

AERODYNAMISCHES INSTITUT
der Rheinisch - Westfälischen
Technischen Hochschule Aachen
Univ.-Prof. Dr.-Ing. W. Schröder

Klausur

Aerodynamik II

23. 02. 2021

M U S T E R L Ö S U N G
E I N S I C H T N A H M E

Hinweis:

Achten Sie darauf, ob Sie alle Aufgaben erhalten haben.

Die Lösungen dürfen ausschließlich die gegebenen Größen enthalten.

Klausur Aerodynamik II

Fragenteil, Skelett-Theorie, Traglinientheorie

Integrale und Additionstheoreme

Additionstheoreme

- $\sin(x \pm y) = \sin(x) \cdot \cos(y) \pm \sin(y) \cdot \cos(x)$
- $\cos(x \pm y) = \cos(x) \cdot \cos(y) \mp \sin(x) \cdot \sin(y)$
- $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
- $\sin(2x) = 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$
- $\sin(x) = 2 \cdot \sin(x/2) \cdot \cos(x/2)$
- $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$
- $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$
- $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$
- $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$
- $\tan\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \sin(x) = 1 - \cos(x)$
- $\sin(x) \cdot \sin(nx) = -\frac{1}{2}(\cos[(n+1)x] - \cos[(n-1)x])$
- $\sin[(n+1)x] - \sin[(n-1)x] = 2 \cdot \cos(nx) \cdot \sin(x)$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(n\varphi_p) \cdot \sin(n\varphi) = \frac{1}{4} \ln\left(\frac{1 - \cos(\varphi_p + \varphi)}{1 - \cos(\varphi_p - \varphi)}\right)$

Integrale

- $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \cdot \ln(ax+b)$
- $\int \frac{x}{ax+b} dx = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2} \cdot \ln(ax+b)$
- $\int \frac{x^2}{X} dx = \frac{1}{a^3} \left[\frac{1}{2}(X) - 2b(X) + b^2 \ln(X) \right]$
mit $X = ax+b$
- $\int \sin(ax) dx = -\frac{\cos(ax)}{a}$
- $\int \cos(ax) dx = +\frac{\sin(ax)}{a}$
- $\int \sin^2(ax) dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4a} \sin(2ax)$
- $\int \cos^2(ax) dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4a} \sin(2ax)$
- $\int \sin^3(ax) dx = \frac{\cos^3(ax)}{3a} - \frac{\cos(ax)}{a}$
- $\int \cos^3(ax) dx = -\frac{\sin^3(ax)}{3a} + \frac{\sin(ax)}{a}$
- $\int \cos^4(ax) dx = \frac{3}{8}x + \frac{\sin(2ax)}{4a} + \frac{\sin(4ax)}{32a}$
- $\int \sin(ax) \cos(ax) dx = \frac{\sin^2(ax)}{2a}$
- $\int_0^{\pi} \cos(n \cdot \varphi) \cdot \cos(p \cdot \varphi) d\varphi = \begin{cases} \pi/2 & n = p \\ 0 & n \neq p \end{cases}$
- $\int_0^{\pi} \sin(n \cdot \varphi) \cdot \sin(p \cdot \varphi) d\varphi = \begin{cases} \pi/2 & n = p \\ 0 & n \neq p \end{cases}$
- Glauert-Integral
 $\int_0^{\pi} \frac{\cos(n \cdot \varphi')}{\cos(\varphi) - \cos(\varphi')} d\varphi' = -\pi \cdot \frac{\sin(n \cdot \varphi)}{\sin(\varphi)}$
- $\int \cos(ax) \cdot \cos(bx) dx = \frac{\sin[(a-b)x]}{2(a-b)} + \frac{\sin[(a+b)x]}{2(a+b)} \quad \forall |a| \neq |b|$

1. Aufgabe: Fragenteil (14 Punkte)

1. Störpotentialgleichung:

Wie lautet die Störpotentialgleichung im Unter- und im Überschall? Welchen Differentialgleichungstypen besitzen diese Gleichungen und wie wirkt sich dies auf die Ausbreitung der Störungen aus?

2. Numerik:

Ein transsonisches, adiabates Profil soll mit einer Machzahl von $M_\infty = 0.8$, einer Reynoldszahl von $Re_c = 3 \cdot 10^6$ und einem Anstellwinkel von $\alpha = +3^\circ$ angeströmt werden. Im Bereich von $x/c = 0.7$ ist ein Verdichtungsstoß auf der Oberseite zu erwarten. Skizzieren Sie das für eine zweidimensionale Simulation erforderliche körperangepasste strukturiertes Gitter um das Profil und markieren sie Gebiete mit markanten Strömungsphänomenen. Geben Sie mithilfe der Charakteristiken die Randbedingungen im Fernfeld und auf dem Profil an.

3. Überschallströmung:

Es soll die supersonische Strömung um das unten dargestellte Profil mit einer Wölbklappe, welches unter dem Anstellwinkel α angeströmt wird, untersucht werden.



Der Anstellwinkel beträgt $\alpha = 10^\circ$ und die Klappe ist um $\eta = -12^\circ$ nach oben ausgeschlagen. Die Machzahl der freien Anströmung ist $M_\infty = 3.0$.

- Skizzieren Sie sorgfältig das System der evtl. Verdichtungsstöße, Expansionsfächer sowie Mach'schen Linien um das Profil. Lassen Sie die Zustandsänderungen an der Hinterkante aus.
- Skizzieren Sie sorgfältig in einer Hodographenebene die einzelnen Zustandsänderungen für die Unterseite (1–4–5) des Profils und markieren Sie die entsprechenden Stromlinienänderungswinkel in Ihrer Skizze.

4. Pfeilung:

Erläutern Sie anhand einer Skizze die Effekte der Pfeilung im **inkompressiblen** Strömungsfall. Wie wirken sich die Effekte jeweils auf den dimensionslosen Druckbeiwerten aus und welcher Effekt überwiegt. Wie wirkt sich in dem Fall die Pfeilung insgesamt auf die Aerodynamik des Flügels aus?

2. Aufgabe: Skelett-Theorie (18 Punkte)

Die Skelettlinie eines dünnen Profils lautet in dimensionslosen Koordinaten:

$$Z^{(s)} = K \cdot X(X - 1)^2 \quad \text{mit} \quad X = \frac{x}{l}, \quad Z^{(s)} = \frac{z^{(s)}}{l}$$

Darin ist l die Sehnenlänge und $0 < K \leq 1$ ein Profilparameter. Das Profil liegt in einer Parallelströmung mit der Anströmgeschwindigkeit V_∞ und dem Anstellwinkel α .

1. Bestimmen Sie die relative Profیلwölbung f und die relative Wölbungsrücklage x_f des Profils $Z^{(s)}$. Zeichnen Sie die Skelettlinie des Profils $Z^{(s)}$ in den Koordinaten (X, Z) .
2. Bestimmen Sie alle Fourier-Koeffizienten A_0 bis A_N des Birnbaum-Ackerman'schen Reihenansatzes für die Zirkulationsverteilung $\gamma(\varphi)$ auf der Sehne des gegebenen Profils $Z^{(s)}$.
3. Geben Sie ohne Rechnung den Wert der Zirkulationsverteilung $\gamma(X)$ an der Position $X = 1$ an und beschreiben Sie dort den Strömungszustand (optional mit Skizze). Wie groß ist an dieser Stelle der Wert des Druckbeiwertes im Rahmen der Skelett-Theorie (keine Rechnung notwendig)?
4. Leiten Sie die allgemeine Beziehung für den Auftriebsbeiwert c_l in Abhängigkeit von A_0 und A_1 im Rahmen der Skelett-Theorie her. Wie groß ist der Beiwert $\frac{\partial c_l}{\partial \alpha}$ des gegebenen Profils $Z^{(s)}$.
5. Die allgemeine Formel für den Momentenbeiwert um die Profیلnase im Rahmen der Skeletttheorie lautet $c_{m_{LE}} = -\frac{\pi}{2}(A_0 + A_1 + \frac{A_2}{2})$. Bestimmen Sie den Nullmomentenbeiwert um den Neutralpunkt des gegebenen Profils c_{m_0} . Zeigen Sie, dass es sich bei diesem tatsächlich um einen Neutralpunkt bzw. Nullmomentenbeiwert handelt.

Gegeben: Anstellwinkel α , Sehnenlänge l , Profilparameter K .

Hinweise:

$$\begin{aligned} \gamma(\varphi) &= 2V_\infty \cdot \left(A_0 \cdot \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \sum_{n=1}^N A_n \cdot \sin(n\varphi) \right) \\ -w_a(\varphi) &= -\frac{w}{V_\infty} = A_0 + \sum_{n=1}^N A_n \cdot \cos(n\varphi) \\ -\frac{w}{V_\infty} &= \alpha - \frac{dZ}{dX} \\ X &= \frac{1}{2}(1 + \cos(\varphi)) \end{aligned}$$

3. Aufgabe: Traglinientheorie (18 Punkte)

Die Zirkulationsverteilung um einen Tragflügel mit der Breite b lässt sich generell durch folgende Gleichung ausdrücken.

$$\Gamma(\varphi) = 2V_\infty b \sum_{n=1}^N A_n \sin(n\varphi)$$

Im Nachfolgenden wird von einem symmetrischen Querschnittsprofil ausgegangen.

1. Skizzieren Sie allgemein die Anströmverhältnisse an einem symmetrischen Querschnittsprofil eines Tragflügels und tragen Sie die dazugehörigen Kräfte ein.
2. Ermitteln Sie die einzelnen Terme des geometrischen Anstellwinkels α_g als Funktion der Position am Flügel φ und der lokalen Zirkulation $\Gamma(\varphi)$ mithilfe der Prandtl'schen Traglinientheorie.
3. Leiten Sie explizit den integralen Auftriebsbeiwert $c_L = \pi A_1 \frac{b^2}{S}$ für einen Flügel unter Berücksichtigung der Koeffizienten A_n der Zirkulationsverteilung und der gegebenen Größen her.

Der Tragflügel einer Boeing 777 verliert an der Stelle $y_b = \sqrt{3}b/4$ ein Stück der Hinterkante, was zu einer Änderung der ursprünglich elliptischen Zirkulationsverteilung führt.

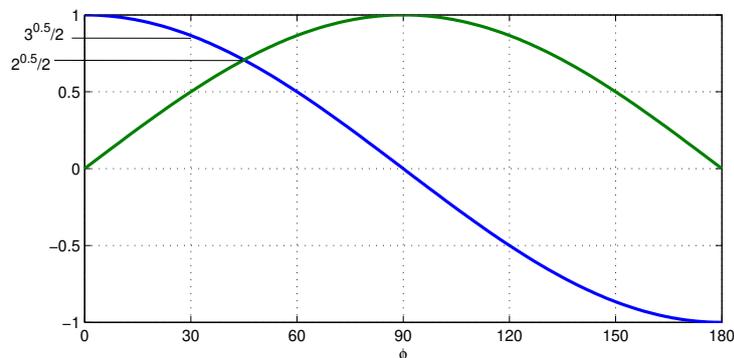
4. Ermitteln Sie die Koeffizienten A_1 und A_2 für den Fall, dass der induzierte Anstellwinkel $\alpha_i(y_b) = \frac{1}{10}$ [rad] an der Stelle $y_b = \sqrt{3}b/4$ sowie der integrale Auftriebsbeiwert $c_L = 0.5\pi$ beträgt. (Hinweis: Überführen Sie zuerst y_b nach φ_b)

Gegeben: V_∞, ρ_∞, b , lokale Profiltiefe $c(\varphi)$, Flügelfläche S , Streckung des Flügels der Boeing 777 $\Lambda = 10$
Hinweis:

$$y = -\frac{b}{2} \cos(\varphi)$$

$$w_i(y) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{d\Gamma}{dy'} \frac{dy'}{y - y'}$$

$\cos(\phi)$ und $\sin(\phi)$ als Funktion von ϕ



Lösung 1. Aufgabe: Fragenteil (14 Punkte)

1. Störpotentialgleichung im Unterschall:

$$(1 - M_\infty^2) \varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0$$

elliptische DGL. (analog: Laplace-Gleichung)

Störungsausbreitung stromauf und stromab.

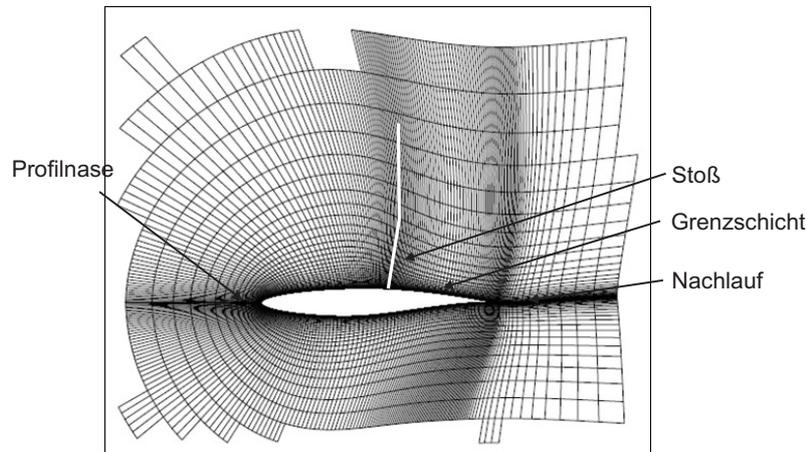
Störpotentialgleichung im Überschall:

$$(M_\infty^2 - 1) \varphi_{xx} - \varphi_{yy} = 0$$

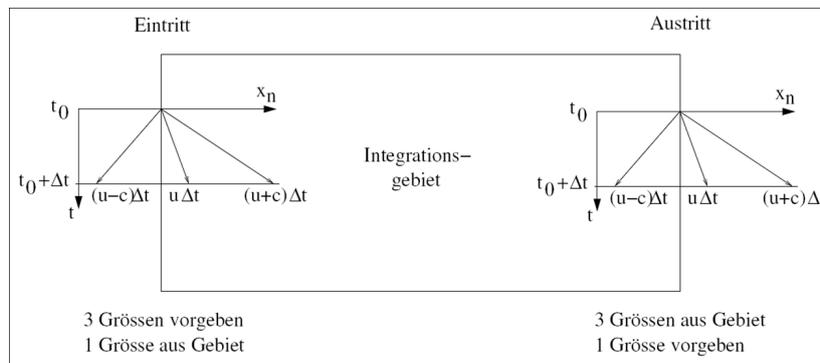
hyperbolische DGL (analog: Wellengleichung)

Störungsausbreitung nur stromab

2. Das für die numerische Simulation erforderliche körperangepasste Gitter:



Die Betrachtung der Charakteristiken an Ein- und Austrittsrändern zeigt:



Für die Randbedingungen an Ein- und Austritt gilt dann:

Eintritt: $\rho = \rho_\infty$, $u = u_\infty$, $v = v_\infty$ vorgeben; $\frac{\partial p}{\partial n} = 0$ (bzw. aus dem Feld extrapoliert)

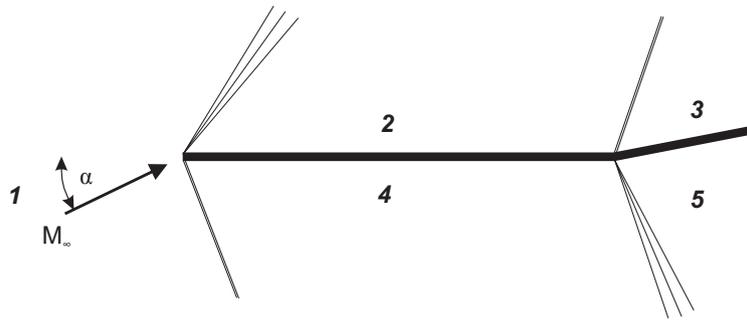
Austritt: $p = p_\infty$ vorgeben; $\frac{\partial \rho}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0$, (bzw. jeweils aus dem Feld extrapoliert)

Für die Randbedingung auf dem Profil gilt die Haftbedingung für adiabate Wände:

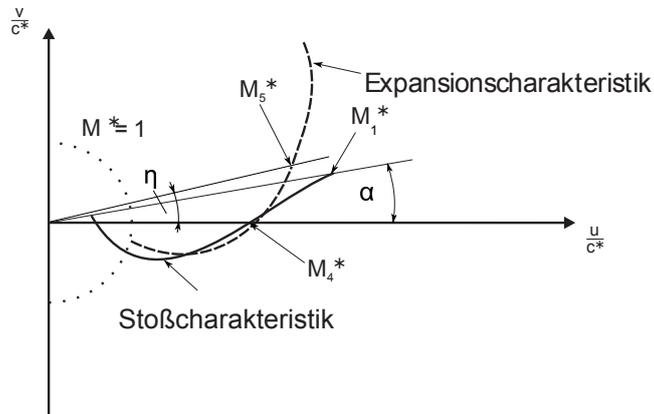
adiabate Wand: $u = v = 0$, $\frac{\partial T}{\partial n} = 0$

3. Überschallströmung:

(a) Skizze mit Stößen, Expansionsfächer sowie Mach'schen Linien:

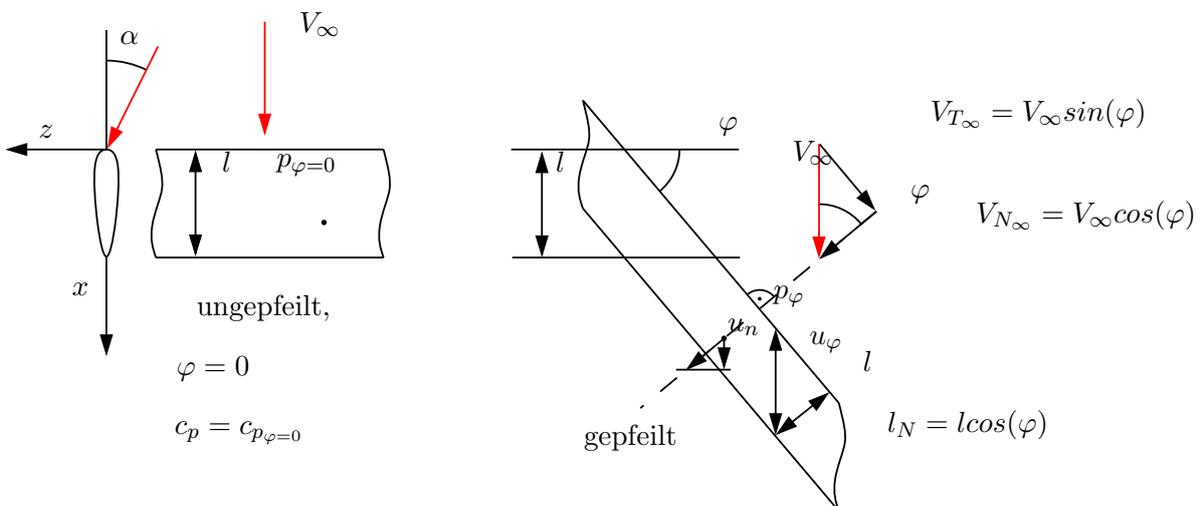


(b) Hodographenebene auf der Profilunterseite:



4. Pfeilung:

Zum einen reduziert die Pfeilung die effektive Profiltiefe um $\cos(\varphi)$, was zu einer Erhöhung der relativen Dicke und Wölbung führt. Dieser Einfluss wirkt sich linear auf den Druckbeiwert aus. Zum anderen reduziert die Pfeilung die effektive Anströmgeschwindigkeit um $\cos(\varphi)$, welches sich quadratisch auf den Druckbeiwert auswirkt. Die beiden Einflüsse wirken dabei gegeneinander. In einer inkompressiblen Anwendung wirkt sich die Pfeilung insgesamt negativ auf den Auftrieb aus und reduziert diesen um den Faktor $\cos(\varphi)$.



Lösung 2. Aufgabe: Skelett-Theorie (18 Punkte) (Lösung)

1.

$$Z^{(s)} = K \cdot X(X-1)^2 = K \cdot (X^3 - 2X^2 + X)$$

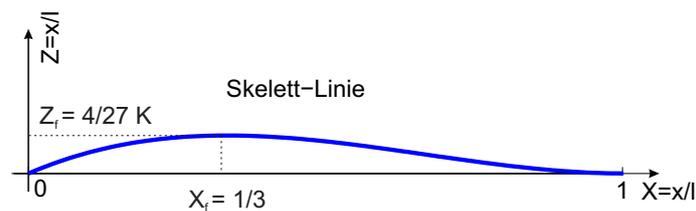
$$\frac{dZ^{(s)}}{dX} = K \cdot (3X^2 - 4X + 1)$$

$$\frac{dZ^{(s)}}{dX} = 0 \Rightarrow X_{1,2} = \left\{ \frac{1}{3}, 1 \right\}$$

$$Z^{(s)}\left(X = \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{27}K, \quad Z^{(s)}(X=0) = 0, \quad Z^{(s)}(X=1) = 0$$

$$\Rightarrow X_f = \frac{1}{3}, \quad f = \frac{4}{27}K$$

Zeichnung der Skelett-Linie:



2. Aus der Beziehung für die vertikale Störgeschwindigkeit

$$-w_a = -\frac{w}{V_\infty} = \alpha - \frac{dZ}{dX} = \alpha - K \cdot (3X^2 - 4X + 1) = A_0 + \sum_{n=1}^N A_n \cdot \cos(n\varphi)$$

folgt mit der Substitution $X = \frac{1}{2}(1 + \cos \varphi)$

$$\alpha - K \cdot \left(\frac{3}{4} \cos^2 \varphi - \frac{1}{2} \cos \varphi - \frac{1}{4} \right) = A_0 + \sum_{n=1}^N A_n \cdot \cos(n\varphi)$$

Mit $\cos^2 \varphi = \frac{1}{2}(\cos(2\varphi) + 1)$ folgt:

$$\alpha - K \cdot \left(\frac{3}{8}(\cos(2\varphi) + 1) - \frac{1}{2} \cos \varphi - \frac{1}{4} \right) = A_0 + \sum_{n=1}^N A_n \cdot \cos(n\varphi)$$

Der Koeffizientenvergleich liefert:

$$A_0 = \alpha - K \cdot \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{4} \right) = \alpha - \frac{1}{8}K, \quad A_1 = \frac{1}{2}K, \quad A_2 = -\frac{3}{8}K, \quad A_n = 0 \text{ für } \forall n \geq 3$$

3. Die Position ($X = 1$) entspricht der Hinterkante des Profils. Hier ist $\gamma(X = 1) = 0$, damit die Kutta'sche Abflussbedingung erfüllt wird. Die Strömung fließt hier glatt parallel von der unendlich dünnen Hinterkante mit $V = V_\infty$ ab.

Der Druckbeiwert an der Hinterkante ist mit den Näherungen der Skeletttheorie $c_p(X = 1) = 0$.

4. Nach Kutta-Zhukhowski gilt für die zweidimensionale Auftriebskraft:

$$\hat{L} = \rho V_\infty \Gamma = \rho V_\infty \int_0^l \gamma(x) dx$$

$$\Rightarrow c_l = \frac{\hat{L}}{\frac{\rho V_\infty^2}{2} l} = \frac{2\Gamma}{V_\infty l}$$

mit $\Gamma = \int_0^l \gamma(x) dx = l \int_0^1 \gamma\left(\frac{x}{l}\right) d\left(\frac{x}{l}\right) = l \int_0^1 \gamma(X) dX$

$$\Rightarrow c_l = \frac{2\Gamma}{V_\infty l} = \frac{2}{V_\infty} \int_0^1 \gamma(X) dX$$

und mit der Transformationsvorschrift $\cos(\varphi) = 2X - 1$ folgt:

$$\Rightarrow X = \frac{1}{2}(\cos(\varphi) + 1) \Rightarrow dX = -\frac{1}{2} \sin(\varphi) d\varphi \quad \text{mit} \quad \varphi(X=0) = \pi \quad \varphi(X=1) = 0$$

$$\Rightarrow c_l = \frac{2}{V_\infty} \int_0^1 \gamma(X) dX = \frac{2}{V_\infty} \int_\pi^0 \gamma(\varphi) \left(-\frac{1}{2} \sin(\varphi)\right) d\varphi = \frac{1}{V_\infty} \int_0^\pi \gamma(\varphi) \sin(\varphi) d\varphi$$

Die Zirkulationsverteilung für die ersten drei Birnbaum-Ackermann'schen Normalverteilungen lautet:

$$\gamma(\varphi) = 2V_\infty \left(A_0 \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) + A_1 \sin(\varphi) \right)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow c_l &= 2 \int_0^\pi \left(A_0 \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) + A_1 \sin(\varphi) \right) \sin(\varphi) d\varphi \\ &= 2 \left[\underbrace{\int_0^\pi A_0 \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin(\varphi) d\varphi}_I + \underbrace{\int_0^\pi \sin^2(\varphi) d\varphi}_{II} \right] \end{aligned}$$

Zu Integral I:

mit Hinweis $\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin(\varphi) = 1 - \cos(\varphi)$:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi A_0 \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin(\varphi) d\varphi \\ &= \int_0^\pi A_0 (1 - \cos(\varphi)) d\varphi \\ &= A_0 (\pi - [\sin(\varphi)]_0^\pi) = A_0 \pi \end{aligned}$$

Zu Integral II:

$$II = \int_0^\pi \sin^2(\varphi) d\varphi = A_1 \left[\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{4} \sin(2\varphi) \right]_0^\pi = A_1 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} \sin(2\pi) - 0 \right) = A_1 \frac{\pi}{2}$$

Somit lautet der Auftriebsbeiwert:

$$c_l = 2(I + II) = 2 \left(A_0 \pi + A_1 \frac{\pi}{2} \right) = 2\pi \left(A_0 + \frac{A_1}{2} \right)$$

Der Beiwert $\frac{\partial c_l}{\partial \alpha}$ (Steigung des Auftriebsbeiwertes über Anstellwinkel α) für das gegebene Profil $Z^{(s)}$ ist gleich 2π (gilt für alle Profile im Rahmen der Skelett-Theorie).

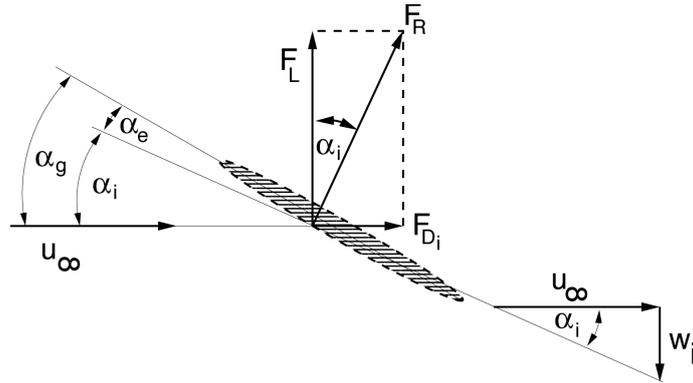
5. Der Neutralpunkt im Rahmen der Skelett-Theorie liegt i.a. bei $X = \frac{x}{l} = \frac{1}{4}$.

Aus der Äquivalenz des Momentenhaushalts folgt:

$$\begin{aligned}c_{m0} &= c_{mLE} + \frac{1}{4}c_l = -\frac{\pi}{2}(A_0 + A_1 + \frac{A_2}{2}) + \frac{\pi}{2}(A_0 + \frac{A_1}{2}) \\ \Rightarrow c_{m0} &= \frac{\pi}{4}(-A_2 - A_1) = \frac{\pi}{4}(-A_2 - A_1) = -\frac{1}{32}\pi K \\ \Rightarrow \frac{\partial c_{m0}}{\partial \alpha} &= 0 \quad (\text{entspricht der Definition des Neutralpunktes})\end{aligned}$$

Lösung 3. Aufgabe: Traglinien-Theorie (18 Punkte)

1. Skizze:



2. Der lokale geometrische Anstellwinkel (fundamentale Gleichung der Prandtl'schen Traglinientheorie) für einen Tragflügel bestehend aus symmetrischen Profilschnitten setzt sich zusammen aus

$$\alpha_g(\varphi) = \alpha_e(\varphi) + \alpha_i(\varphi).$$

Für den effektiven Anstellwinkel eines symmetrischen Profils ($\alpha_{L=0} = 0$) ermittelt sich aus der Beziehung $c_l(\varphi) = 2\pi\alpha_e(\varphi)$ und dem Kutta-Zhukowski Theorem für den lokalen Auftrieb

$$L(\varphi) = \frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2 c(\varphi) c_l = \rho_\infty V_\infty \Gamma(\varphi)$$

und es folgt

$$\alpha_e(\varphi) = \frac{\Gamma(\varphi)}{\pi V_\infty c(\varphi)}.$$

Für den induzierten Anstellwinkel gilt für kleine Winkel $\alpha_i = -w_i(y)/V_\infty$ und mit dem Hinweis

$$\alpha_i = \frac{1}{4\pi V_\infty} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{(d\Gamma/dy') dy'}{y - y'},$$

und mit der Koordinatentransformation aus dem Hinweis folgt dann darauf

$$\alpha_i = -\frac{1}{2\pi V_\infty} \int_0^\pi \frac{(d\Gamma/d\varphi') d\varphi'}{b(\cos \varphi - \cos \varphi')}.$$

Die Ableitung der Zirkulation ergibt sich zu:

$$\frac{d\Gamma}{d\varphi'} = 2bV_\infty \cdot \sum_{n=1}^N n \cdot A_n \cdot \cos(n\varphi').$$

Somit ergibt sich für den lokalen geometrischen Anstellwinkel eines Tragflügels mit symmetrischen Profilschnitten

$$\alpha_g = \frac{\Gamma(\varphi)}{\pi V_\infty c(\varphi)} - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sum_{n=1}^N n \cdot A_n \cdot \cos(n\varphi')}{\cos \varphi - \cos \varphi'}.$$

3. Der integrale Auftriebsbeiwert setzt sich zusammen aus $c_L = 2L / (\rho_\infty V_\infty^2 S)$, wobei

$$L = \rho_\infty V_\infty \int_0^b \Gamma(y) dy, \text{ bzw. über Koordinatentransformation}$$

$$L = \rho_\infty V_\infty \frac{b}{2} \int_0^\pi \Gamma(\varphi) \sin \varphi d\varphi.$$

Mit

$$\int_0^\pi \sin(n\varphi) \cdot \sin(p\varphi) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & n = p \\ 0 & n \neq p \end{cases}$$

folgt, dass nur Lösungen für $n = 1$ bestehen.

Für den Auftriebsbeiwert ergibt sich

$$c_L = A_1 \pi \frac{b^2}{S}$$

4. Einsetzen des Auftriebsbeiwertes und Auflösen nach A_1 liefert

$$c_L = A_1 \pi \frac{b^2}{S}$$

$$A_1 = \frac{c_L}{\pi \frac{b^2}{S}}$$

$$A_1 = \frac{\frac{\pi}{2}}{10\pi}$$

$$A_1 = \frac{1}{20}$$

Für den indzierten Anstellwinkel α_i gilt mit der Gleichung aus Unteraufgabenteil 2

$$\alpha_i = -\frac{1}{2\pi V_\infty} \int_0^\pi \frac{(d\Gamma/d\varphi') d\varphi'}{\cos \varphi - \cos \varphi'}$$

Einsetzen in α_i :

$$\begin{aligned} \alpha_i &= -\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^2 n A_n \int_0^\pi \frac{\cos(n\varphi')}{\cos(\varphi) - \cos(\varphi')} d\varphi' \\ &= \sum_{n=1}^2 n A_n \frac{\sin(n\varphi)}{\sin(\varphi)} \end{aligned}$$

Zur Lösung wurde das Glauert-Integral

$$\int_0^\pi \frac{\cos(n \cdot \varphi')}{\cos(\varphi) - \cos(\varphi')} d\varphi' = -\pi \cdot \frac{\sin(n \cdot \varphi)}{\sin(\varphi)}$$

verwendet.

Der betreffende Winkel φ ergibt sich aus $\varphi_b = \arccos\left(\frac{-2y_b}{b}\right) = \arccos(\sqrt{3}/2)$ und mit der Hinweiszeichnung zu $\varphi_b = \pi/6$. Unter Berücksichtigung des induzierten Anstellwinkels $\alpha_i = \frac{1}{10}$ gilt

$$\frac{1}{10} = A_1 + 2A_2 \frac{\sin 2\varphi_b}{\sin \varphi_b}$$

$$\frac{1}{10} = \frac{1}{20} + 2A_2 \frac{\sin \pi/3}{\sin \pi/6}$$

$$\frac{1}{10} = \frac{1}{20} + 2A_2 \frac{\sqrt{3}/2}{0.5}$$

$$A_2 = \frac{1}{40\sqrt{3}}$$

Zur Lösung wurde wieder die Hinweiszeichnung gebraucht.