

AERODYNAMISCHES INSTITUT  
der Rheinisch - Westfälischen  
Technischen Hochschule Aachen  
Univ.-Prof. Dr.-Ing. W. Schröder

Klausur

Aerodynamik II

08. 09. 2021

M U S T E R L Ö S U N G  
E I N S I C H T N A H M E

**Hinweis:**

Achten Sie darauf, ob Sie alle Aufgaben erhalten haben.

Die Lösungen dürfen ausschließlich die gegebenen Größen enthalten.

**Klausur Aerodynamik II**

Fragenteil, Skelett-Theorie, Traglinientheorie

# Integrale und Additionstheoreme

## Additionstheoreme

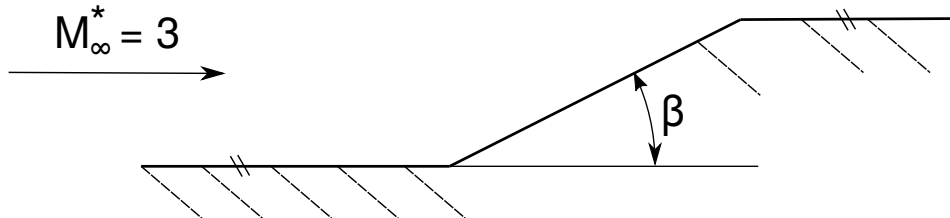
- $\sin(x \pm y) = \sin(x) \cdot \cos(y) \pm \sin(y) \cdot \cos(x)$
- $\cos(x \pm y) = \cos(x) \cdot \cos(y) \mp \sin(x) \cdot \sin(y)$
- $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
- $\sin(2x) = 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$
- $\sin(x) = 2 \cdot \sin(x/2) \cdot \cos(x/2)$
- $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$
- $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$
- $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$
- $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$
- $\tan\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \sin(x) = 1 - \cos(x)$
- $\sin(x) \cdot \sin(nx) = -\frac{1}{2}(\cos[(n+1)x] - \cos[(n-1)x])$
- $\sin[(n+1)x] - \sin[(n-1)x] = 2 \cdot \cos(nx) \cdot \sin(x)$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(n\varphi_p) \cdot \sin(n\varphi) = \frac{1}{4} \ln\left(\frac{1 - \cos(\varphi_p + \varphi)}{1 - \cos(\varphi_p - \varphi)}\right)$

## Integrale

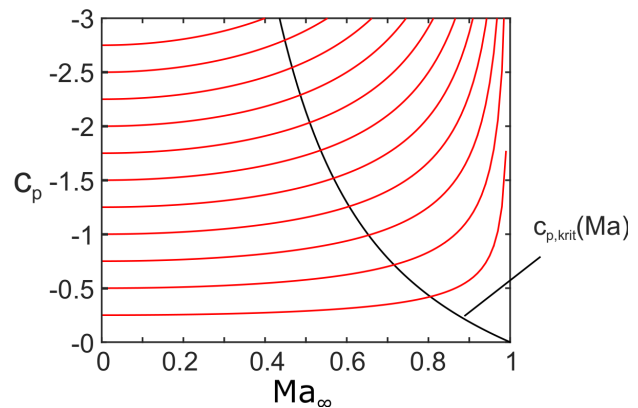
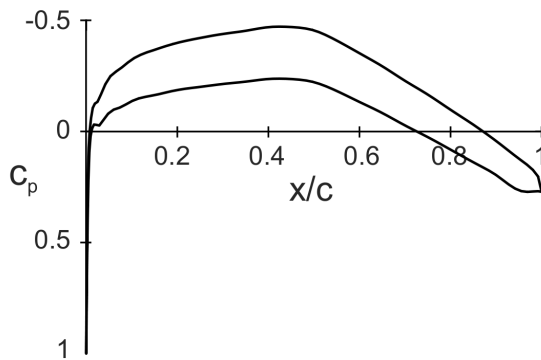
- $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \cdot \ln(ax+b)$
- $\int \frac{x}{ax+b} dx = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2} \cdot \ln(ax+b)$
- $\int \frac{x^2}{X} dx = \frac{1}{a^3} \left[ \frac{1}{2}(X) - 2b(X) + b^2 \ln(X) \right]$   
mit  $X = ax+b$
- $\int \sin(ax) dx = -\frac{\cos(ax)}{a}$
- $\int \cos(ax) dx = +\frac{\sin(ax)}{a}$
- $\int \sin^2(ax) dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4a} \sin(2ax)$
- $\int \cos^2(ax) dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4a} \sin(2ax)$
- $\int \sin^3(ax) dx = \frac{\cos^3(ax)}{3a} - \frac{\cos(ax)}{a}$
- $\int \cos^3(ax) dx = -\frac{\sin^3(ax)}{3a} + \frac{\sin(ax)}{a}$
- $\int \cos^4(ax) dx = \frac{3}{8}x + \frac{\sin(2ax)}{4a} + \frac{\sin(4ax)}{32a}$
- $\int \sin(ax) \cos(ax) dx = \frac{\sin^2(ax)}{2a}$
- $\int_0^{\pi} \cos(n \cdot \varphi) \cdot \cos(p \cdot \varphi) d\varphi = \begin{cases} \pi/2 & n = p \\ 0 & n \neq p \end{cases}$
- $\int_0^{\pi} \sin(n \cdot \varphi) \cdot \sin(p \cdot \varphi) d\varphi = \begin{cases} \pi/2 & n = p \\ 0 & n \neq p \end{cases}$
- Glauert-Integral  
 $\int_0^{\pi} \frac{\cos(n \cdot \varphi')}{\cos(\varphi) - \cos(\varphi')} d\varphi' = -\pi \cdot \frac{\sin(n \cdot \varphi)}{\sin(\varphi)}$
- $\int \cos(ax) \cdot \cos(bx) dx = \frac{\sin[(a-b)x]}{2(a-b)} + \frac{\sin[(a+b)x]}{2(a+b)} \quad \forall |a| \neq |b|$

# 1. Aufgabe: Fragenteil (14 Punkte)

- Wie macht sich eine laminare Ablöseblase im Verlauf des Druckbeiwertes  $c_p$  und des Wandschubspannungsbeiwertes  $c_f$  eines Profils bemerkbar?  
Skizzieren Sie die Profilmströmung und den Verlauf der beiden Beiwerte im Bereich der laminaren Ablöseblase. Markieren Sie den Bereich der Ablösung in den Verläufen.
- Gegeben ist folgende Geometrie eines Triebwerkseinlaufes mit dem Umlenkwinkel  $\beta < \beta_{max}$ , der im Windkanal bei der Machzahl von  $M_\infty^* = 3$  angeströmt wird.



- Übertragen Sie die obige Skizze in Ihre Aufgabenblätter und skizzieren Sie sorgfältig das sich einstellende Strömungsfeld unter Berücksichtigung aller kompressiblen Effekte für einen reibungsfreien Fall.
  - Zeichnen Sie qualitativ die Zustandsänderungen für die Strömung entlang des Einlaufes in der Hodographenebene.
- In einem Wasserkanalversuch wurde die in der unten linken Abbildung gezeigte Druckverteilung um das Flügelprofil NACA 65<sub>1</sub>-212 gemessen. In der unten rechten Abbildung ist der Verlauf des kritischen Druckbeiwertes in Abhängigkeit der Anströmmachzahl sowie eine Kurvenschar für die Kompressibilitätskorrektur nach der Prandtl-Glauert-Regel für unterschiedliche inkompressible  $c_{p,inkomp}$  Werte gezeigt.



- Leiten Sie einen Ausdruck für den kritischen Druckbeiwert  $c_{p,krit}$  als Funktion der Machzahl  $Ma_\infty$  her.
- Wie lautet die Prandtl-Glauert-Regel? Welche Voraussetzungen müssen für ihre Anwendbarkeit erfüllt sein?
- Erläutern Sie den Begriff der kritischen Machzahl und bestimmen Sie diese für das gegebene Profil.

**Hinweis:**

$$\frac{p}{p_0} = \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2 \right)^{\frac{-\gamma}{\gamma - 1}}$$

## 2. Aufgabe: Traglinientheorie und numerische Verfahren (19 Punkte)

Es wird ein Flugzeug mit der Gewichtskraft  $G$  im stationären Geradeausflug betrachtet. Der Schub der Triebwerke beträgt  $F_S$ .

1. Skizzieren Sie das Wirbelsystem am Tragflügel, welches mit der Traglinientheorie untersucht wird.
2. Leiten Sie mithilfe des Biot-Savartschen Gesetzes den Ausdruck für die induzierte Abwärtsgeschwindigkeit  $w_i(\varphi)$  her. Bestimmen Sie mit der allgemeinen Fourierreihe der Zirkulationsverteilung die Abwärtsgeschwindigkeit  $w_i(\varphi)$  und den induzierten Anstellwinkel  $\alpha_i$  in Abhängigkeit der Fourierkoeffizienten  $A_n$ .
3. Die Auftriebsverteilung des Flugzeugs soll unter Zuhilfenahme der ersten drei Fourierkoeffizienten angenähert werden. Bestimmen Sie für den gegebenen Flugzustand die gesuchten Koeffizienten unter Anwendung der Traglinientheorie für den inkompressiblen, reibungsfreien Fall.

Das Flugzeug beschleunigt nun auf  $Ma = 0.8$ . Auf dem Tragflügel mit dem transsonischen DRA2303 Profil ist das sogenannte Buffet-Phänomen zu beobachten.

4. Skizzieren Sie das bei Buffet zu erwartende Strömungsfeld qualitativ, kennzeichnen und benennen Sie die relevanten Strömungsgebiete für eine reibungsbehaftete Strömung. Zeichnen Sie ebenfalls qualitativ den zugehörigen Druckbeiwertverlauf  $c_p(X)$ . Kennzeichnen Sie deutlich im  $c_p$ -Diagramm den kritischen Druckbeiwert.
5. Zeichnen Sie ein strukturiertes und körperangepasstes Netz für die numerische Untersuchung des unter 4) angegebenen Strömungsfeldes.
6. Zur numerischen Simulation stehen Ihnen ein Panel-Verfahren und ein Grobstruktursimulationsverfahren (Large-Eddy Simulation (LES) Verfahren) zur Verfügung. Geben Sie an, welche Verfahren sich für die Untersuchung eignen und welche nicht. Begründen Sie ihre Antwort.

**Gegeben:**  $b, V_\infty, G, F_S, \rho_\infty$

**Hinweise:**

**Der Gesamtwiderstand des Flugzeugs kann durch den Flügelwiderstand angenähert werden**

Koordinatentransformation:

$$y = -\frac{b}{2} \cos(\varphi)$$

ind. Geschwindigkeit eines halbunendlichen Stabwirbels:

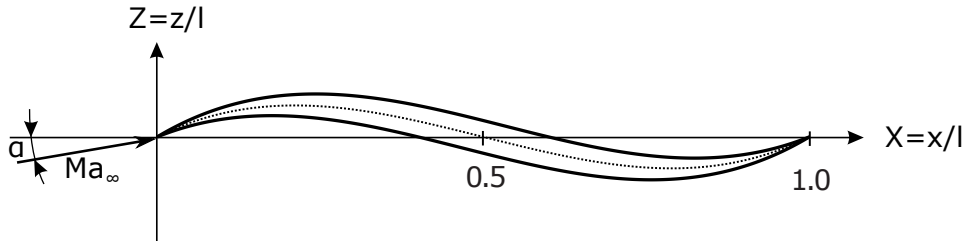
$$V_i = \frac{\Gamma}{4\pi a}$$

Zirkulationsverteilung:

$$\Gamma(\varphi) = 2bV_\infty \sum_{n=1}^N A_n \cdot \sin(n\varphi)$$

### 3. Aufgabe: Skelett-Theorie/linearisierte Potentialtheorie (17 Punkte)

Im Rahmen eines Flugzeugvorentwurfs wird das dargestellte Flügelprofil mithilfe der Skelett-Theorie und der linearisierten Potentialtheorie untersucht. Die Skelettlinie des Profils wird durch das gegebene Polynom dritten Grades  $Z^{(s)}(X)$  und der Profiltropfen durch  $Z^{(t)}(X)$  beschrieben. Die Profelsehne ist um den Winkel  $\alpha$  angestellt und wird je nach Aufgabenteil für verschiedene Machzahlen  $Ma_\infty$  der Anströmung untersucht.



Die Skelettlinie und der Profiltropfen lautet in dimensionslosen Koordinaten:

$$Z^{(s)}(X) = X \left( X^2 - \frac{3}{2}X + \frac{1}{2} \right), \quad Z^{(t)}(X) = \pm 0.1 (X - X^2), \quad 0 \leq X \leq 1$$

1. Unter Anwendung der Skelett-Theorie für einen inkompressiblen Fall:

- Bestimmen Sie alle Fourier-Koeffizienten  $A_0$  bis  $A_N$  des Birnbaum-Ackermannschen Reihenansatzes für die Zirkulationsverteilung  $\gamma(\varphi)$  auf der Sehne der gegebenen Skelettlinie  $Z^{(s)}$ .
- Die allgemeinen Formeln für den Auftriebsbeiwert  $c_l$  und den Momentenbeiwert um die Profelnase  $c_{m_{LE}}$  im Rahmen der Skeletttheorie seien gegeben:

$$c_l = 2\pi(A_0 + \frac{A_1}{2}) \quad \text{und} \quad c_{m_{LE}} = -\frac{\pi}{2}(A_0 + A_1 + \frac{A_2}{2}).$$

Bestimmen Sie die Lage des Druckpunktes  $X_{cp}$  und diskutieren Sie kurz seine Abhängigkeit vom Anstellwinkel  $\alpha$ . Bestimmen Sie anschließend die Neutralpunktlage des Profils.

2. Berechnen Sie auf Basis des Aufgabenteil 1 Fall den Auftriebsbeiwert  $c_l$  und den Widerstandsbeiwerte  $c_w$  für das Skelett bei einer Machzahl von  $Ma_1 = 0.6$ .

3. Nun wird das Profil im Überschall mit der Anströmmachzahl  $Ma_2 = 3$  unter Anwendung der linearisierten Potentialtheorie untersucht. Berücksichtigen Sie dabei das gesamte Profil bestehend aus Skelettlinie und Tropfenform.

- Skizzieren Sie den Verlauf des Druckbeiwertes entlang der Ober- und Unterseite des Profils für das oben maßstabsgetreu dargestellte Flügelprofil mit  $\alpha = 10^\circ$ . Achten Sie dabei im Besonderen auf die Position der Nullstellen, Maxima und Minima (ohne Rechnung).
- Berechnen Sie die Lagen des Druckpunktes und des Neutralpunktes des Profils im Überschall. Diskutieren Sie anschließend kurz, was das Ergebnis für die flugdynamische Stabilität im Überschall im Vergleich zum Unterschall bedeutet.

Gegeben: Anstellwinkel  $\alpha$ , Sehnenlänge  $l$ ,  $Ma_1 = 0.6$ ,  $Ma_2 = 3$ ,  $X = \frac{x}{l}$ ,  $Z = \frac{z}{l}$

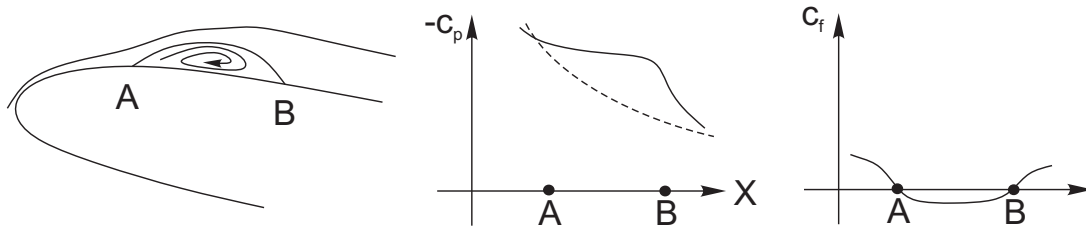
Hinweise:

$$X = \frac{1}{2} (1 + \cos(\varphi)), \quad -w_a(\varphi) = -\frac{w}{V_\infty} = A_0 + \sum_{n=1}^N A_n \cdot \cos(n\varphi), \quad -\frac{w}{V_\infty} = \alpha - \frac{dZ}{dX}$$

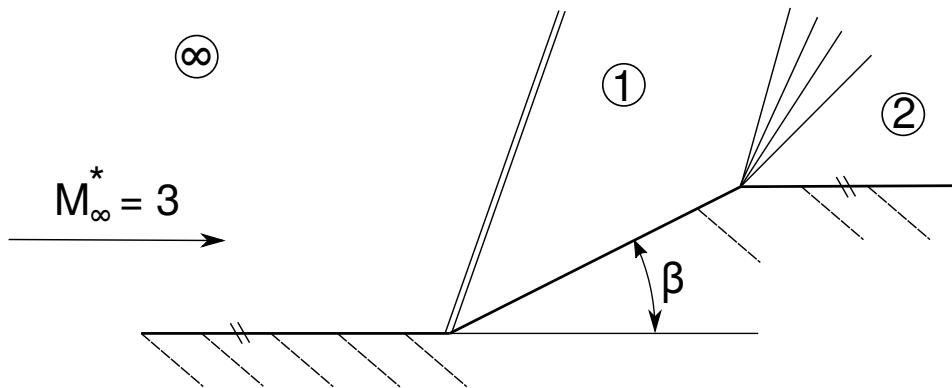
$$c_p|_{Ma_\infty > 1.2} = \pm \frac{2\beta_i}{\sqrt{Ma_\infty^2 - 1}}, \quad \gamma(\varphi) = 2V_\infty \cdot \left( A_0 \cdot \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \sum_{n=1}^N A_n \cdot \sin(n\varphi) \right)$$

# Lösung 1. Aufgabe: Fragenteil (14 Punkte)

1. Eine laminare Ablöseblase macht sich durch eine Abflachung (Plateau) im Verlauf des Druckbeiwertes  $c_p$  und durch lokal negative Werte des Wandschubspannungsbeiwertes  $c_f$  bemerkbar.

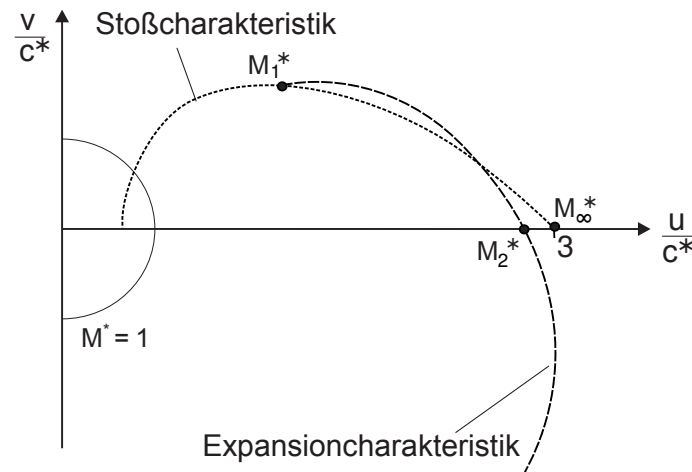


2. (a) Darstellung des Strömungsfeldes:



- schräger Verdichtungsstoß von  $\infty$  nach 1
- Prandtl-Meyer Expansion von 1 nach 2

- (b) Hodograph entlang des Einlaufs:



3. (a)

$$c_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{\rho_\infty}{2} u_\infty^2} = \frac{\frac{p}{p_\infty} - 1}{\frac{\rho_\infty}{p_\infty} \frac{u_\infty^2}{2}} = \frac{\frac{p}{p_\infty} - 1}{\frac{u_\infty^2}{RT_\infty} \frac{1}{2}} = \frac{2}{\gamma Ma_\infty^2} \left( \frac{p}{p_\infty} - 1 \right)$$

Es gilt:

$$\frac{p}{p_\infty} = \frac{p}{p_0} \frac{p_0}{p_\infty} = \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2 \right)^{\frac{-\gamma}{\gamma - 1}} \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma_\infty^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

$c_{p,krit}$  wird erreicht, wenn die lokale Machzahl  $Ma = 1$  ist:

$$\begin{aligned} \frac{p}{p_\infty} &= \left( \frac{\gamma + 1}{2} \right)^{\frac{-\gamma}{\gamma-1}} \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma_\infty^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \\ &= \left( \frac{2}{\gamma+1} + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} Ma_\infty^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \\ \Rightarrow c_{p,krit} &= \frac{2}{\gamma Ma_\infty^2} \left( \left( \frac{2}{\gamma+1} + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} Ma_\infty^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - 1 \right) \end{aligned}$$

- (b) Die Prandtl-Glauert-Regel wird für die Transformation der Druckverteilung einer inkompressiblen Strömung in die Druckverteilung einer kompressiblen Strömung benutzt. Die Geometrie des betrachteten Körpers bleibt dabei bestehen.

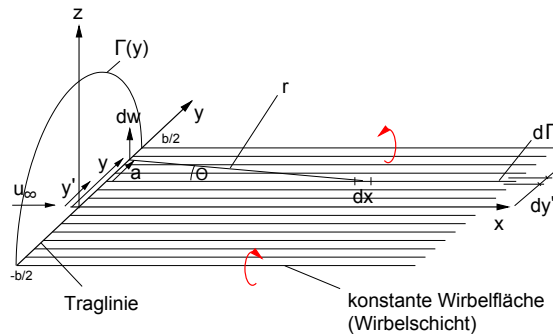
$$c_p = \frac{c_{p,inkomp}}{\sqrt{|1 - M_\infty^2|}}$$

- Geschwindigkeitsbereich:
  - subsonisch ( $M_\infty < 0.8$ ): Prandtl-Glauert
  - supersonisch ( $M_\infty > 1.2$ ): Ackeret
- schlanke Körper
- geringe Anstellwinkel
- reibungs- und drehungsfreie Strömung

- (c) Die kritische Machzahl  $Ma_{krit}$  ist jene Anströmmachzahl, bei der auf der Ober- oder Unterseite des Profils an einer Stelle gerade  $Ma = 1$  auftritt. Die  $c_p$ -Verteilung zeigt, dass der kleinste gemessene, inkompressible Druckbeiwert des gegebenen Profils  $c_{p,ink,min} = -0.5$  ist. Der Schnittpunkt der Kurve für die Kompressibilitätskorrektur nach Prandtl-Glauert mit der Kurve für  $c_{p,krit}(Ma_\infty)$  ergibt den gesuchten Zustand. Die kritische Machzahl ist  $Ma_{krit} \approx 0.72$

## Lösung 2. Aufgabe: Traglinientheorie (19 Punkte)(LÖSUNG)

1. Skizze:



2. Die induzierte Abwärtsgeschwindigkeit errechnet sich aus dem Biot-Savart'schen Gesetz für den halb-unendlichen Wirbel.

$$V_i = \frac{\Gamma}{4\pi a}.$$

Es ergibt sich für das Wirbelsystem am Tragflügel:

$$dw_i = -\frac{1}{4\pi(y-y')} \frac{d\Gamma}{dy'} dy'$$

Das Integral über die gesamte Spannweite ergibt:

$$w_i(y) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{d\Gamma}{dy'} \frac{dy'}{y-y'}$$

Koordinatentransformation:

$$y = -\frac{b}{2} \cdot \cos(\varphi)$$

$$dy = \frac{b}{2} \cdot \sin(\varphi) d\varphi$$

Mit der Koordinatentransformation lässt sich die induzierte Geschwindigkeit als Funktion von  $\varphi$  angeben:

$$w_i = \frac{1}{2\pi b} \cdot \int_0^\pi \frac{d\Gamma}{d\varphi'} \cdot \frac{d\varphi'}{dy'} \cdot \frac{dy'}{\cos(\varphi) - \cos(\varphi')}$$

$$= \frac{1}{2\pi b} \cdot \int_0^\pi \frac{d\Gamma}{d\varphi'} \cdot \frac{d\varphi'}{\cos(\varphi) - \cos(\varphi')}$$

Ableitung der Zirkulationsverteilung:

$$\frac{d\Gamma}{d\varphi'} = 2bV_\infty \cdot \sum_{n=1}^N n \cdot A_n \cdot \cos(n\varphi')$$

Einsetzen in  $w_i$ :

$$w_i = \frac{V_\infty}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^N n \cdot A_n \cdot \int_0^\pi \frac{\cos(n\varphi')}{\cos(\varphi) - \cos(\varphi')} d\varphi'$$

$$= -V_\infty \cdot \sum_{n=1}^N n \cdot A_n \cdot \frac{\sin(n\varphi)}{\sin(\varphi)}$$



Zur Lösung wurde das Glauert-Integral

$$\int_0^\pi \frac{\cos(n \cdot \varphi')}{\cos(\varphi) - \cos(\varphi')} d\varphi' = -\pi \cdot \frac{\sin(n \cdot \varphi)}{\sin(\varphi)}$$

verwendet.

Unter der Voraussetzung kleiner Winkel  $\alpha_i$  berechnet sich der induzierte Anstellwinkel aus:

$$\begin{aligned} \alpha_i &= -\frac{w_i}{V_\infty} \\ &= \sum_{n=1}^N n \cdot A_n \cdot \frac{\sin(n\varphi)}{\sin(\varphi)} \end{aligned}$$

3. Laut Aufgabenstellung befindet sich das Flugzeug im stationären Geradeausflug, sodass der Koeffizient  $A_2 = 0$  (unsymmetrisch) sein muss.

Zur Bestimmung des Koeffizienten  $A_1$  und  $A_3$  werden die Auftriebs- und Widerstandskraft bestimmt. Nach dem Satz von Kutta-Zhukovski ergibt sich der Auftrieb zu:

$$\begin{aligned} F_L &= \rho_\infty V_\infty \cdot \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(y) dy \\ &= \frac{\rho_\infty V_\infty b}{2} \int_0^\pi \Gamma(\varphi) \sin(\varphi) d\varphi \\ &= \rho_\infty V_\infty^2 b^2 \sum_{n=1}^N A_n \int_0^\pi \sin(n\varphi) \sin(\varphi) d\varphi \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \rho_\infty V_\infty^2 b^2 \cdot A_1 \end{aligned}$$

Dabei wurde folgende Beziehung aus der Integraltafel verwendet:

$$\int_0^\pi \sin(n \cdot \varphi) \sin(p \cdot \varphi) d\varphi = \begin{cases} \pi/2 & n = p \\ 0 & n \neq p \end{cases}$$

Für den Widerstand  $F_D$  ergibt sich mit der oben eingeführten Koordinatentransformation:

$$\begin{aligned} F_D &= \rho_\infty V_\infty \cdot \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(y) \alpha_i(y) dy \\ &= \rho_\infty V_\infty \cdot \int_0^\pi \left[ 2bu_\infty \cdot \sum_{n=1}^N A_n \cdot \sin(n\varphi) \right] \cdot \left[ \sum_{n=1}^N n \cdot A_n \cdot \frac{\sin(n\varphi)}{\sin(\varphi)} \right] \frac{b}{2} \sin(\varphi) d\varphi \\ &= \rho_\infty V_\infty^2 b^2 \cdot \int_0^\pi \left[ \sum_{n=1}^N A_n \cdot \sin(n\varphi) \right] \cdot \left[ \sum_{n=1}^N n \cdot A_n \cdot \sin(n\varphi) \right] d\varphi \\ &= \rho_\infty V_\infty^2 b^2 \cdot \left[ \sum_{n=1}^N n \cdot A_n^2 \cdot \frac{\pi}{2} \right] \\ &= \frac{\rho_\infty V_\infty^2 b^2 \pi}{2} \cdot \sum_{n=1}^N n \cdot A_n^2 \end{aligned}$$

Die Auftriebskraft muss der Gewichtskraft entsprechen. Somit folgt:

$$\begin{aligned} G &= \frac{\pi}{2} \cdot \rho_\infty V_\infty^2 b^2 \cdot A_1 \\ \Rightarrow A_1 &= \frac{2G}{\pi \rho_\infty V_\infty^2 b^2} \end{aligned}$$

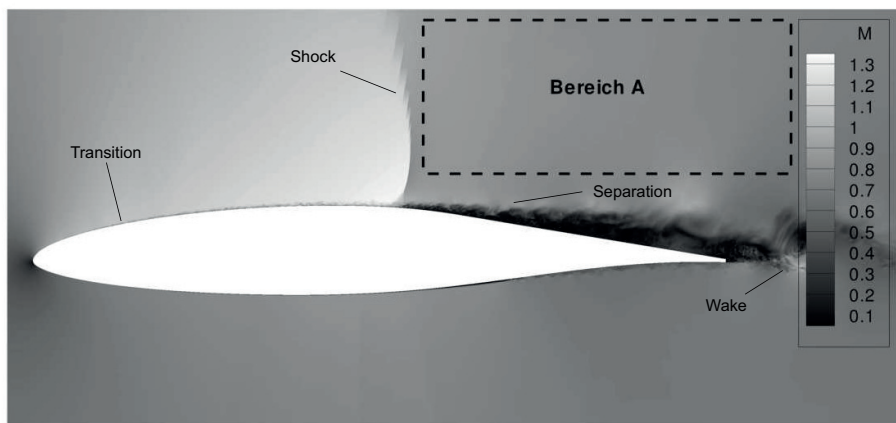
Weiterhin muss die Schubkraft der Widerstandskraft entsprechen:

$$F_S = \frac{\rho_\infty V_\infty^2 b^2 \pi}{2} \cdot (A_1^2 + 3A_3^2)$$

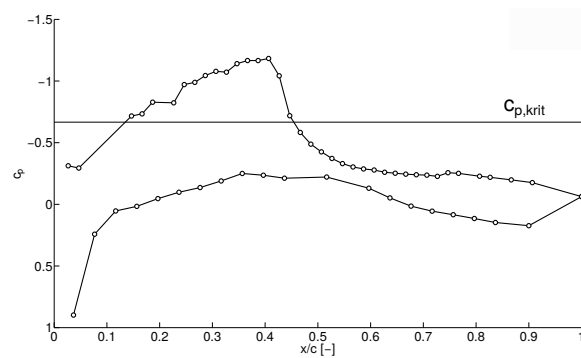
$$\Rightarrow A_3 = \sqrt{\frac{1}{3} \left( \frac{2F_S}{\rho_\infty V_\infty^2 b^2 \pi} - A_1^2 \right)}$$

$$A_3 = \sqrt{\frac{1}{3} \left( \frac{2F_S}{\rho_\infty V_\infty^2 b^2 \pi} - \frac{4G^2}{\pi^2 \rho_\infty^2 V_\infty^4 b^4} \right)}$$

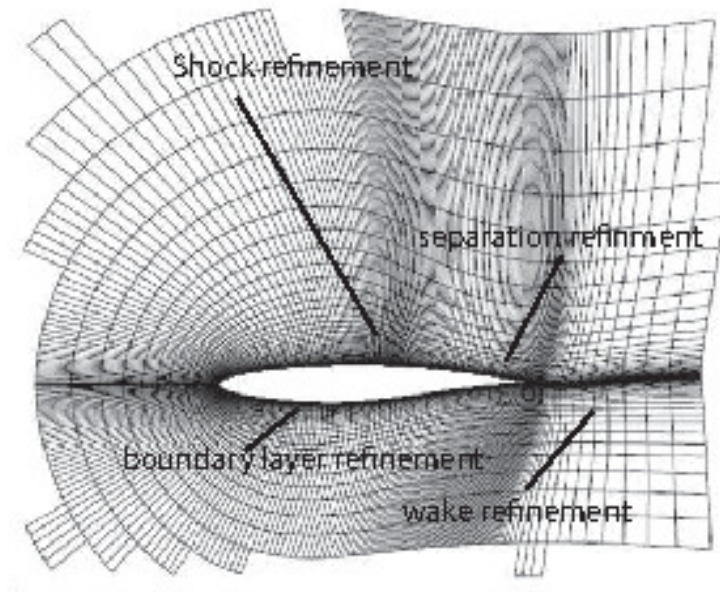
4. Strömungsfeld:



Druckbeiwert-Verlauf:



5. Gitter:



- 6.
- Panel-Verfahren: Das Panel-Verfahren basiert auf der linearisierten Potentialtheorie. Es kann somit nicht angewendet werden, da weder die Reibungskräfte noch die Entropieänderungen berücksichtigt werden.
  - LES: Die Lösung mittels der Grobstruktursimulation (LES) ist geeignet, da sowohl das instationäre Verhalten der Stoßoszillation als auch die Ablösung hinreichend genau aufgelöst werden können.

### Lösung 3. Aufgabe: (Lösung) Skelett-Theorie/linearisierte Potentialtheorie (17 Punkte)

1. (a) (3 Punkte)

Aus der Beziehung für die vertikale Störgeschwindigkeit

$$-w_a = -\frac{w}{V_\infty} = \alpha - \frac{dZ}{dX} = \alpha - \left(3X^2 - 3X + \frac{1}{2}\right) = A_0 + \sum_{n=1}^N A_n \cdot \cos(n\varphi)$$

folgt mit der Substitution  $X = \frac{1}{2}(1 + \cos\varphi)$

$$\begin{aligned} \alpha - \left(\frac{3}{4}(1 + \cos\varphi)^2 - \frac{3}{2}(1 + \cos\varphi) + \frac{1}{2}\right) &= A_0 + \sum_{n=1}^N A_n \cdot \cos(n\varphi) \\ \alpha - \left(\frac{3}{4}\cos^2\varphi - \frac{1}{4}\right) &= A_0 + \sum_{n=1}^N A_n \cdot \cos(n\varphi) \end{aligned}$$

Mit  $\cos^2\varphi = \frac{1}{2}(\cos 2\varphi + 1)$  folgt

$$\alpha - \left(\frac{3}{8}(\cos 2\varphi + 1) - \frac{1}{4}\right) = A_0 + \sum_{n=1}^N A_n \cdot \cos(n\varphi)$$

Der Koeffizientenvergleich liefert

$$A_0 = \alpha - \frac{1}{8}, \quad A_1 = 0, \quad A_2 = -\frac{3}{8}, \quad A_n = 0 \text{ für } \forall n \geq 3$$

(b) (4 Punkte)

Mit den gegebenen Formeln für den Auftriebsbeiwert und den Momentenbeiwert folgt:

$$\begin{aligned} c_l &= 2\pi\left(A_0 + \frac{A_1}{2}\right) = 2\pi\left(\alpha - \frac{1}{8}\right) \\ c_{m_{LE}} &= -\frac{\pi}{2}\left(A_0 + A_1 + \frac{A_2}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}\left(\alpha - \frac{5}{16}\right) \end{aligned}$$

Der Druckpunkt ergibt sich aus der Momentenbilanz um die Profilnase:

$$X_{cp} = -\frac{c_m}{c_l} = \frac{\alpha - \frac{5}{16}}{4\left(\alpha - \frac{1}{8}\right)}$$

Für den Fall  $\alpha = 0$  liegt der DP demnach bei  $X = 5/8$ . Mit zunehmendem Anstellwinkel wandert der DP in Richtung  $X = \frac{1}{4}$ , da sich das Verhältnis zwischen Nullmoment und auftriebsabhängigem Moment immer mehr zu Gunsten des auftriebsabhängigen Moments verschiebt.

Aus der Äquivalenz des Momentenhaushalts folgt

$$c_{m_{LE}} = c_{m0} - X_N \cdot c_l$$

Abgeleitet nach  $c_l$  mit  $\frac{\partial c_{m0}}{\partial c_l} = 0$  (nach der Definition des Neutralpunktes) ergibt sich:

$$X_N = -\frac{\partial c_{mLE}}{\partial c_l} = -\frac{\partial c_{mLE}}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial c_l}$$

$$X_N = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2\pi} = \frac{1}{4}$$

2. (2 Punkte) Bei  $Ma_1 = 0.6$  ergibt sich der Auftriebsbeiwert aus der Prandtl-Glauert-Regel und dem in Teil 1 bestimmten Wert für den inkompressiblen Fall zu:

$$c_l|_{Ma_1=0.6} = \frac{1}{\sqrt{1-Ma_1^2}} c_l|_{Ma_1=0} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-0.6^2}} \left( \alpha - \frac{1}{8} \right) = \frac{2\pi}{0.8} \left( \alpha - \frac{1}{8} \right)$$

Für den Fall mit  $Ma_1 = 0.6$  besitzt das Profil keinen Widerstandsbeiwert (D'Alembert'sches Paradoxon) mit Unterschall im gesamten Profildbereich.

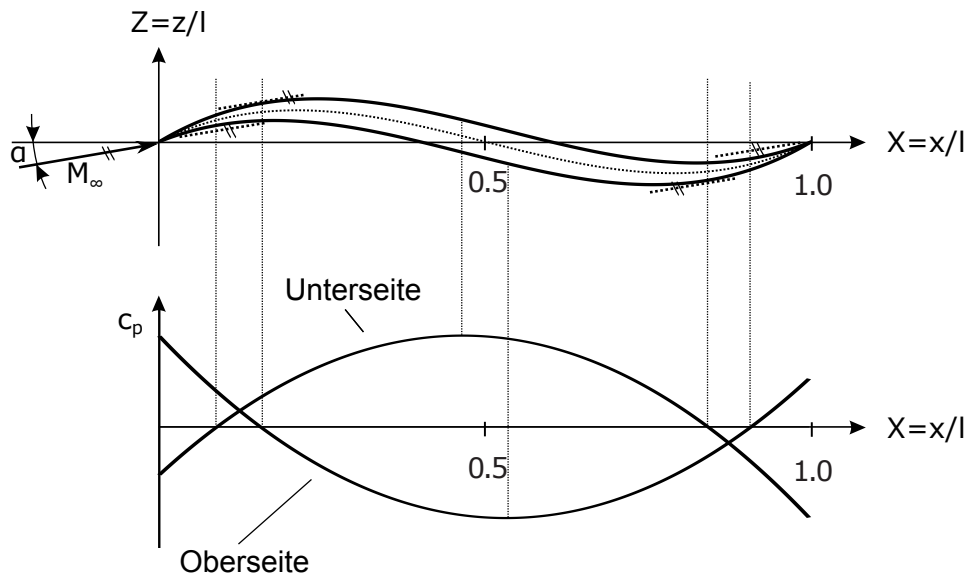
$$c_w|_{Ma_1=0.6} = 0$$

3. (a) (2 Punkte)

Im Rahmen der linearisierten Potentialtheorie gilt:

$$c_p|_{Ma_\infty > 1.2} = \pm \frac{2\beta_i}{\sqrt{Ma_\infty^2 - 1}},$$

mit den absoluten lokalen Strömungsänderungswinkeln  $\beta_i$ . Es folgt für den Verlauf des Druckbeiwertes entlang der Ober- und Unterseite:



- (b) (6 Punkte)

Für die Bestimmung der Lagen des Druckpunktes und des Neutralpunktes müssen zunächst der Auftriebsbeiwert  $c_{l2}$  und der Momentenbeiwert um die Profilnase  $c_{m2}$  im Überschall bestimmt werden.

Mit den absoluten lokalen Strömungsänderungswinkeln  $\beta_i$  entlang des Profilskeletts und dem Hinweis  $c_p|_{sup} = \pm \frac{2\beta_i}{\sqrt{Ma_\infty^2 - 1}}$  ergibt sich für den Druckbeiwert auf der Ober- und Unterseite:

$$\Rightarrow c_{p,u} = - \left[ \left( \frac{dZ^{(s)}}{dX} + \frac{dZ^{(t,u)}}{dX} \right) - \alpha \right] \frac{2}{\sqrt{Ma_2^2 - 1}}$$

$$\Rightarrow c_{p,o} = \left[ \left( \frac{dZ^{(s)}}{dX} + \frac{dZ^{(t,o)}}{dX} \right) - \alpha \right] \frac{2}{\sqrt{Ma_2^2 - 1}}$$

$$\Delta c_{p,i} = c_{p,u} - c_{p,o} = \frac{4 \left( \alpha - \frac{dZ^{(s)}}{dX} \right)}{\sqrt{Ma_2^2 - 1}}$$

Aus der Integration ergibt sich der Auftriebsbeiwert zu:

$$c_l|_{sup} = \int_0^1 \Delta c_p dX = \dots (\text{Nur Anstellung der Profilschne relevant}) = \frac{4\alpha}{\sqrt{Ma_2^2 - 1}} = \frac{4\alpha}{\sqrt{8}}$$

und der Momentenbeiwert zu:

$$\begin{aligned} c_m|_{sup} &= - \int_0^1 \Delta c_p X dX = - \frac{4}{\sqrt{Ma_2^2 - 1}} \int_0^1 \left( \alpha - 3X^2 + 3X - \frac{1}{2} \right) X dX \\ &= - \frac{4}{\sqrt{Ma_2^2 - 1}} \left( \frac{\alpha}{2} - \frac{3}{4} + 1 - \frac{1}{4} \right) = - \frac{4}{\sqrt{Ma_2^2 - 1}} \left( \frac{\alpha}{2} + 0 \right) = - \frac{2\alpha}{\sqrt{8}} \end{aligned}$$

Somit ergibt sich für die Lagen des Druckpunktes und des Neutralpunktes im Überschall:

$$X_{cp} = - \frac{c_m}{c_l} = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad X_N = - \frac{\partial c_m}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial c_l} = \frac{1}{2}$$

Im Unterschall liegt der Druckpunkt für kleine Anstellwinkel hinter dem Neutralpunkt und für  $\alpha \rightarrow \infty$  fallen beide Punkte bei  $X = \frac{1}{4}$  zusammen. Im Überschall befinden sich unabhängig vom Anstellwinkel sowohl der Druckpunkt als auch der Neutralpunkt bei  $X = \frac{1}{2}$ . Für eine stabile Fluglage muss gelten:  $X_N - X_{cp} > 0$ , das heißt, der Neutralpunkt muss hinter dem Druckpunkt liegen. Folglich ist der Flügel im Unterschall instabil, während er im Überschall genau an der Stabilitätsgrenze ist.