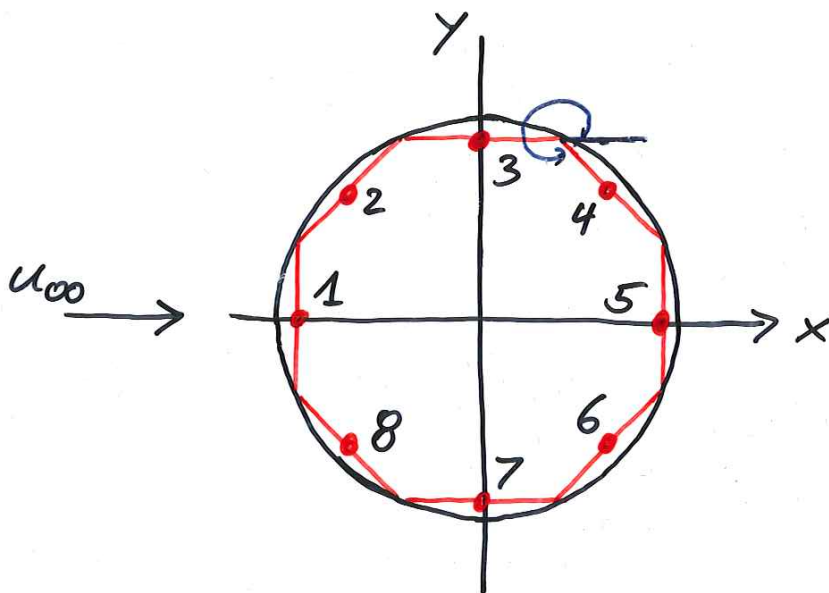
check d. Lösung

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j s_j = 0$$

(geschlossener Körper)

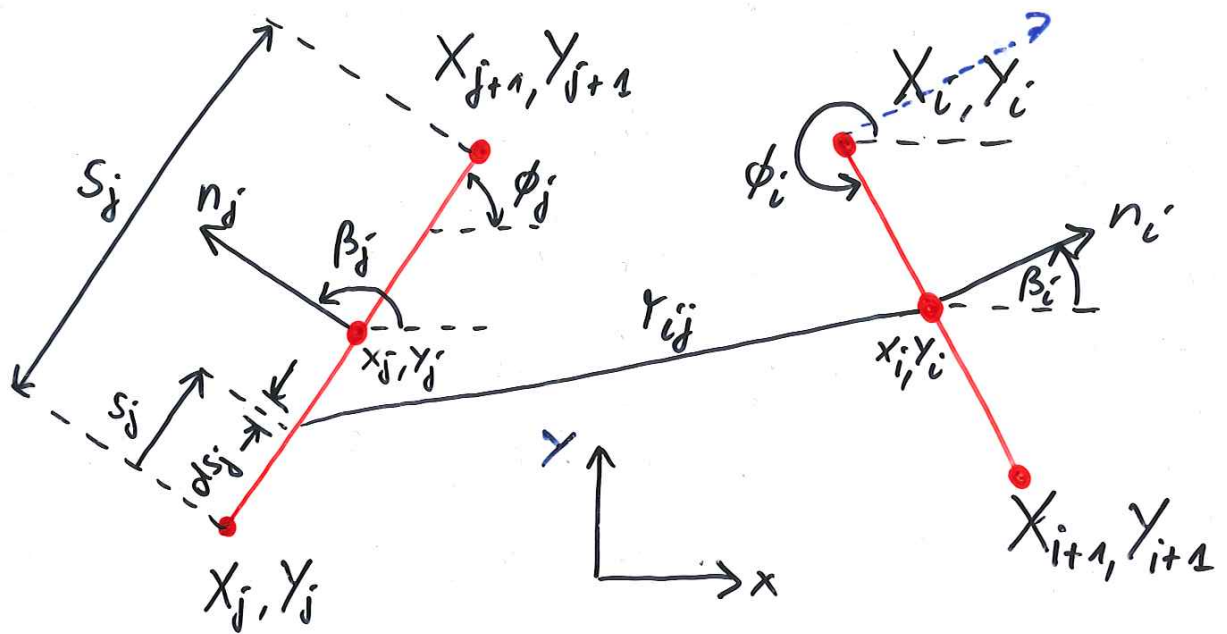
Beispiel

Bestimmung d. Druckverteilung für einen querangestr. Kreiszyl.



Berechnung d. Integrale

$$I_{ij} = \int_j \frac{\partial}{\partial n_i} (\ln r_{ij}) ds_j$$



$$r_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial n_i} (\ln r_{ij}) = \frac{1}{r_{ij}} \frac{\partial r_{ij}}{\partial n_i} =$$

$$\frac{1}{r_{ij}} \frac{2(x_i - x_j) \frac{dx_i}{dn_i} + 2(y_i - y_j) \frac{dy_i}{dn_i}}{2 r_{ij}} =$$

$$\frac{\partial}{\partial n_i} (\ln r_{ij}) = \frac{(x_i - x_j) \cos \beta_i + (y_i - y_j) \sin \beta_i}{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$$

$$\beta_i = \phi_i + \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \sin \beta_i = \cos \phi_i \\ \cos \beta_i = -\sin \phi_i$$

$$x_j = X_j + s_j \cos \phi_j$$

$$y_j = Y_j + s_j \sin \phi_j$$

$$\Rightarrow I_{ij} = \int_0^{s_j} \frac{C s_j + D}{s_j^2 + 2A s_j + B} ds_j$$

mit

$$A = -(x_i - X_j) \cos \phi_j - (y_i - Y_j) \sin \phi_j$$

$$B = (x_i - X_j)^2 + (y_i - Y_j)^2$$

$$C = \sin(\phi_i - \phi_j)$$

$$D = (y_i - Y_j) \cos \phi_i - (x_i - X_j) \sin \phi_i$$

$$s_j = \sqrt{(X_{j+1} - X_j)^2 + (Y_{j+1} - Y_j)^2}$$

Partialbruchzerlegung od. Tab.

$$\Rightarrow \text{mit } E = \sqrt{B-A^2} = (x_i - X_j) \sin \phi_j - (y_i - Y_j) \cos \phi_j$$

$$I_{ij} = \frac{G}{2} \ln \left(\frac{s_j^2 + 2As_j + B}{B} \right) +$$

$$\frac{D-AC}{E} \left(\tan^{-1} \frac{s_j+A}{E} - \tan^{-1} \frac{A}{E} \right)$$

Bemerkg.: I_{ij} f. allg. orient. Panels gültig
 \rightarrow unabhgg. v. Kreiszyylindergeo.

Kreiszyylinder: Panel $i \rightarrow$ Panel 4
mit $R=1$ Panel $j \rightarrow$ Panel 2

$$X_j = -0.9239$$

$$X_{j+1} = -0.3827$$

$$Y_j = 0.3827$$

$$Y_{j+1} = 0.9239$$

$$x_i = 0.6533$$

$$y_j = 0.6533$$

$$\phi_i = 315^\circ$$

$$\phi_j = 45^\circ$$

$$\Rightarrow A = -1.3065$$

$$B = 2.5607$$

$$C = -1$$

$$D = 1.3065$$

$$s_j = 0.7654$$

$$E = 0.9239$$

$$\bar{I}_{ij} = \bar{I}_{42} = 0.4018$$

ebenso:

$$\bar{I}_{41} = 0.4074$$

$$\bar{I}_{43} = 0.3528$$

$$\bar{I}_{45} = 0.3528$$

$$\bar{I}_{46} = 0.4018$$

$$\bar{I}_{47} = 0.4074$$

$$\bar{I}_{48} = 0.4084$$

Gleichg. für Panel 4, $\beta_i = \beta_4 = 45^\circ$

$$0.4074 \lambda_1 + 0.4018 \lambda_2 + 0.3528 \lambda_3 + \pi \lambda_4 + 0.3528 \lambda_5 + 0.4018 \lambda_6 + 0.4074 \lambda_7 + 0.4084 \lambda_8 = -0.7071 u_{\infty} 2\pi$$

Unbekannte: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_8$

analog für Panel $i = 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8$

\Rightarrow lin. Glrsyst. mit 8 Glm. f. 8 Unbek.!

Lösung: $\tilde{\lambda}_i = \frac{\lambda_i}{2\pi u_{\infty}}$

i	1	2	3	4
$\tilde{\lambda}_i$	0.3765	0.2662	0	-0.2662

i	5	6	7	8
$\tilde{\lambda}_i$	-0.3765	-0.2662	0	0.2662

Bestg. von $u_i \Rightarrow c_p$

$$\int_j \frac{\partial}{\partial s} (\ln r_{ij}) ds_j : ?$$

analog zur I_{ij} - Berechnung

$$\int_j \frac{\partial}{\partial s} (\ln r_{ij}) ds_j = \frac{D-AC}{2E} \ln \frac{s_j^2 + 2As_j + B}{B} - G \left(\tan^{-1} \frac{s_j+A}{E} - \tan^{-1} \frac{A}{E} \right)$$

Bestg. von u_i mit λ_j $j=1, \dots, 8$

$$u_i = u_\infty \sin \beta_i + \sum_{j=1}^8 \frac{\lambda_j}{2\pi} \int_j \frac{\partial}{\partial s} (\ln r_{ij}) ds_j$$

$$c_{p,i} = 1 - \left(\frac{u_i}{u_\infty} \right)^2$$

