

AERODYNAMISCHES INSTITUT
der Rheinisch - Westfälischen
Technischen Hochschule Aachen
Univ.-Prof. Dr.-Ing. W. Schröder

Klausur

Aerodynamik II

04. 09. 2020

M U S T E R L Ö S U N G
E I N S I C H T N A H M E

Hinweis:

Achten Sie darauf, ob Sie alle Aufgaben erhalten haben.

Klausur Aerodynamik II

Fragenteil, Traglinientheorie, Überschall und numerische Verfahren

Integrale und Additionstheoreme

Additionstheoreme

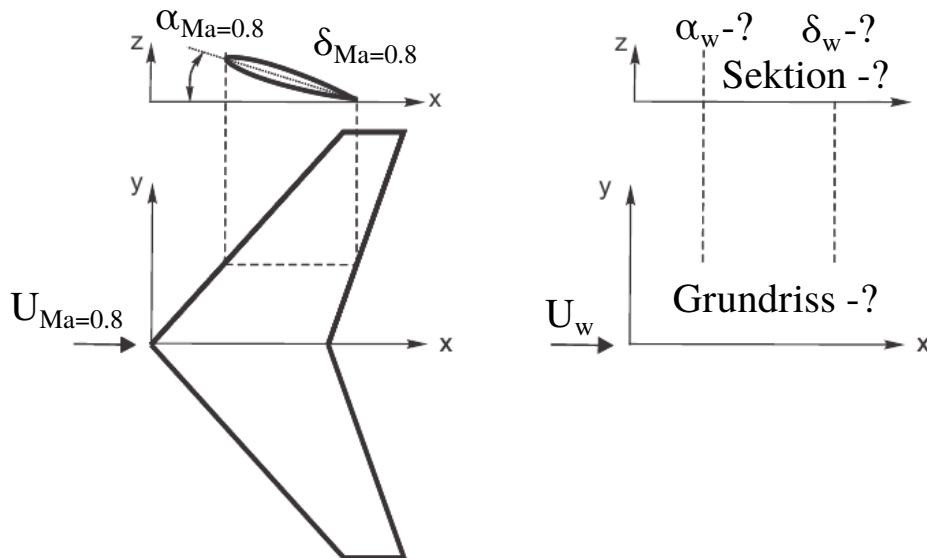
- $\sin(x \pm y) = \sin(x) \cdot \cos(y) \pm \sin(y) \cdot \cos(x)$
- $\cos(x \pm y) = \cos(x) \cdot \cos(y) \mp \sin(x) \cdot \sin(y)$
- $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
- $\sin(2x) = 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$
- $\sin(x) = 2 \cdot \sin(x/2) \cdot \cos(x/2)$
- $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$
- $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$
- $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$
- $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$
- $\tan\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \sin(x) = 1 - \cos(x)$
- $\sin(x) \cdot \sin(nx) = -\frac{1}{2}(\cos[(n+1)x] - \cos[(n-1)x])$
- $\sin[(n+1)x] - \sin[(n-1)x] = 2 \cdot \cos(nx) \cdot \sin(x)$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(n\varphi_p) \cdot \sin(n\varphi) = \frac{1}{4} \ln\left(\frac{1 - \cos(\varphi_p + \varphi)}{1 - \cos(\varphi_p - \varphi)}\right)$

Integrale

- $\int \frac{1}{ax + b} dx = \frac{1}{a} \cdot \ln(ax + b)$
- $\int \frac{x}{ax + b} dx = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2} \cdot \ln(ax + b)$
- $\int \frac{x^2}{X} dx = \frac{1}{a^3} \left[\frac{1}{2}(X) - 2b(X) + b^2 \ln(X) \right]$
mit $X = ax + b$
- $\int \sin(ax) dx = -\frac{\cos(ax)}{a}$
- $\int \cos(ax) dx = +\frac{\sin(ax)}{a}$
- $\int \sin^2(ax) dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4a} \sin(2ax)$
- $\int \cos^2(ax) dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4a} \sin(2ax)$
- $\int \sin^3(ax) dx = \frac{\cos^3(ax)}{3a} - \frac{\cos(ax)}{a}$
- $\int \cos^3(ax) dx = -\frac{\sin^3(ax)}{3a} + \frac{\sin(ax)}{a}$
- $\int \cos^4(ax) dx = \frac{3}{8}x + \frac{\sin(2ax)}{4a} + \frac{\sin(4ax)}{32a}$
- $\int \sin(ax) \cos(ax) dx = \frac{\sin^2(ax)}{2a}$
- $\int_0^{\pi} \cos(n \cdot \varphi) \cdot \cos(p \cdot \varphi) d\varphi = \begin{cases} \pi/2 & n = p \\ 0 & n \neq p \end{cases}$
- $\int_0^{\pi} \sin(n \cdot \varphi) \cdot \sin(p \cdot \varphi) d\varphi = \begin{cases} \pi/2 & n = p \\ 0 & n \neq p \end{cases}$
- Glauert-Integral
 $\int_0^{\pi} \frac{\cos(n \cdot \varphi')}{\cos(\varphi) - \cos(\varphi')} d\varphi' = -\pi \cdot \frac{\sin(n \cdot \varphi)}{\sin(\varphi)}$
- $\int \cos(ax) \cdot \cos(bx) dx = \frac{\sin[(a-b)x]}{2(a-b)} + \frac{\sin[(a+b)x]}{2(a+b)} \quad \forall |a| \neq |b|$

1. Aufgabe: Fragenteil (13 Punkte)

- Erläutern Sie stichpunktartig den Begriff des induzierten Widerstandes im Rahmen der Prandtl'schen Traglinientheorie und nennen Sie eine geometrische Maßname, die zu seiner Reduktion führt.
 - Erläutern Sie stichpunktartig den Begriff des Wellenwiderstandes und nennen Sie eine geometrische Maßname, die zu seiner Reduktion führt.
- Transition:
 - Erläutern Sie stichpunktartig den natürlichen Transitionsvorgang in einer laminaren Grenzschicht hin zu einer vollturbulenten Strömung.
 - Skizzieren Sie den zu erwartenden Verlauf des Reibungsbeiwertes $c_f(Re_x)$ entlang einer ebenen, hydraulisch glatten Platte für $10^2 < Re_x < 10^7$. Die Anströmung erfolgt laminar und die Strömung ist entlang der gesamten Platte anliegend.
- Zur experimentellen Untersuchung eines gepfeilten Flügels für eine Machzahl von $Ma_\infty = 0.8$ wird ein nach der Prandtl-Glauert Ähnlichkeitsregel skaliertes Modellflügel für den vorhandenen Wasserschleppkanal benötigt. Übertragen Sie in Ihre Aufgabenblätter die unten stehende Skizze und ergänzen Sie diese sorgfältig für das entsprechende Versuchsmodell (rechts). Achten Sie dabei auf die Relation der geometrischen Abmaße zum originalen Flügel (links) und geben Sie quantitative Angaben, welche Größen wie verändert werden.



4. Ablösung:

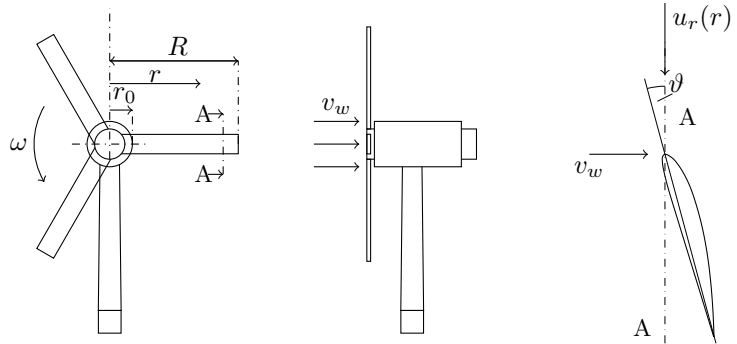
- Geben Sie drei Ablöseformen für eine inkompressible Profilumströmung an.
- Skizzieren Sie den Verlauf dieser Ablöseformen jeweils in einem c_l - α -Diagramm.

2. Aufgabe: Skelett-Theorie / Traglinientheorie (19 Punkte)

Für den Bau einer Windkraftanlage soll eine geeignete Rotorgeometrie gefunden werden. Dazu werden an verschiedenen Stellen entlang der Rotorachse Profilgeometrien gesucht, die zu dem gewünschten Verlauf des lokalen Auftriebsbeiwerts $c_l(r)$ führen. Zwischen diesen „Stützstellen“ werden die einzelnen Profile einer Profildfamilie ineinander überführt. Zusätzlich wird das Rotorprofil um dem Blattneigungswinkel $\vartheta(r)$ verwunden. Die Skelettlinie $Z^{(s)}(X)$ der zu verwendenden Profildfamilie ist durch folgende Funktion gegeben:

$$Z^{(s)}(X, r) = C(r)(X^3 - 2X^2 + X)$$

$$X = \frac{x}{l}; \quad Z^{(s)} = \frac{z^{(s)}}{l}$$



1. Begründen Sie warum für die Auswahl der Profilgeometrie die Skelett-Theorie gegenüber der Tropfentheorie bevorzugt wird. Nennen Sie außerdem die Gemeinsamkeiten und Unterschiede in den Voraussetzungen beider Theorien.
2. Zeigen Sie mithilfe der Skelett-Theorie, dass für den lokalen Auftriebsbeiwert $c_l = \pi(2A_0 + A_1)$ gilt.
3. Leiten Sie den Anstellwinkel $\alpha(r)$ unter Berücksichtigung des Blattneigungswinkels $\vartheta(r)$ als Funktion des Radius her. Berechnen Sie anschließend mit der Skelett-Theorie den Koeffizienten $C(r)$, sodass die Auftriebsbeiwerts-Verteilung $c_l(r)$ erreicht wird.

Im Anschluss an die Vorauswahl der Rotorgeometrie sollen die Rotorblätter mit der Traglinientheorie analysiert werden. Die Zirkulationsverteilung $\Gamma(r)$ (siehe Hinweise) entlang eines Rotorblattes ist aus experimentellen Untersuchungen bekannt. Vereinfachend wird angenommen, dass die Windgeschwindigkeit gegenüber der Umfangsgeschwindigkeit entlang des gesamten Rotorblattes vernachlässigbar ist ($\lambda \gg 1$).

4. Berechnen Sie die Funktion des lokalen induzierten Anstellwinkels $\alpha_i(\phi)$. Verschieben Sie dafür den Koordinatenursprung von der Rotationsachse in den Mittelpunkt des Rotorblattes $r_m = \frac{R+r_0}{2}$ und benutzen Sie die Transformationsvorschrift $r = -\frac{R-r_0}{2} \cos(\phi)$.

Gegeben: Rotorradius R , innerer Rotorradius r_0 , Windgeschwindigkeit in der Rotorebene v_w , Schnelllaufzahl $\lambda = \frac{\omega R}{1.5v_w}$, $\vartheta(r)$, $c_l(r)$, Γ_0

Hinweise: Skelett-Theorie:
$$\Delta c_p = \frac{2\gamma}{u_\infty} = 4 \left(A_0 \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \sum_{n=1}^N A_n \sin(n\varphi) \right)$$

$$(2.1 - 2.3) \quad \alpha - \frac{dZ^{(s)}}{dX} = \sum_{n=0}^N A_n \cos(n\varphi)$$

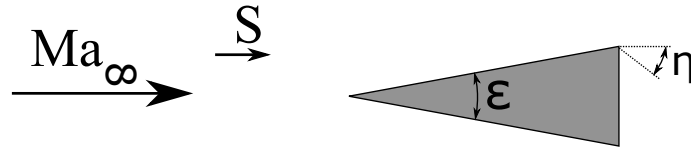
$$X = \frac{1 + \cos(\varphi)}{2}$$

Traglinientheorie:
$$\Gamma(r) = \Gamma_0 \left[\left(1 - \left(\frac{2r}{R-r_0} \right)^2 \right)^{0.5} \left(1 + \frac{2r}{R-r_0} \right) \right]$$

$$(2.4) \quad w_i = -\frac{1}{4\pi} \int_{-(R-r_0)/2}^{(R-r_0)/2} \frac{d\Gamma}{dr'} \frac{dr'}{r-r'}$$

3. Aufgabe: Überschall und numerische Verfahren (18 Punkte)

Die Umströmung eines schlanken Keils mit einem Öffnungswinkel von $\epsilon = 10^\circ$ wird bei einer Machzahl von $Ma_\infty = 1.5$ durch die numerische Lösung der Euler-Gleichungen approximiert. Optische Messungen haben gezeigt, dass die Strömung an der Hinterkante symmetrisch mit einem Winkel von $\eta = 10^\circ$ ablöst. Der Anstellwinkel beträgt $\alpha = 0^\circ$ und es wird von einer zweidimensionalen Strömung ausgegangen.



- Übertragen Sie die obige Skizze in Ihre Aufgabenblätter und skizzieren Sie sorgfältig das zu erwartende Strömungsfeld unter Berücksichtigung aller kompressiblen Effekte. Vervollständigen Sie weiterhin den Verlauf der in der Skizze eingezeichneten Stromlinie S.
- Ergänzen Sie Ihre Skizze um ein sinnvolles lokal verfeinertes kartesisches Gitter, mit dem die zu erwartenden Überschalleffekte erfasst werden können.
- Zeichnen Sie qualitativ die Zustandsänderungen für die Strömung entlang der gesamten Stromlinie S in der Hodographenebene.
- Erläutern Sie mittels der Charakteristikentheorie die Wahl der Ein- und Auströmrandbedingungen und geben Sie explizit die geeigneten Randbedingungen für die primitiven Variablen bestehend aus der Dichte ρ , den Geschwindigkeitskomponenten u, v und dem statischen Druck p am Eintrittsrand und Austrittsrand Ihres Rechengitters an. Geben sie zusätzlich die Randbedingung auf der als adiabat anzunehmenden Keiloberfläche an. Setzen Sie alle hierfür benötigten Größen als bekannt voraus.
- Beurteilen Sie die Fähigkeit des Verfahrens den Auftrieb bzw. den Widerstand bei verschiedenen Anstellwinkeln zu berechnen. Geben Sie hierbei insbesondere an, ob alle Ihnen bekannten Widerstandsanteile berücksichtigt werden.
- Die oben abgebildete Überschallströmung kann durch die folgende partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung des Geschwindigkeitspotentials - einer Wellengleichung - beschrieben werden:

$$-\beta^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0, \quad \beta = \sqrt{Ma^2 - 1}, \quad Ma > 1. \quad (1)$$

Diese soll durch ein numerisches Differenzenverfahren gelöst werden. Entwickeln Sie aus der Taylorreihe

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m f(x_0)}{\partial x^m} \cdot (x - x_0)^m \quad (2)$$

eine zentrale Approximation für die zweite Ableitung einer Funktion $\phi(x)$ auf einem äquidistanten Gitter, die 2. Ordnung genau in x ist. Geben Sie den führenden Term des Abbruchfehlers an.

- Die Anströmmachzahl wird auf $Ma_\infty = 1.2$ reduziert. Welche Konsequenzen hat dies für das zu erwartende Strömungsfeld.

Gegeben: $Ma_\infty, \eta = 10^\circ, \epsilon = 10^\circ$ und $\alpha = 0^\circ$.

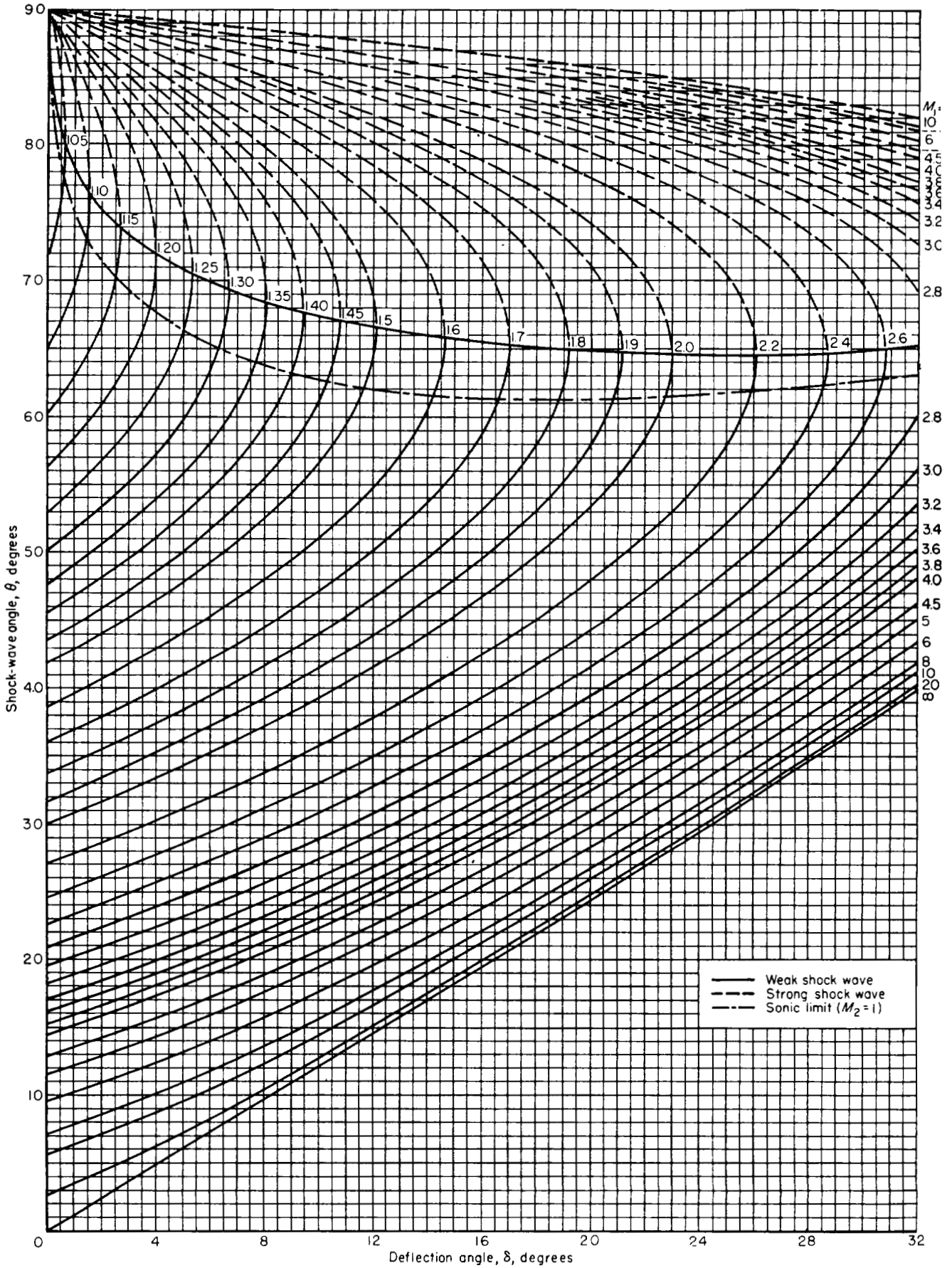


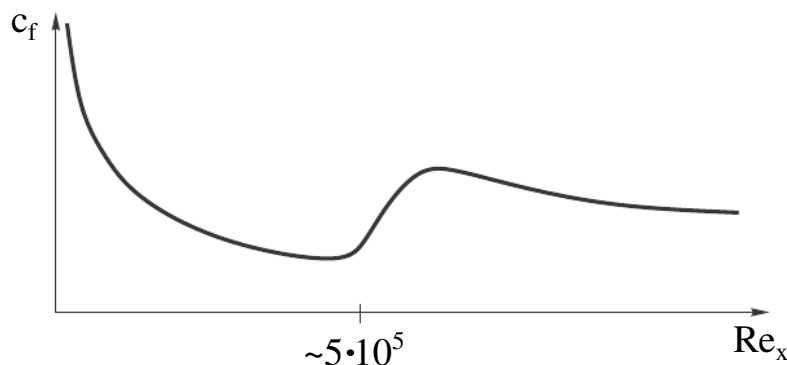
CHART 2.—Variation of shock-wave angle with flow-deflection angle for various upstream Mach numbers Perfect gas, $\gamma = \frac{7}{5}$.

Lösung 1. Aufgabe: Fragenteil (13 Punkte)

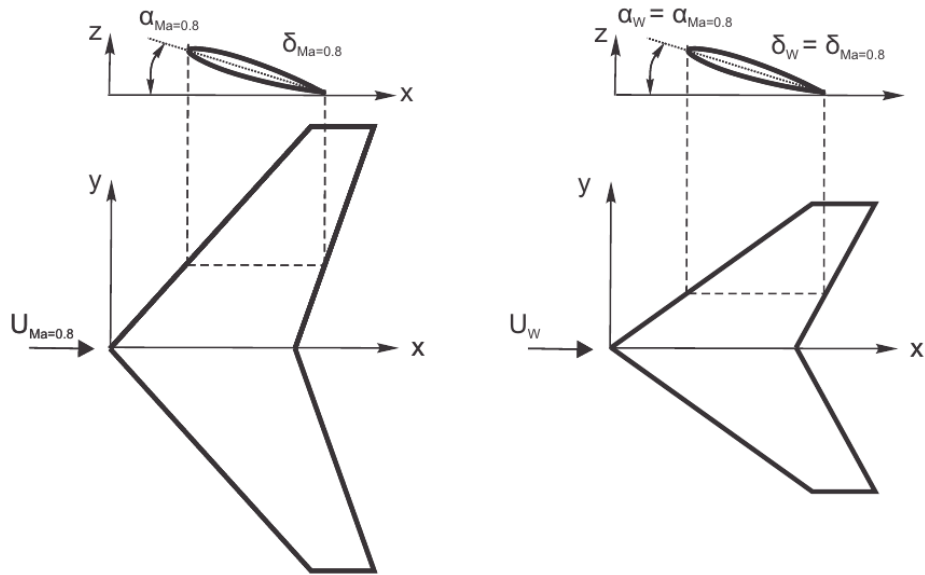
1. (a) Induzierter Widerstand: Bei einem Flügel endlicher Spannweite ist die Druckverteilung auf der Ober- und Unterseite, d.h. die Auftriebsverteilung, entlang der Spannweite nicht konstant. Hinter dem Flügel bildet sich eine Wirbelfläche aus. Diese Wirbelfläche induziert am Flügel eine nach unten gerichtete Geschwindigkeit, die zur Reduktion des geometrischen Anstellwinkels um den induzierten Anstellwinkel führt. Die resultierende Luftkraft wird um den induzierten Anstellwinkel geneigt und erhält eine horizontale Komponente, die entgegen der Flugrichtung zeigt, also eine Widerstandskraft.
Eine Erhöhung der Spannweite reduziert den Anteil des induzierten Widerstandes.
- (b) Wellenwiderstand: Der Wellenwiderstand entsteht in einer supersonischen Strömung aufgrund von Kompressions- und Expansionswellen, die sich nur stromab ausbreiten und in Summe eine finite Kraft auf eine beliebig gekrümmte Oberfläche in Strömungsrichtung ergeben.
Eine Pfeilung des Tragflügels reduziert den Wellenwiderstand.

2. Transitionsvorgang

- (a) Transitionsvorgang in einer Grenzschicht:
In einer anfangs laminaren Strömung existiert abhängig von äußeren Bedingungen (z.B. Turbulenzgrad in der Anströmung, äußeren Störungen oder der Oberflächenbeschaffenheit) ein breites Spektrum an instationären und räumlichen Störungen in $v_{x,y,z}$ und p . Ein schmales Frequenzband, in welchem die relevanten Wellenzahlen und Wellenlängen u. a. von der Verdrängungsdicke und der Reynoldszahl abhängen, führt zu einer Anfachung der zwei-dimensionalen Instabilität der Strömung, den sog. Tollmien-Schlichting-Wellen. Stromab davon werden sog. Λ -Strukturen bzw. deren Untergattungen beobachtet, die im weiteren Verlauf auseinanderbrechen und Strukturen wie Haarnadelwirbel treten aus. Es bilden sich darauf turbulente Flecken, die weiter stromab eine voll ausgebildete turbulente Strömung ergeben. Der Umschlag ist bei einer Reynoldszahl bezogen auf die Lauflänge von $Re_x = 3 \cdot 10^5 - 5 \cdot 10^5$ zu erwarten. Der genaue Wert hängt maßgeblich von den initialen Störungen in der Grenzschicht ab.
- (b) $c_f(Re_x)$:

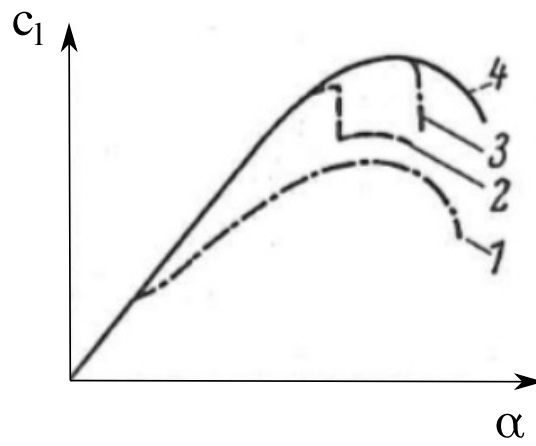


3. Ein Wasserschleppversuch stellt eine inkompressible Strömung dar, somit muss eine Kompressibilitätskorrektur beim Modellbau berücksichtigt werden. Die Anwendung einer Kompressibilitätskorrektur (z.B. der Prandtl-Glauert-Regel) auf den gepfeilten Flügel ergibt den rechts dargestellten Modellflügel für den Wasserschleppversuch. Die x und z Richtungen bleiben unverändert: $\alpha_{Ma=0.6} = \alpha_{Wasser}$, $\delta(X)_{Ma=0.6} = \delta(X)_{Wasser}$. Die y-Richtung wird mit $\sqrt{1 - Ma_\infty^2} = \sqrt{1 - 0.8^2} = 0.6$ skaliert (Spannweite sowie Vorder- und Hinterkantenpfeilungswinkel).



4. Ablöseformen:

- (a)
 - i. thin-airfoil stall (1)
 - ii. leading-edge stall (2)
 - iii. combined leading- and trailing-edge stall(3)
 - iv. trailing-edge stall (4)
- (b) $c_l(\alpha)$



Lösung 2. Aufgabe: Traglinientheorie (19 Punkte)(LÖSUNG)

1. (3 Punkte)

Die Tropfentheorie eignet sich für Verdrängungsprobleme von nicht angestellten Profilen endlicher Dicke. In diesem Fall handelt es sich jedoch um ein Auftriebsproblem, das mit der Skelett-Theorie gelöst werden kann.

Gemeinsame Voraussetzungen: reibungsfreie, inkompressible, rotationsfreie, stationäre Strömung

Unterschiedliche Voraussetzungen:

Tropfentheorie: symmetrische Profile, nicht angestellte Profile endlicher Dicke

Skelett-Theorie: kleine Anstellwinkel, kleine Wölbung, sehr dünne Profile

2. (3 Punkte)

Der Auftriebsbeiwert ist definiert als das Integral des Druckbeiwerts über die gesamte Sehnenlänge. Unter Verwendung der Transformation $dX = -\frac{1}{2} \sin(\varphi) d\varphi$ und den daraus resultierenden neuen Intervallgrenzen für die Vorderkante $X = 0 \Rightarrow \varphi = \pi$ und die Hinterkante $X = 1 \Rightarrow \varphi = 0$ ergibt sich die Formulierung für den Auftriebsbeiwert c_l

$$c_l = \int_0^1 \Delta c_p(X) dX = \frac{1}{2} \int_0^\pi \Delta c_p(\varphi) \sin(\varphi) d\varphi = \int_0^\pi \frac{\gamma(\varphi)}{u_\infty} \sin(\varphi) d\varphi \quad .$$

Durch Einsetzen der Zirkulationsverteilung nach dem Reihenansatz von Birnbaum-Ackermann erhält man

$$c_l = \int_0^\pi \frac{2u_\infty \left(A_0 \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \sum_{n=1}^N A_n \sin(n\varphi) \right)}{u_\infty} \sin(\varphi) d\varphi$$

$$\Leftrightarrow c_l = 2 \int_0^\pi A_0 (1 - \cos(\varphi)) d\varphi + 2 \int_0^\pi \sum_{n=1}^N A_n \sin(n\varphi) \sin(\varphi) d\varphi$$

Mithilfe der Formelsammlung können die Integrale wie folgt bestimmt werden:

$$\int_0^\pi A_0 (1 - \cos(\varphi)) d\varphi = A_0 \pi$$

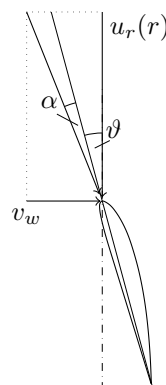
$$\int_0^\pi A_1 \sin(\varphi) \sin(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2} A_1 \pi$$

$$\int_0^\pi \sum_{n=2}^N A_n \sin(n\varphi) \sin(\varphi) d\varphi = 0$$

Dadurch ergibt sich für den Auftriebsbeiwert

$$c_l = \pi(2A_0 + A_1) \quad .$$

3. (7 Punkte)



Das Profil ist um den Winkel $\vartheta(r)$ aus der Rotorebene in den Wind gedreht. Dadurch ergibt sich für den Anstellwinkel

$$\alpha(r) = \arctan\left(\frac{v_w}{u_r(r)}\right) - \vartheta(r) \quad .$$

Zusammen mit der Umfangsgeschwindigkeit

$$u_r(r) = \omega r = \lambda \frac{3}{2} v_w \frac{r}{R}$$

ist der Anstellwinkel

$$\alpha(r) = \arctan\left(\frac{2}{3} \frac{R}{\lambda r}\right) - \vartheta(r) \quad .$$

Die Ableitung der Funktion der Skelettlinie ist

$$\frac{dZ^{(s)}}{dX} = C(r)(3X^2 - 4X + 1) \quad .$$

Mit der Transformation $X = \frac{1+\cos(\varphi)}{2}$ ergibt sich

$$\frac{dZ^{(s)}}{dX}(\varphi) = 3C(r) \left(\frac{1+\cos(\varphi)}{2}\right)^2 - 4C(r) \left(\frac{1+\cos(\varphi)}{2}\right) + C(r) \quad .$$

Durch Einsetzen der transformierten Ableitung in die kinematische Randbedingung

$$\alpha - \frac{dZ^{(s)}}{dX} = \sum_{n=0}^N A_n \cos(n\varphi)$$

ergibt sich

$$\alpha - 3C(r) \left(\frac{1+\cos(\varphi)}{2}\right)^2 + 4C(r) \left(\frac{1+\cos(\varphi)}{2}\right) - C(r) = \sum_{n=0}^N A_n \cos(n\varphi) \quad .$$

Mithilfe der Formelsammlung kann diese Beziehung zu

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N A_n \cos(n\varphi) &= \alpha - 3C(r) \left(\frac{1+2\cos(\varphi)+\cos^2(\varphi)}{4}\right) + 4C(r) \left(\frac{1+\cos(\varphi)}{2}\right) - C(r) \\ \Leftrightarrow \sum_{n=0}^N A_n \cos(n\varphi) &= \alpha - 3C(r) \left(\frac{1+2\cos(\varphi)+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2\varphi)}{4}\right) + 4C(r) \left(\frac{1+\cos(\varphi)}{2}\right) - C(r) \\ \Leftrightarrow \sum_{n=0}^N A_n \cos(n\varphi) &= \alpha - \frac{C(r)}{8} + \frac{C(r)}{2} \cos(\varphi) - \frac{3C(r)}{8} \cos(2\varphi) \end{aligned}$$

umgeformt werden. Mit einem Koeffizientenvergleich können anschließend A_0 und A_1

$$A_0 = \alpha - \frac{C(r)}{8}, \quad A_1 = \frac{C(r)}{2}$$

bestimmt werden. Mit $\alpha(r) = \arctan\left(\frac{2R}{3\lambda r}\right) - \vartheta(r)$ ist

$$c_l(r) = \pi(2A_0 + A_1) = 2\pi \left(\arctan\left(\frac{2R}{3\lambda r}\right) - \vartheta(r) \right) + \frac{\pi}{4} C(r)$$

und damit

$$C(r) = \frac{4c_l(r)}{\pi} - 8 \left(\arctan\left(\frac{2R}{3\lambda r}\right) - \vartheta(r) \right) \quad .$$

4. (6 Punkte)

Durch die Transformationsvorschrift $r = -\frac{R-r_0}{2} \cos(\phi)$ lässt sich die Zirkulation in Abhängigkeit von ϕ formulieren.

$$\Gamma(\phi) = \Gamma_0 \left[(1 - \cos(\phi))^2 \right]^{0.5} (1 - \cos(\phi))$$

Unter Verwendung der Formelsammlung kann die Gleichung zu

$$\Gamma(\phi) = \Gamma_0 [\sin(\phi) (1 - \cos(\phi))] = \Gamma_0 \left[\sin(\phi) - \frac{1}{2} \sin(2\phi) \right]$$

umgeformt werden. Die Ableitung der Zirkulation ergibt anschließend

$$\frac{d\Gamma(\phi)}{d\phi} = \Gamma_0 [\cos(\phi) - \cos(2\phi)] \quad .$$

Die induzierte Abwärtsgeschwindigkeit errechnet sich aus dem Biot-Savart'schen Gesetz für den halb-unendlichen Wirbel.

$$w_i(r) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\frac{R-r_0}{2}}^{\frac{R-r_0}{2}} \frac{\frac{d\Gamma}{dr'} dr'}{r - r'}$$

Mit der Koordinatentransformation lässt sich die induzierte Geschwindigkeit als Funktion von ϕ angeben:

$$w_i(\phi) = \frac{1}{2\pi(R - r_0)} \int_0^\pi \frac{\frac{d\Gamma}{d\phi'} d\phi'}{\cos(\phi) - \cos(\phi')}$$

Durch Lösen des Glauert-Integrals resultiert daraus die induzierte Abwärtsgeschwindigkeit

$$w_i(\phi) = \frac{-\Gamma_0}{2(R - r_0)} \left(1 - \frac{\sin(2\phi)}{\sin(\phi)} \right)$$

in Abhängigkeit von ϕ . Der induzierte Anstellwinkel $\alpha_i(\phi)$ ist das Verhältnis von induzierter Abwärtsgeschwindigkeit und der lokalen Anströmgeschwindigkeit $u(\phi)$. Für das in den Mittelpunkt des Rotorblattes verschobene Koordinatensystem ist die Anströmgeschwindigkeit mit

$$u(r) = [v_w^2 + u_r(r)^2]^{0.5}$$

gegeben. Mit der Vereinfachung aus der Aufgabenstellen reduziert sich die Gleichung zu

$$u(r) = u_r(r) = \lambda \frac{3}{2} \frac{v_w}{R} \left(\frac{R + r_0}{2} + r \right) \quad .$$

Mit der Koordinatentransformation lässt sich die Anströmgeschwindigkeit ebenfalls als Funktion von ϕ angeben:

$$u(\phi) = \lambda \frac{3}{2} \frac{v_w}{R} \left(\frac{R + r_0}{2} - \frac{R - r_0}{2} \cos(\phi) \right) \quad .$$

Dadurch ergibt sich der induzierte Anstellwinkel zu

$$\alpha_i(\phi) = -\frac{w_i(\phi)}{u(\phi)} = \frac{\Gamma_0 R}{3(R - r_0) \lambda v_w \left(\frac{R+r_0}{2} - \frac{R-r_0}{2} \cos(\phi) \right)} \left(1 - \frac{\sin(2\phi)}{\sin(\phi)} \right) \quad .$$

Lösung 3. Aufgabe: Überschall und numerische Verfahren (18 Punkte)

1. Stoßsystem:

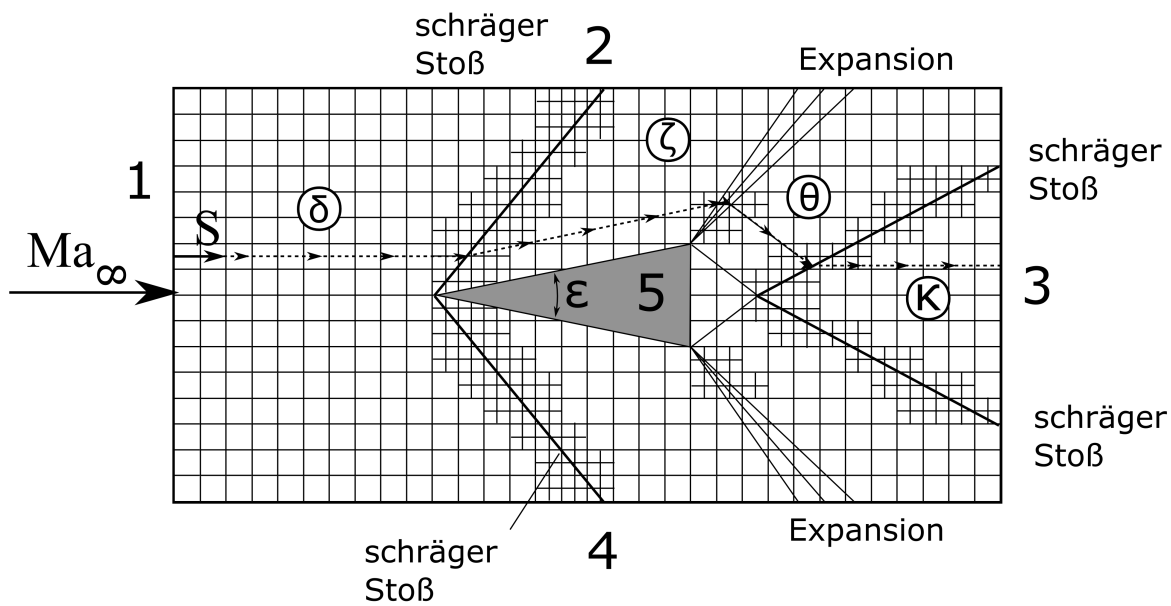
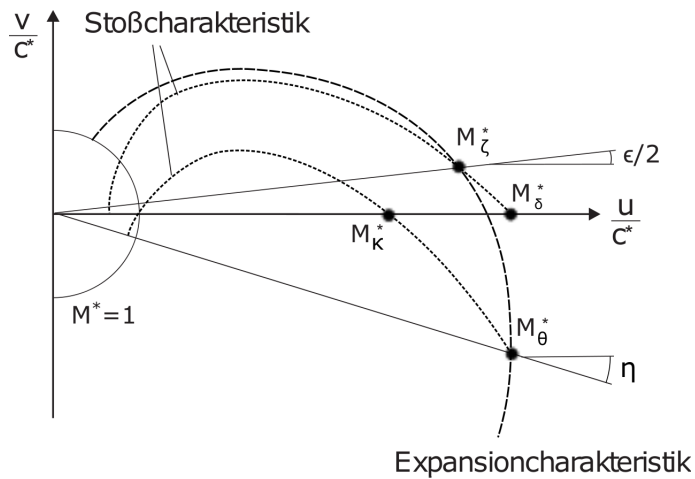


Abbildung 3.1: Stoßsystem und Gitter

2. Siehe Skizze 3.1

3. Hodograph entlang der Stromlinie:



4. Bestimmung der Randbedingungen über die charakteristischen Ausbreitungsgeschwindigkeiten ($u - c, u, u, u + c$).

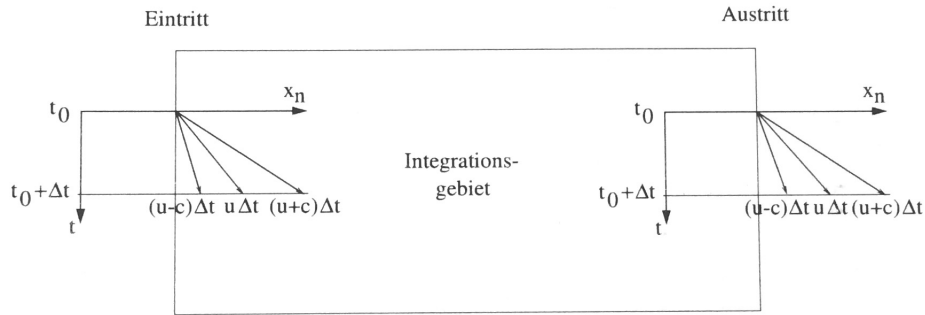


Abbildung 3.2: Charakteristische Ausbreitungsgeschwindigkeiten.

- 1: Einströmrand: Alle Charakteristiken laufen in das Rechengebiet herein. Alle primitiven Variablen werden vorgegeben: $u = u_\infty, v = 0, p = p_\infty, \rho = \rho_\infty$
- 2: Ausströmrand: Alle Charakteristiken laufen aus dem Rechengebiet heraus. Alle Variablen können aus dem Rechengebiet extrapoliert werden $\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0$.
- 5: Körperoberfläche; $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0, \frac{\partial p}{\partial n} = 0, \frac{\partial \rho}{\partial n} = 0$

5. Berechnung von Auftrieb und Widerstand:

- Auftrieb: kann aus dem Druckverlauf am Körperrand näherungsweise berechnet werden.
- Wellenwiderstand: kann berechnet werden, da nur die Druckverteilung benötigt wird.
- induzierter Widerstand: nicht vorhanden, da ein zweidimensionales Problem betrachtet wird.
- Reibungswiderstand: kann nicht berechnet werden, da viskose Effekte in den Euler-Gleichungen vernachlässigt werden.

6. Taylorreihenapproximation für die zweite Ableitung:

$$I: \quad \phi_{i+1} = \phi_i + \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} \Delta x^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \phi_i}{\partial x^3} \Delta x^3 + \frac{1}{24} \frac{\partial^4 \phi_i}{\partial x^4} \Delta x^4 + \mathcal{O}(\Delta x^5) \quad (3)$$

$$II: \quad \phi_{i-1} = \phi_i - \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} \Delta x^2 - \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \phi_i}{\partial x^3} \Delta x^3 + \frac{1}{24} \frac{\partial^4 \phi_i}{\partial x^4} \Delta x^4 + \mathcal{O}(\Delta x^5) \quad (4)$$

Addition von I und II ergibt:

$$\phi_{i+1} + \phi_{i-1} = 2\phi_i + \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} \Delta x^2 + \frac{1}{12} \frac{\partial^4 \phi_i}{\partial x^4} \Delta x^4 \quad (5)$$

Damit ergibt sich für die zweite Ableitung:

$$\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} = \frac{\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}}{\Delta x^2} - \left(\frac{1}{12} \frac{\partial^4 \phi_i}{\partial x^4} \Delta x^2 \right) \quad \text{Abbruchfehler} \quad (6)$$

7. Durch die Reduktion der Anströmmachzahl auf $Ma_\infty = 1.2$ wird der maximale Umlenkwinkel überschritten, was zu einer Ablösung des Stoßes und der Ausbildung eines gekrümmten Bugstoßes führt.