

.....
(Matr.-Nr, Unterschrift)

Klausur Strömungsmechanik II

23. 08. 2021

1. Aufgabe

- a) Die Strömung ist reibungsfrei. $\Rightarrow \eta = 0$

Des Weiteren existiert keine Geschwindigkeitskomponente in y-Richtung.

$$\Rightarrow v = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Damit folgt aus der Kontinuitätsgleichung $\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 0$.

Somit kann die Impulserhaltungsgleichung vereinfacht werden zu:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x$$

- b) Einführen der dimensionslosen Größen.

$$\bar{t} = t \cdot f; \quad \bar{u} = \frac{u}{f \cdot h}; \quad \bar{p} = \frac{p}{\Delta p}; \quad \bar{x} = \frac{x}{h}; \quad \bar{g}_x = \frac{g_x}{g}$$

Die dimensionslosen Größen in die vereinfachte Impulsgleichung einsetzen und umformen.

$$\begin{aligned} \rho f^2 h \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} &= -\frac{\Delta p}{h} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \rho g \bar{g}_x \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} &= -\frac{\Delta p}{\rho f^2 h^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{g}{f^2 h} \bar{g}_x \\ K_1 &= \frac{\Delta p}{\rho f^2 h^2} \\ K_2 &= \frac{g}{f^2 h} \end{aligned}$$

- c) Überführen der Kennzahlen in bekannte Kennzahlen der Strömungsmechanik.

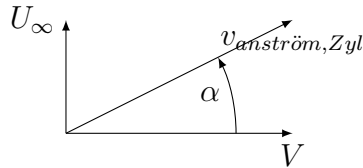
$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{\Delta p}{\rho (fh)^2} = Eu \\ K_2 &= \frac{g}{hf^2} = \frac{gh}{(hf)^2} = \frac{1}{Fr^2} \end{aligned}$$

- d) Eu: Die Eulerzahl beschreibt das Verhältnis von Druck- zu Trägheitskräften. Sie ist relevant, wenn das Strömungsfeld und die Druckdifferenz vom herrschenden Druckniveau abhängen.

Fr: Die Froudezahl ist definiert als das Verhältnis von Trägheits- zu Schwerkraft. Sie muss berücksichtigt werden, wenn Flüssigkeitsströmungen mit freier Oberfläche untersucht werden, wenn Schwerewellen das physikalische Problem beeinflussen oder bei der Analyse von Wasserbauproblemen.

2. Aufgabe

- a) Die Anströmgeschwindigkeit des Zylinders $v_{anström,Zyl}$ setzt sich aus der Windgeschwindigkeit U_∞ und der Fahrtgeschwindigkeit V zusammen. Für ein mitbewegtes Koordinatensystem ergeben sich die resultierende Geschwindigkeit und der Anströmwinkel des Zylinders gemäß der nachstehenden Skizze.



$$v_{anström,Zyl} = \sqrt{U_\infty^2 + V^2}$$
$$\alpha = \arctan\left(\frac{U_\infty}{V}\right)$$

- b) Der Auftriebssatz von Kutta-Zhukhovski stellt eine Beziehung zwischen dem Auftrieb pro Einheitslänge L , der Zirkulation Γ und der Anströmgeschwindigkeit $v_{anström}$ her.

$$L = \rho_L v_{anström} |\Gamma|$$

mit:

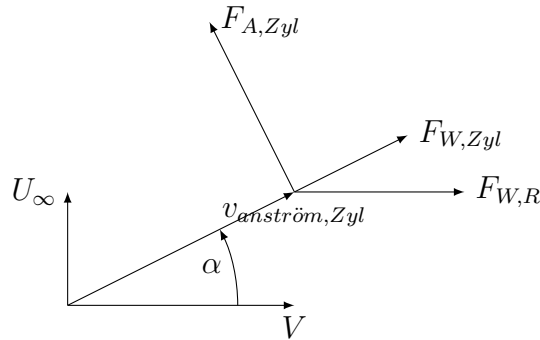
$$\Gamma = \oint \vec{v} d\vec{s} \quad (\text{Satz von Stokes})$$
$$= 2 \int \omega_Z dA$$
$$= -\frac{1}{2} \pi D^2 \omega \quad (\text{Rechtsdrehende Zirkulation})$$

Die Auftriebskraft auf den Zylinder ergibt sich somit zu

$$F_{A,Zyl} = LH$$
$$= \frac{\pi D^2}{2} H \rho_L \omega v_{anström,Zyl}$$

- c) Der Rumpf des Schiffes wird mit der Geschwindigkeit V angeströmt, während der Zylinder schräg mit $v_{anström,Zyl}$ angeströmt wird. Widerstandskräfte wirken in Richtung der Anströmung während die Auftriebskraft senkrecht zur resultierenden Anströmgeschwindigkeit wirkt.

Index R : Rumpf
Index Zyl : Zylinder



Zur Bestimmung der Winkelgeschwindigkeit des Flettner-Rotors wird zunächst ein Kräftegleichgewicht in x-Richtung aufgestellt.

$$\sum F_x = F_{W,R} + F_{W,Zyl} \cos(\alpha) - F_{A,Zyl} \sin(\alpha) = 0$$

$$\text{Widerstandskraft Rumpf: } F_{W,R} = \frac{1}{2} \rho_W V^2 A_R c_{W,R}$$

$$\text{Widerstandskraft Zylinder: } F_{W,Zyl} = \frac{1}{2} \rho_L v_{anström,Zyl}^2 D H c_{W,Zyl}$$

$$\text{Auftriebskraft Zylinder (aus b)): } F_{A,Zyl} = \frac{\pi D^2}{2} H \rho_L \omega v_{anström,Zyl}$$

In das Kräftegleichgewicht einsetzen und nach ω umformen.

$$\omega = \frac{2 (F_{W,R} + F_{W,Zyl} \cos(\alpha))}{\sin(\alpha) \pi D^2 \rho_L H v_{anström,Zyl}}$$

Wenn Aufgabenteil b) nicht gelöst werden konnte, wird die in der Aufgabenstellung gegebene Definition der Auftriebskraft in das Kräftegleichgewicht eingesetzt.

$$\begin{aligned} \text{Auftriebskraft Zylinder: } F_{A,Zyl} &= F_{W,Zyl} \frac{c_{A,Zyl}}{c_{W,Zyl}} \\ &= \frac{F_{W,Zyl} \omega D}{2 c_{W,Zyl} v_{anström,Zyl}} \end{aligned}$$

$$\text{Winkelgeschwindigkeit: } \omega = \frac{2 c_{W,Zyl} v_{anström,Zyl} (F_{W,R} + F_{W,Zyl} \cos(\alpha))}{F_{W,Zyl} D \sin(\alpha)}$$

- d) Die Kraft auf den Rotor quer zur Fahrtrichtung des Schiffes setzt sich aus der y-Komponente der Auftriebskraft und der Widerstandskraft des Rotors zusammen.

$$F_{Q,Zyl} = F_{A,Zyl} \cos(\alpha) + F_{W,Z} \sin(\alpha)$$

- e) Die Antriebsleistung des Rotors wird über das Produkt von Auftriebskraft und Fahrtgeschwindigkeit des Schiffes bestimmt.

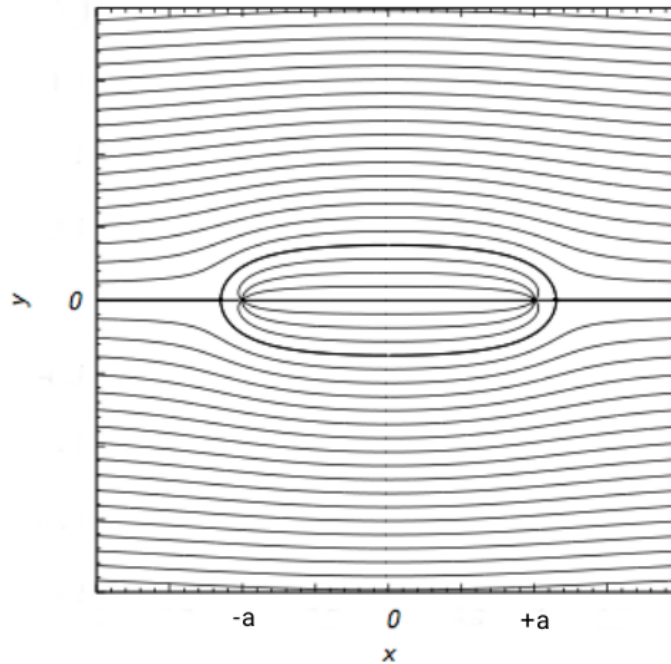
$$P = F_{A,Zyl} \sin(\alpha) V$$

3. Aufgabe

a) Parallelströmung + Quellenströmung bei $x = -a$ + Senkenströmung bei $x = +a$.

$$F(z) = U_\infty z + \frac{E}{2\pi} \ln(z + a) - \frac{E}{2\pi} \ln(z - a)$$

b) Stromlinienbild



c)

$$\frac{dF}{dz} = U_\infty + \frac{E}{2\pi} \left(\frac{1}{z+a} - \frac{1}{z-a} \right)$$

$$\frac{dF}{dz} = U_\infty + \frac{E}{2\pi} \left(\frac{(x+a) - iy}{((x+a) + iy)((x+a) - iy)} - \frac{(x-a) - iy}{((x-a) + iy)((x-a) - iy)} \right)$$

$$\frac{dF}{dz} = U_\infty + \frac{E}{2\pi} \left(\frac{(x+a) - iy}{(x+a)^2 + y^2} - \frac{(x-a) - iy}{(x-a)^2 + y^2} \right)$$

mit: $\frac{dF}{dz} = \bar{w} = u - iv$

$$u = U_\infty + \frac{E}{2\pi} \left(\frac{x+a}{(x+a)^2 + y^2} - \frac{x-a}{(x-a)^2 + y^2} \right)$$

$$v = \frac{E}{2\pi} \left(\frac{y}{(x+a)^2 + y^2} - \frac{y}{(x-a)^2 + y^2} \right)$$

- d) Die Länge des umströmten Körpers entspricht dem Abstand der Staupunkte.
In den Staupunkten verschwinden die Geschwindigkeitskomponenten, daher gilt $u = v = 0$.

$$v = 0 \longrightarrow y_{SP} = 0$$

$$u = 0 \longrightarrow 0 = U_\infty + \frac{E}{2\pi} \left(\frac{x_{SP} + a}{(x_{SP} + a)^2 + y_{SP}^2} - \frac{x_{SP} - a}{(x_{SP} - a)^2 + y_{SP}^2} \right)$$

$$0 = U_\infty + \frac{E}{2\pi} \left(\frac{1}{x_{SP} + a} - \frac{1}{x_{SP} - a} \right)$$

$$0 = U_\infty + \frac{E}{2\pi} \frac{-2a}{x_{SP}^2 - a^2}$$

$$\frac{2a}{x_{SP}^2 - a^2} = \frac{2\pi U_\infty}{E}$$

$$x_{SP} = \pm \sqrt{\frac{2Ea}{2\pi U_\infty} + a^2}$$

$$= \pm a \sqrt{1 + \frac{E}{\pi U_\infty a}}$$

Die Länge des umströmten Körpers ergibt sich somit zu

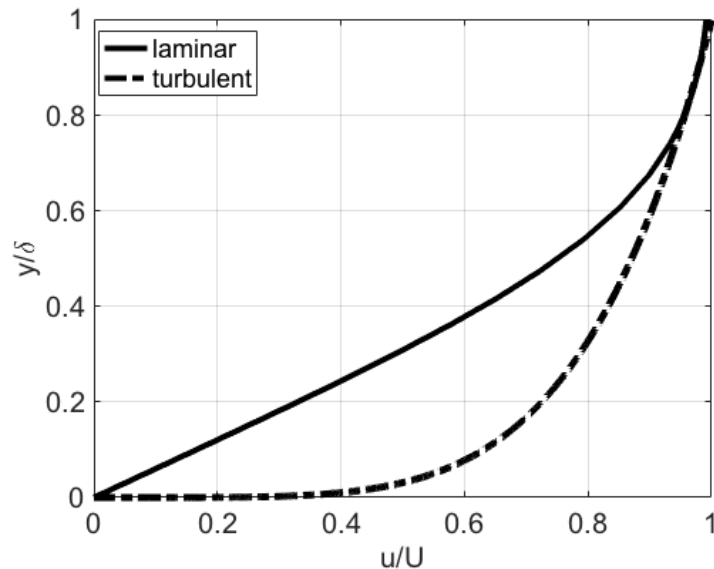
$$l = x_{SP1} - x_{SP2} = 2a \sqrt{1 + \frac{E}{\pi U_\infty a}} \quad .$$

- e) Der Widerstand eines umströmten Körpers ist im Allgemeinen die Summe aus Reibungs- und Druckwiderstand. In der Potentialtheorie verschwinden beide Widerstandsanteile aufgrund von Reibungsfreiheit und aufgrund der Symmetrie der Strömung, so dass $F_W = 0$.

$$F_W = F_{reib} + F_{druck} = 0$$

4. Aufgabe

- a) In der turbulenten Grenzschicht kommt es aufgrund der turbulenten Schwankungsbewegungen zu einem höheren Impulsaustausch normal zur Wand und dadurch zu einem fülligeren Geschwindigkeitsprofil.



- b) Zur Berechnung der Wandschubspannung aus der Geschwindigkeitsverteilung wird die Ableitung des Geschwindigkeitsprofils an der Wand benötigt.

$$u = U_{\infty} \left(\frac{y}{\delta} \right)^{\frac{1}{7}}$$
$$\frac{du}{dy} = \frac{U_{\infty}}{\delta^{\frac{1}{7}} \cdot 7} y^{-\frac{6}{7}} = \frac{U_{\infty}}{\delta^{\frac{1}{7}} \cdot 7 \cdot y^{\frac{6}{7}}}$$

Für $y \rightarrow 0$ strebt $du/dy \rightarrow \infty$. Somit ergibt das Potenzgesetz eine unphysikalische Wandschubspannung.

- c) Die Impulsverlustdicke δ_2 ist definiert als:

$$\delta_2 = \int_0^{\delta} \frac{u}{U_{\infty}} \left(1 - \frac{u}{U_{\infty}} \right) dy$$

Einsetzen des Potenzgesetzes in die Gleichung für die Impulsverlustdicke liefert den Zusammenhang zwischen der Impulsverlustdicke δ_2 und der Grenzschichtdicke δ .

$$\begin{aligned}
\delta_2 &= \int_0^\delta \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}} \left(1 - \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}}\right) dy \\
\delta_2 &= \int_0^\delta \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}} - \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{2}{7}} dy \\
&= \frac{7}{8} \frac{y^{\frac{8}{7}}}{\delta^{\frac{1}{7}}} - \frac{7}{9} \frac{y^{\frac{9}{7}}}{\delta^{\frac{2}{7}}} \Big|_0^\delta \\
&= \delta \left(\frac{7}{8} - \frac{7}{9}\right) \\
&= \frac{7}{72} \delta
\end{aligned}$$

d) Die Gleichung der Wandschubspannung τ_W und der Impulsverlustdicke $\delta_2 = \frac{1}{10} \delta$ in die von Kármánsche Integralbeziehung einsetzen.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{10} U_\infty^2 \frac{d\delta}{dx} &= \frac{0.0225 \rho U_\infty^2}{\rho} \left(\frac{U_\infty \delta}{\nu}\right)^{-\frac{1}{4}} \\
\int \delta^{\frac{1}{4}} d\delta &= 0.225 \left(\frac{U_\infty}{\nu}\right)^{-\frac{1}{4}} \int dx \\
\frac{4}{5} \delta^{\frac{5}{4}} &= 0.225 \left(\frac{\nu}{U_\infty}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot x + C \\
\delta &= \left(\frac{0.225 \cdot 5}{4}\right)^{\frac{4}{5}} \left(\frac{\nu}{U_\infty}\right)^{\frac{1}{5}} x^{\frac{4}{5}} + C_1
\end{aligned}$$

Aus Plausibilitätsgründen verschwindet an der Vorderkante der ebenen Platte die Grenzschichtdicke, d.h. $\delta = 0$ bei $x = 0 \Rightarrow C_1 = 0$.

Um die Grenzschichtdicke in der Form $\delta = f(Re_x, x)$ zu erhalten, wird die Definition der Reynoldszahl $Re_x = \frac{U_\infty x}{\nu}$ eingesetzt.

$$\begin{aligned}
\delta &= \left(\frac{0.225 \cdot 5}{4}\right)^{\frac{4}{5}} \left(\frac{\nu}{U_\infty x}\right)^{\frac{1}{5}} x \\
\delta &= \left(\frac{0.225 \cdot 5}{4}\right)^{\frac{4}{5}} \frac{x}{Re_x^{\frac{1}{5}}}
\end{aligned}$$

5. Aufgabe

- a) Die Machzahl ist definiert als das Verhältnis der Strömungsgeschwindigkeit zur lokalen Schallgeschwindigkeit.

$$M_e = \frac{u_e}{c_e} = \frac{u_e}{\sqrt{\gamma RT_e}}$$

Nutzen der Energiegleichung zur Bestimmung der Austrittsgeschwindigkeit u_e .

$$c_p T_0 = c_p T_e + \frac{1}{2} u_e^2$$

$$u_e^2 = 2 \frac{\gamma R}{\gamma - 1} (T_0 - T_e)$$

Einsetzen des Ausdrucks der Austrittsgeschwindigkeit in der Definition der Machzahl und umformen der Gleichung.

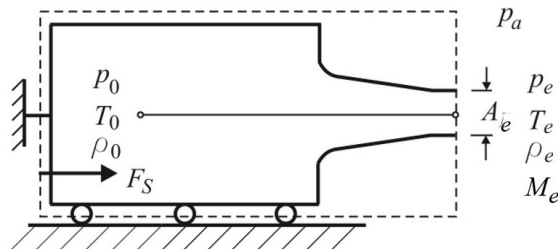
$$M_e = \frac{\sqrt{\frac{2\gamma R}{\gamma-1}(T_0 - T_e)}}{\sqrt{\gamma RT_e}}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\gamma-1} \left(\frac{T_0}{T_e} - 1 \right)}$$

Isentropenbeziehung: $\frac{T_0}{T_e} = \left(\frac{p_0}{p_e} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$

$$\Rightarrow M_e = \sqrt{\frac{2}{\gamma-1}} \sqrt{\left(\frac{p_0}{p_e} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1}$$

- b) Zur Bestimmung des Schubs wird der Impulserhaltungssatz für das System aufgestellt.



$$\rho_e u_e^2 A_e = (p_a - p_e) A_e + F_S$$

$$\frac{F_S}{p_0 A_e} = \frac{\rho_e u_e^2}{p_0} - \frac{p_a}{p_0} + \frac{p_e}{p_0}$$

Mit der Definition von u_e aus a) und dem idealen Gasgesetz ($\rho_e = \frac{p_e}{RT_e}$) kann die Gleichung für den dimensionslosen Schub umgeformt werden.

$$\frac{F_S}{p_0 A_e} = \frac{2\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_e}{p_0} \left(\frac{T_0}{T_e} - 1 \right) - \frac{p_a}{p_0} + \frac{p_e}{p_0}$$

$$\Rightarrow \frac{F_S}{p_0 A_e} = \frac{2\gamma}{\gamma - 1} \left(\frac{p_e}{p_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}} - \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \frac{p_e}{p_0} - \frac{p_a}{p_0}$$

1) $\frac{p_a}{p_0} = 1 \rightarrow$ keine Strömung, $p_e = p_a = p_0$

$$\Rightarrow \frac{F_S}{p_0 A_e} = 0$$

2) $\frac{p_a}{p_0} = 0.7 > \frac{p^*}{p_0} = 0.528 \rightarrow$ unterkritische Strömung, $p_e = p_a$

$$\Rightarrow \frac{F_S}{p_0 A_e} = \frac{2\gamma}{\gamma - 1} \left(\frac{p_a}{p_0} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} = \frac{2\gamma}{\gamma - 1} \left(\frac{p_a}{p_0} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}$$

3) $\frac{p_a}{p_0} = 0 \rightarrow$ Strömung ins Vakuum, $p_e = p^* = 0,528 p_0$

$$\Rightarrow \frac{F_S}{p_0 A_e} = \frac{2\gamma}{\gamma - 1} \left(\frac{p^*}{p_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}} - \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \frac{p^*}{p_0}$$

c) Bei der inkompressiblen Strömung herrscht Umgebungsdruck am Düsenauslass.

$$\rightarrow p_a = p_e$$

Der Impulssatz vereinfacht sich somit zu: $F_S = \rho u_e^2 A_e$

Bernoulli zur Bestimmung der Austrittsgeschwindigkeit:

$$\frac{1}{2} \rho u_e^2 = p_0 - p_a$$

$$u_e^2 = \frac{2(p_0 - p_a)}{\rho}$$

$$\Rightarrow \frac{F_S}{p_0 A_e} = 2 \left(1 - \frac{p_a}{p_0} \right)$$

6. Aufgabe

- a) Bei Flachwasserwellen ($\frac{H}{\lambda} < 0.07$) ist die Phasengeschwindigkeit unabhängig von der Wellenlänge.

$$c = \sqrt{gH} \neq f(\lambda) \rightarrow \text{nicht dispersive Wellen.}$$

Wellen unterschiedlicher Wellenlänge breiten sich demnach gleich schnell aus.

- b)

$$\text{rot}(\text{grad } a) = \nabla \times (\nabla a) = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial a}{\partial x} \\ \frac{\partial a}{\partial y} \\ \frac{\partial a}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 a}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 a}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 a}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 a}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 a}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 a}{\partial x \partial y} \end{pmatrix} = \vec{0}$$

- c) Strömungen, in denen die Reibungskräfte deutlich größer sind als die Trägheitskräfte, werden als schleichende Strömungen betrachtet.

$$\frac{\text{Trägheitskräfte}}{\text{Reibungskräfte}} \ll 1$$

Alternativ: Schleichende Strömungen treten bei kleinen Geschwindigkeiten, sehr großen Viskositäten, sehr kleinen Raumabmessungen oder sehr geringen Dichten auf.

- d) Für den Fall der Umströmung einer konvexen Ecke ist die Geschwindigkeit v antiproportional zum Abstand r vom Ursprung. ($v \propto \frac{1}{r}$)

Für $r \rightarrow 0$ strebt $v \rightarrow \infty$.