

AERODYNAMISCHES INSTITUT
der Rheinisch - Westfälischen
Technischen Hochschule Aachen
Univ.-Prof. Dr.-Ing. W. Schröder

Klausur

Aerodynamik II

13. 02. 2018

M U S T E R L Ö S U N G
E I N S I C H T N A H M E

Hinweis:

Achten Sie darauf, ob Sie alle Aufgaben erhalten haben.

Klausur Aerodynamik II

Fragenteil, Traglinien-Theorie, Skelett-Theorie und linearisierte Potentialtheorie

Integrale und Additionstheoreme

Additionstheoreme

- $\sin(x \pm y) = \sin(x) \cdot \cos(y) \pm \sin(y) \cdot \cos(x)$
- $\cos(x \pm y) = \cos(x) \cdot \cos(y) \mp \sin(x) \cdot \sin(y)$
- $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
- $\sin(2x) = 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$
- $\sin(x) = 2 \cdot \sin(x/2) \cdot \cos(x/2)$
- $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$
- $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$
- $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$
- $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$
- $\tan\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \sin(x) = 1 - \cos(x)$
- $\sin(x) \cdot \sin(nx) = -\frac{1}{2}(\cos[(n+1)x] - \cos[(n-1)x])$
- $\sin[(n+1)x] - \sin[(n-1)x] = 2 \cdot \cos(nx) \cdot \sin(x)$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(n\varphi_p) \cdot \sin(n\varphi) = \frac{1}{4} \ln\left(\frac{1 - \cos(\varphi_p + \varphi)}{1 - \cos(\varphi_p - \varphi)}\right)$

Integrale

- $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \cdot \ln(ax+b)$
- $\int \frac{x}{ax+b} dx = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2} \cdot \ln(ax+b)$
- $\int \frac{x^2}{X} dx = \frac{1}{a^3} \left[\frac{1}{2}(X) - 2b(X) + b^2 \ln(X) \right]$
mit $X = ax+b$
- $\int \sin(ax) dx = -\frac{\cos(ax)}{a}$
- $\int \cos(ax) dx = +\frac{\sin(ax)}{a}$
- $\int \sin^2(ax) dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4a} \sin(2ax)$
- $\int \cos^2(ax) dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4a} \sin(2ax)$
- $\int \sin^3(ax) dx = \frac{\cos^3(ax)}{3a} - \frac{\cos(ax)}{a}$
- $\int \cos^3(ax) dx = -\frac{\sin^3(ax)}{3a} + \frac{\sin(ax)}{a}$
- $\int \cos^4(ax) dx = \frac{3}{8}x + \frac{\sin(2ax)}{4a} + \frac{\sin(4ax)}{32a}$
- $\int \sin(ax) \cos(ax) dx = \frac{\sin^2(ax)}{2a}$
- $\int_0^{\pi} \cos(n \cdot \varphi) \cdot \cos(p \cdot \varphi) d\varphi = \begin{cases} \pi/2 & n = p \\ 0 & n \neq p \end{cases}$
- $\int_0^{\pi} \sin(n \cdot \varphi) \cdot \sin(p \cdot \varphi) d\varphi = \begin{cases} \pi/2 & n = p \\ 0 & n \neq p \end{cases}$
- Glauert-Integral
 $\int_0^{\pi} \frac{\cos(n \cdot \varphi')}{\cos(\varphi) - \cos(\varphi')} d\varphi' = -\pi \cdot \frac{\sin(n \cdot \varphi)}{\sin(\varphi)}$
- $\int \cos(ax) \cdot \cos(bx) dx = \frac{\sin[(a-b)x]}{2(a-b)} + \frac{\sin[(a+b)x]}{2(a+b)} \quad \forall |a| \neq |b|$

1. Aufgabe: Fragenteil (15 Punkte)

1. Erklären Sie den Begriff des kritischen Druckbeiwertes c_p^* und der kritischen Machzahl Ma_{krit} . Erklären Sie anhand einer Skizze, wie genau sich diese Größen bei einem Flügel mit dem Pfeilwinkel $\varphi = 45^\circ$ effektiv im Vergleich zu einem ungepfeilten Flügel verändern, gehen Sie dabei explizit auf die drei Hauptauswirkungen der Pfeilung ein.
2. Sie haben mittels einer numerischen Simulation das unten dargestellte Ergebnis zur Umströmung eines Profils bei $\alpha = 3^\circ$, $Ma_\infty = 0.7$ und $Re_L = 3 \cdot 10^7$ erhalten:

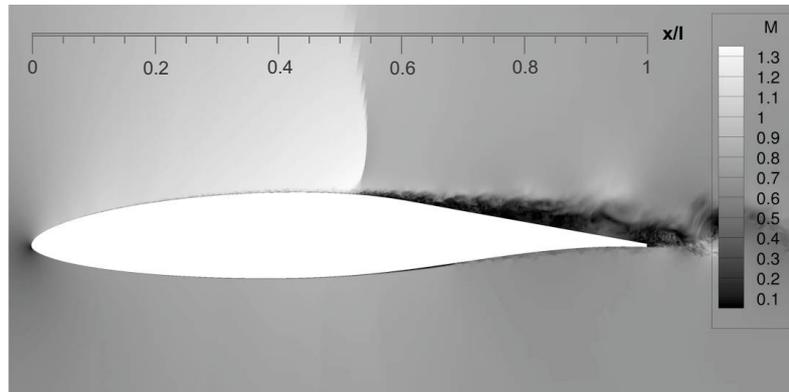


Abbildung 1.1: Verteilung der Machzahl um das untersuchte Profil

- (a) Erläutern Sie die Ausbreitung der Charakteristiken am Ein- und Austritt eines numerischen Rechengebietes anhand einer Skizze und gehen Sie genauer auf die Unterschiede zwischen Über- und Unterschallströmung am Ein- und Austritt ein. Geben Sie für das vorliegende Problem die Randbedingungen für den Ausströmrand des Integrationsgebietes an.
- (b) Skizzieren Sie sorgfältig auf Ihrem Lösungsblatt die zum dargestellten Strömungszustand zu erwartende Druckbeiwertverteilung $c_p(X)$. Markieren Sie im Diagramm auch das Niveau des kritischen Druckbeiwertes c_p^* .
- (c) Skizzieren Sie das für eine zweidimensionale numerische Simulation erforderliche strukturierte körperangepasste Gitter um das Profil und markieren Sie Gebiete mit markanten Strömungsphänomenen.

Hinweis:

Falls nötig, übertragen Sie die Skizzen in Ihre Lösungsblätter und zeichnen Sie die Lösung dort ein!

2. Aufgabe: Traglinientheorie (19 Punkte)

1. Skizzieren Sie allgemein die Anströmungsverhältnisse für den Profilschnitt eines Tragflügels endlicher Spannweite und tragen Sie alle Winkel, Kräfte und Geschwindigkeiten ein.
2. Leiten Sie die Fundamentalgleichung der Traglinientheorie bzw. die Prandtlsche Integralbeziehung her.
3. Zeigen Sie, dass für die allgemeine Γ -Verteilung

$$\Gamma(\varphi) = 2bV_\infty \sum_{n=1}^N A_n \cdot \sin(n\varphi)$$

die Fundamentalgleichung der Traglinientheorie folgende Form annimmt:

$$\alpha_g(\varphi) = \frac{2b}{\pi c(\varphi)} \sum_{n=1}^N A_n \sin(n\varphi) + \alpha_{L=0}(\varphi) + \sum_{n=1}^N nA_n \frac{\sin(n\varphi)}{\sin(\varphi)}.$$

Im Folgenden soll ein Nurflügler mit symmetrischen Querschnittsprofilen betrachtet werden. Der Flügel besitzt einen rechteckigen Grundriss mit der Spannweite b und der Flügeltiefe l . Mit Hilfe von Morphing Wings soll zum Manövrieren folgende Zirkulationsverteilung erzielt werden:

$$\Gamma(\varphi) = 2bV_\infty (\sin(\varphi) + 0.5 \sin(2\varphi) + 0.2 \sin(3\varphi)).$$

4. Bestimmen Sie den geometrischen Anstellwinkel $\alpha_g(\varphi)$, der benötigt wird, um die gewünschte Zirkulationsverteilung zu erzielen.
5. Berechnen Sie das auftretende Giermoment, welches sich für die gegebene Zirkulationsverteilung um die Hochachse des Nurflüglers ergibt.

Gegeben: Flügeltiefe l , Spannweite b , V_∞ , ρ_∞ .

Hinweis:

$$\sin(m\varphi) \cos(\varphi) = \frac{1}{2} [\sin((m-1)\varphi) + \sin((m+1)\varphi)]$$

$$\text{induzierte Abwärtsgeschwindigkeit: } w_i(\varphi) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{d\Gamma}{dy'} \frac{dy'}{y-y'}$$

$$\text{Koordinatentransformation: } y = -\frac{b}{2} \cos(\varphi)$$

3. Aufgabe: Skelett-Theorie und linearisierte Potentialtheorie (16 Punkte)

Ein Rotorblatt eines Hubschraubers soll mit Hilfe der Skeletttheorie und der linearisierten Potentialtheorie ausgelegt werden. Das Rotorblatt hat einen Radius von $R = 15\text{ m}$ und wird mit einer Winkelgeschwindigkeit $\omega = 30 \frac{1}{s}$ bewegt. Das Profil des Rotorblattes ist das in der Abbildung dargestellte, angestellte Parabelskelett mit geringem Anstellwinkel α und kleiner relativer Wölbung f . Die Schallgeschwindigkeit a beträgt $300 \frac{m}{s}$. Vernachlässigen Sie die Dreidimensionalität des Strömungsfeldes und gehen Sie von einer stationären Anströmung des Rotorblattes aus.

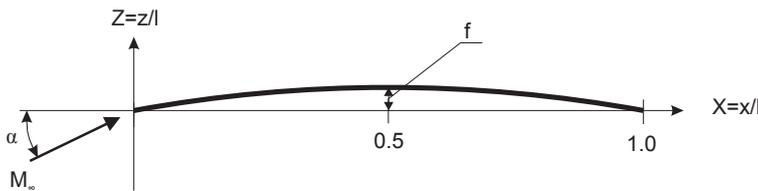


Abbildung 3.1: Parabelskelett

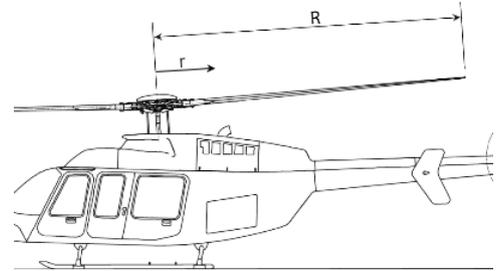


Abbildung 3.2: Hubschrauber

1. Für den inkompressiblen Fall bei $r = r_0 = 1\text{ m}$:
 - (a) Bestimmen Sie die vertikale dimensionslose Störgeschwindigkeit $w_a(X)$.
Hinweis: Bestimmen Sie zunächst die Funktion der Skelettlinie $Z^{(s)}(X)$
 - (b) Leiten Sie die Formel für den Druckbeiwert $c_p(X) = \mp \frac{\gamma(X)}{r_0 \omega}$ her und bestimmen Sie diesen.
 - (c) Der Auftriebsbeiwert und der Momentenbeiwert um die Profilnase sind durch die Formeln $c_l = \pi(2A_0 + A_1)$ und $c_m = -\frac{\pi}{4}(2A_0 + 2A_1 - A_2)$ gegeben. Bestimmen Sie die Lage des Druckpunktes in Abhängigkeit von der relativen Profilwölbung und des Anstellwinkels.
2. Im kompressiblen Fall unter Verwendung der linearisierten Potentialtheorie:
 - (a) Skizzieren Sie den Machzahlverlauf über den Radius r des Rotorblattes und teilen Sie den Verlauf in Bereiche in denen Sie Kompressibilitätskorrekturen anwenden können. Benennen Sie diese und geben Sie die jeweilige Referenzmachzahl an.
 - (b) Bestimmen Sie den Auftriebsbeiwert c_l für das Profil bei $r = 6\text{ m}$ und $r = 14\text{ m}$. Benutzen Sie wenn möglich die linearisierte Potentialtheorie.

Gegeben: Rotorradius $R = 15\text{ m}$, r_0 , relative Wölbung f , Anstellwinkel α , Schallgeschwindigkeit $a = 300 \frac{m}{s}$, Winkelgeschwindigkeit $\omega = 30 \frac{1}{s}$.

Hinweise:

$$\gamma(\varphi) = 2V_\infty \cdot \left(A_0 \cdot \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \sum_{n=1}^N A_n \cdot \sin(n\varphi) \right)$$

$$-w_a(\varphi) = -\frac{w}{V_\infty} = A_0 + \sum_{n=1}^N A_n \cdot \cos(n\varphi)$$

$$-\frac{w}{V_\infty} = \alpha - \frac{dZ}{dX}, \quad \frac{u}{V_\infty} = \pm \frac{\gamma(X)}{2V_\infty}$$

$$c_p|_{Ma_\infty > 1.2} = \pm \frac{2\beta}{\sqrt{Ma_\infty^2 - 1}}$$

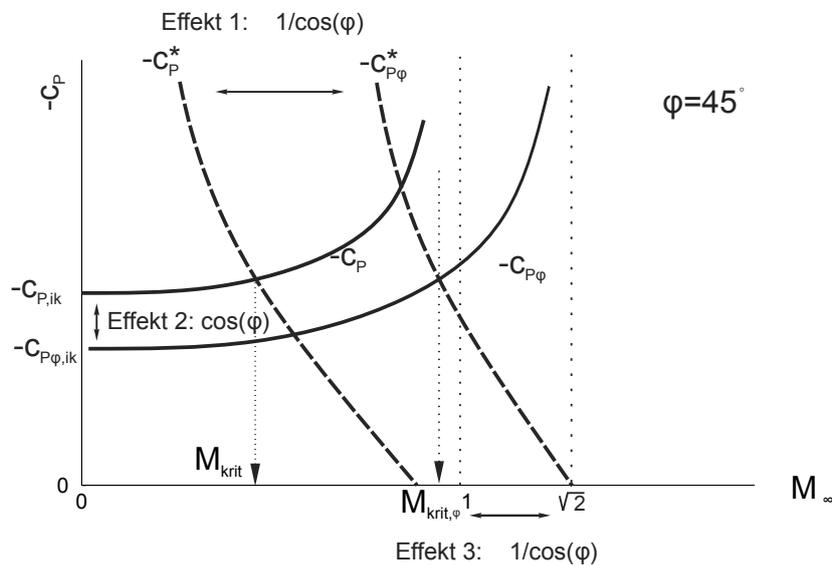
Lösung 1. Aufgabe: Fragenteil (15 Punkte)(LÖSUNG)

1. Der kritische Druckbeiwert c_p^* ist als dimensionsloser Druckbeiwert definiert, der erreicht wird, wenn die Strömung isentrop $Ma = 1$ erreicht.
 Die kritische Machzahl ist die Machzahl der freien Anströmung, bei der auf dem Profil lokal zum ersten Mal die Schallgeschwindigkeit erreicht wird.

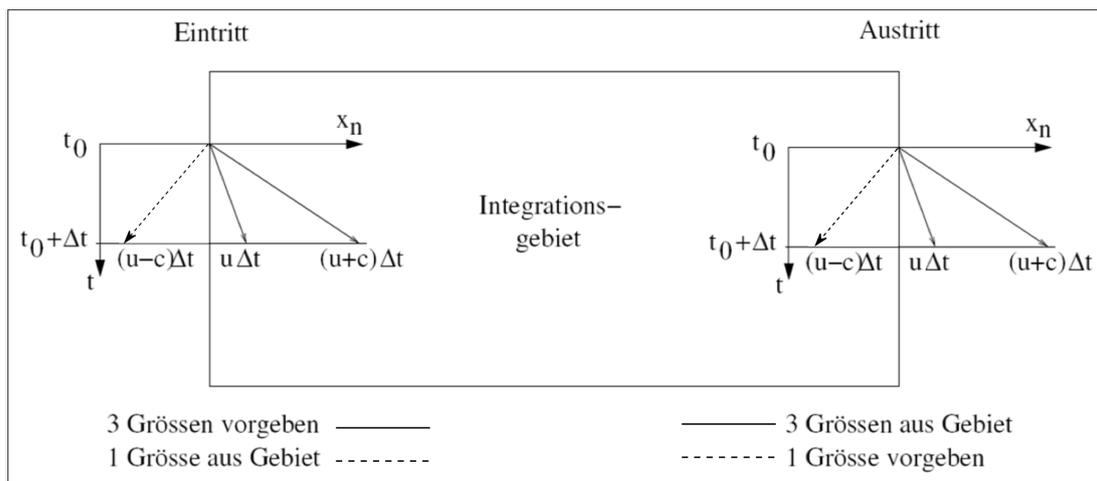
Bei einem gepfeilten Flügel wird der kritische Druckbeiwert für eine konstante Machzahl der Anströmung reduziert, da die maßgebende Normalkomponente der Machzahl um den Faktor $\cos \varphi = \cos 45^\circ = 1/\sqrt{2}$ verringert wird.

Die kritische Machzahl, die sich als Schnittpunkt des Verlaufs des lokalen Druckminimums am Profil mit dem Verlauf des kritischen Druckbeiwerts als Funktion der Machzahl ergibt, wird bei einem gepfeilten Flügel ebenfalls aufgrund vom oben genannten sowie zwei weiteren Effekten erhöht:

- Verminderung des inkompressiblen Auftriebsbeiwertes um $\cos \varphi = \cos 45^\circ = 1/\sqrt{2}$.
- Schwächeres Kompressibilitätsgesetz durch die Asymptotenverschiebung zu $Ma_\infty = \frac{1}{\cos \varphi} = \sqrt{2}$



2. (a) Die Betrachtung der Charakteristiken an Ein- und Ausströmrändern zeigt:



Mögliche Randbedingungen an Ein- und Austritt bei Unterschall:

Eintritt: $\rho = \rho_\infty$, $u = u_\infty$, $v = v_\infty$ vorgeben; $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ aus dem Feld extrapoliert.

Austritt: $p = p_\infty$ vorgeben; $\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ aus dem Feld extrapolieren.

Mögliche Randbedingungen an Ein- und Austritt bei Überschall:

Eintritt: $\rho = \rho_\infty$, $u = u_\infty$, $v = v_\infty$ und $p = p_\infty$ vorgeben;

Austritt: $\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ aus dem Feld extrapolieren.

Der Ausströmrand des vorliegenden Problems ist subsonisch. Somit weisen alle bis auf eine Charakteristik aus dem Integrationsgebiet. Deswegen muss eine Größe an der Randbedingung vorgegeben werden und alle anderen werden aus dem Feld extrapoliert, z.B:

$$p_{Rand} = p_\infty, \quad \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

(b) Die zu erwartende Druckbeiwertverteilung:

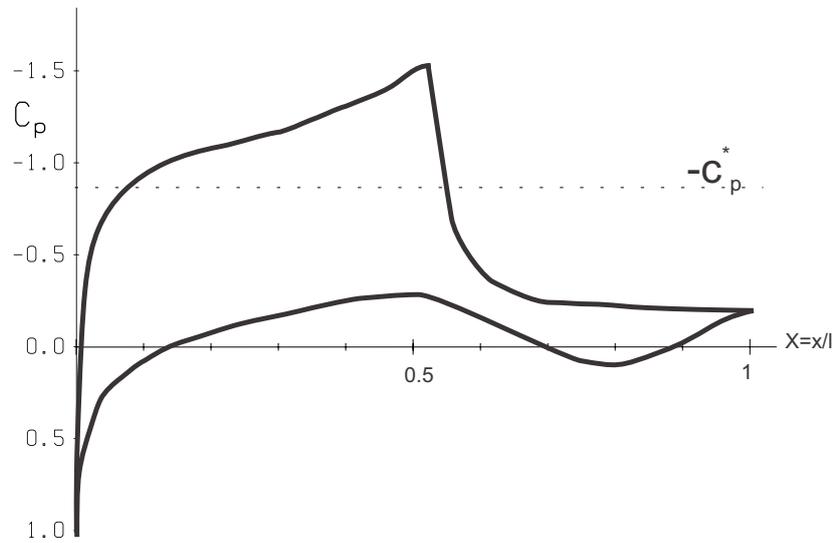
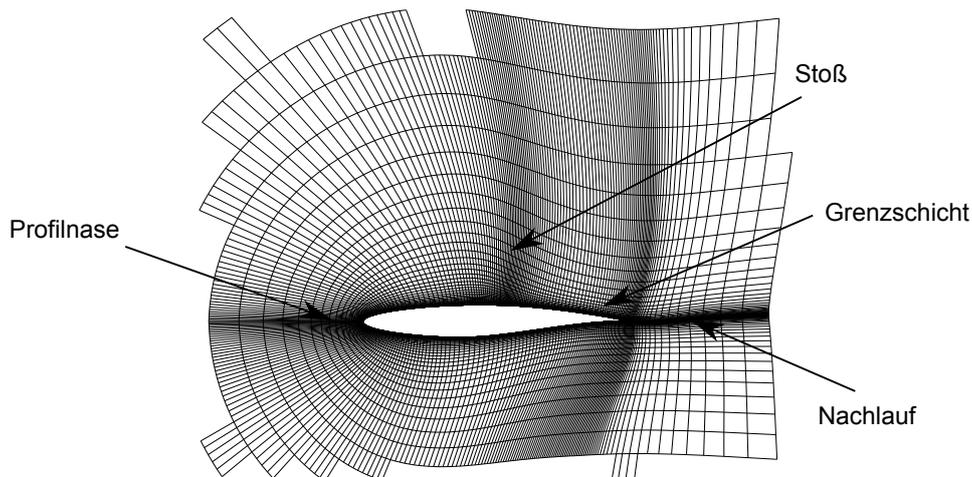


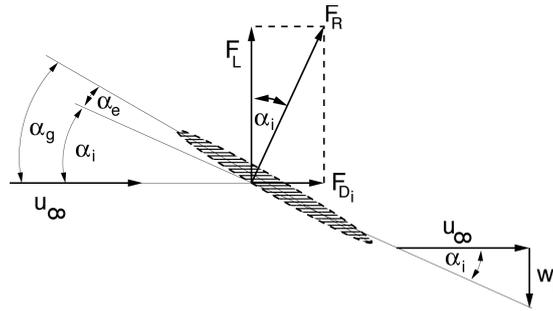
Abbildung 1.1: Zu erwartende Druckbeiwertverteilung am untersuchten Profil

(c) Das für die numerische Simulation erforderliche strukturierte, körperangepasste Gitter:



Lösung 2. Aufgabe: Traglinientheorie (19 Punkte)(LÖSUNG)

1. Skizze:



2. Der lokale geometrische Anstellwinkel (fundamentale Gleichung der Prandtlschen Traglinientheorie) für einen Tragflügel setzt sich wie folgt zusammen

$$\alpha_g(y_0) = \alpha_{eff}(y_0) + \alpha_i(y_0).$$

Aus der Beziehung $c_l(y_0) = 2\pi(\alpha_{eff}(y_0) - \alpha_{L=0}(y_0))$ und dem Kutta-Zhukhovski Theorem für den lokalen Auftrieb

$$L(y_0) = \frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2 c(y_0) c_l(y_0) = \rho_\infty V_\infty \Gamma(y_0)$$

bzw.

$$c_l(y_0) = \frac{2\Gamma(y_0)}{V_\infty c(y_0)}$$

folgt für den effektiven Anstellwinkel

$$\alpha_{eff}(y_0) = \frac{\Gamma(y_0)}{\pi V_\infty c(y_0)} + \alpha_{L=0}(y_0).$$

Für den induzierten Anstellwinkel gilt für kleine Winkel $\alpha_i = -w_i(y)/V_\infty$ und mit dem Hinweis

$$\alpha_i(y_0) = \frac{1}{4\pi V_\infty} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{(d\Gamma/dy') dy'}{y_0 - y'}$$

Somit ergibt sich für die fundamentale Gleichung der Prandtlschen Traglinientheorie eines Tragflügels

$$\begin{aligned} \alpha_g(y_0) &= \alpha_{eff}(y_0) + \alpha_i(y_0) \\ &= \frac{\Gamma(y_0)}{\pi V_\infty c(y_0)} + \alpha_{L=0}(y_0) + \frac{1}{4\pi V_\infty} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{d\Gamma}{dy'} \frac{dy'}{y_0 - y'}. \end{aligned}$$

3. Mit der Koordinatentransformation aus dem Hinweis $y = -\frac{b}{2} \cos(\varphi)$ folgt:

$$\alpha_g(\varphi) = \frac{\Gamma(\varphi)}{\pi V_\infty c(\varphi)} + \alpha_{L=0}(\varphi) - \frac{1}{2\pi b V_\infty} \int_0^\pi \frac{(d\Gamma/d\varphi') d\varphi'}{\cos\varphi - \cos\varphi'}.$$

Mit der gegebenen allgemeinen Zirkulationsverteilung $\Gamma(\varphi) = 2bV_\infty \sum_{n=1}^N A_n \cdot \sin(n\varphi)$ ergibt sich:

$$\alpha_g(\varphi) = \frac{2b}{\pi c(\varphi)} \sum_{n=1}^N A_n \sin(n\varphi) + \alpha_{L=0}(\varphi) - \frac{2bV_\infty}{2\pi b V_\infty} \int_0^\pi \sum_{n=1}^N n A_n \frac{\cos(n\varphi') d\varphi'}{\cos(\varphi) - \cos(\varphi')}$$

mit dem Glauert-Integral folgt:

$$\alpha_g(\varphi) = \frac{2b}{\pi c(\varphi)} \sum_{n=1}^N A_n \sin(n\varphi) + \alpha_{L=0}(\varphi) - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^N n A_n(-\pi) \frac{\sin(n\varphi)}{\sin(\varphi)}$$

und somit folgt der zu zeigende Ausdruck

$$\alpha_g(\varphi) = \frac{2b}{\pi c(\varphi)} \sum_{n=1}^N A_n \sin(n\varphi) + \alpha_{L=0}(\varphi) + \sum_{n=1}^N n A_n \frac{\sin(n\varphi)}{\sin(\varphi)}.$$

4. Für symmetrische Querschnittsprofile gilt: $\alpha_{L=0}(\varphi) = 0$. Weiterhin besitzt der Flügel einen rechteckigen Grundriss mit der Flügeltiefe $c = l$. Es folgt somit:

$$\alpha_g(\varphi) = \sum_{n=1}^N A_n \sin(n\varphi) \left(\frac{2b}{\pi l} + \frac{n}{\sin\varphi} \right).$$

Somit ergibt sich der geometrische Anstellwinkel zu:

$$\alpha_g(\varphi) = \sin(\varphi) \left(\frac{2b}{\pi l} + \frac{1}{\sin\varphi} \right) + 0.5 \sin(2\varphi) \left(\frac{2b}{\pi l} + \frac{2}{\sin\varphi} \right) + 0.2 \sin(3\varphi) \left(\frac{2b}{\pi l} + \frac{3}{\sin\varphi} \right).$$

5. Das Giermoment resultiert aus der unsymmetrischen Widerstandsverteilung entlang der Spannweite. Er lässt sich durch Integration der Widerstandsverteilung gewichtet mit dem Hebelarm über die Spannweite berechnen.

Aus Aufgabenteil 2 ergibt sich der induzierte Anstellwinkel zu:

$$\alpha_i(\varphi) = \sum_{n=1}^N n A_n \frac{\sin(n\varphi)}{\sin(\varphi)}$$

Für den induzierten Widerstand einer Flügelsektion gilt (α_i klein):

$$\hat{W}_i(y) = \hat{L}(y) \alpha_i(y) = \rho_\infty V_\infty \Gamma(y) \alpha_i(y)$$

Somit folgt für das Giermoment:

$$M_z = - \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \rho_\infty V_\infty \Gamma(y) \alpha_i(y) y dy$$

Mit der gegebenen Transformation resultiert:

$$M_z = - \int_0^\pi \rho_\infty V_\infty \Gamma(\varphi) \alpha_i(\varphi) \left(-\frac{b}{2} \right) \cos(\varphi) \frac{b}{2} \sin(\varphi) d\varphi$$

Und mit $\Gamma(\varphi)$ und $\alpha_i(\varphi)$ folgt:

$$\begin{aligned} M_z &= - \int_0^\pi \rho_\infty V_\infty 2b V_\infty \sum_{m=1}^N A_m \sin(m\varphi) \sum_{n=1}^N n A_n \frac{\sin(n\varphi)}{\sin(\varphi)} \left(-\frac{b}{2} \right) \cos(\varphi) \frac{b}{2} \sin(\varphi) d\varphi \\ M_z &= \frac{\rho_\infty V_\infty^2 b^3}{2} \int_0^\pi \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N n A_m A_n \sin(m\varphi) \sin(n\varphi) \cos(\varphi) d\varphi \end{aligned}$$

Mit dem Hinweis folgt:

$$M_z = \frac{\rho_\infty V_\infty^2 b^3}{4} \int_0^\pi \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N n A_m A_n \sin(m\varphi) [\sin((n-1)\varphi) + \sin((n+1)\varphi)] d\varphi$$

Bei der gegebenen Zirkulationsverteilung sind nur die Koeffizienten A_1, A_2 und A_3 vorhanden. Mit der Integralbeziehung aus der Formelsammlung:

$$\int_0^\pi \sin(n \cdot \varphi) \cdot \sin(p \cdot \varphi) d\varphi = \begin{cases} \pi/2 & n = p \\ 0 & n \neq p \end{cases}$$

folgt:

$$\begin{aligned} M_z &= \frac{\pi \rho_\infty V_\infty^2 b^3}{8} [(2+1)A_1 A_2 + (3+2)A_2 A_3] \\ &= \frac{\pi \rho_\infty V_\infty^2 b^3}{8} [(2+1) \cdot 1 \cdot 0.5 + (3+2) \cdot 0.5 \cdot 0.2] \\ &= \frac{\pi \rho_\infty V_\infty^2 b^3}{8} \left[\frac{3}{2} + \frac{5}{10} \right] \\ &= \frac{\pi \rho_\infty V_\infty^2 b^3}{4} \end{aligned}$$

Lösung 3. Aufgabe: Skelett-Theorie und linearisierte Potentialtheorie (16 Punkte) (LÖSUNG)

1. (a) Zunächst wird eine Funktion für die Skelettlinie erstellt. Da es sich um ein Parabelskelett handelt, wird ein Polynom 2. Grades herangezogen.

$$Z^{(s)}(X) = c_1 + c_2 X + c_3 X^2$$

Aus der Abbildung sind folgende Punkte des Skeletts bekannt:

$$\begin{aligned} Z^{(s)}(X=0) &= 0 && \rightarrow c_1 = 0 \\ Z^{(s)}(X=1) &= 0 && \rightarrow c_2 = -c_3 \end{aligned}$$

somit folgt:

$$Z^{(s)}(X) = c_3(X^2 - X)$$

Weiterhin ist die maximale relative Wölbung f und die Wölbungsrücklage $X_f = 0.5$ bekannt. Es folgt:

$$Z^{(s)}(X=0.5) = c_3(0.5^2 - 0.5) = -\frac{c_3}{4} = f$$

Somit folgt für die Funktion der Skelettlinie:

$$Z^{(s)}(X) = -4f(X^2 - X)$$

Mit Hilfe der gegebenen Gleichung:

$$-w_a(X) = -\frac{w(X)}{V_\infty} = \alpha - \frac{dZ}{dX}$$

folgt:

$$w_a(X) = -4f(2X - 1) - \alpha$$

- (b) Für den Druckbeiwert gilt: $c_p = 2\frac{p-p_\infty}{\rho U_\infty^2}$

Mit Hilfe der Bernoulligleichung lässt sich der Druckbeiwert zu

$$c_p = 1 - \left(\frac{U(X)}{U_\infty}\right)^2$$

umformen. Mit $U(X) = U_\infty + u(X)$ ergibt sich

$$c_p = 1 - \left(\frac{U_\infty + u(X)}{U_\infty}\right)^2 = 1 - \left(1 + 2\frac{u(X)}{U_\infty} + \left(\frac{u(X)}{U_\infty}\right)^2\right)$$

da $\frac{u(X)}{U_\infty} \ll 1$ und deswegen $\left(\frac{u(X)}{U_\infty}\right)^2 \ll \frac{u(X)}{U_\infty}$. Es folgt

$$\Rightarrow c_p \approx -2\frac{u(X)}{U_\infty} = \mp \frac{\gamma(X)}{U_\infty}$$

und mit der Anströmgeschwindigkeit $U_\infty = r\omega = r_0\omega$:

$$\Rightarrow c_p = \mp \frac{\gamma(X)}{r_0\omega}$$

Die unbekannte Zirkulationsverteilung $\gamma(X)$ lässt sich mit Hilfe der Hinweise bestimmen.

$$-w_a(\varphi) = -\frac{w}{V_\infty} = A_0 + \sum_{n=1}^N A_n \cdot \cos(n\varphi)$$

Dazu wird mit der Transformation $X = \frac{1}{2}(1 + \cos(\varphi))$ bzw. $2X - 1 = \cos(\varphi)$ die aus Aufgabenteil a bestimmte vertikale Störgeschwindigkeit transformiert. Es resultiert:

$$w_a(\varphi) = -4f \cos(\varphi) - \alpha$$

und somit gilt:

$$\alpha + 4f \cos(\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^N A_n \cdot \cos(n\varphi)$$

Und somit folgt für die unbekanntenen Koeffizienten: $A_0 = \alpha$, $A_1 = 4f$ und $A_n = 0$ für $n \geq 2$
Für die Zirkulationsverteilung gilt somit:

$$\gamma(\varphi) = 2U_\infty \left(\alpha \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) + 4f \sin(\varphi) \right)$$

und mit der Transformation $X = \frac{1}{2}(1 + \cos(\varphi))$ sowie:

$$\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-X}{X}} \quad \text{und} \quad \sin(\varphi) = 2\sqrt{X-X^2}$$

folg:

$$\gamma(X) = 2U_\infty \left(\alpha \sqrt{\frac{1-X}{X}} + 8f \sqrt{X-X^2} \right)$$

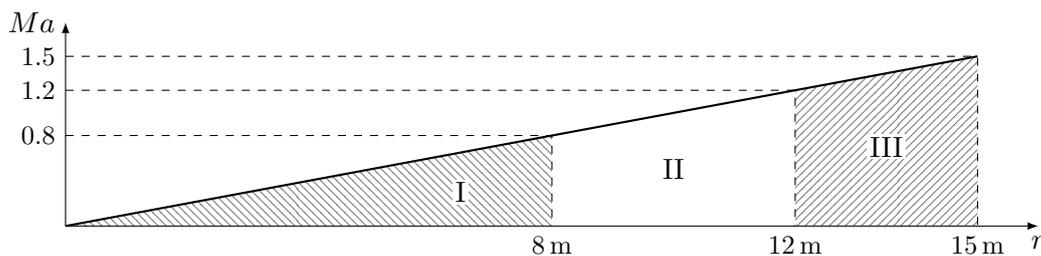
und somit

$$\Rightarrow c_{p,o/u} \approx \mp 2 \left(\alpha \sqrt{\frac{1-X}{X}} + 8f \sqrt{X-X^2} \right).$$

(c) Der Druckpunkt X_A ergibt sich aus der Betrachtung des Momentengleichgewichts um die Profilhase:

$$X_A c_l + c_{m,LE} = 0 \Rightarrow X_A = -\frac{c_{m,LE}}{c_l} = \frac{\frac{\pi}{4}(2A_0 + 2A_1 - A_2)}{\pi(2A_0 + A_1)} = \frac{\frac{\pi}{2}(\alpha + 4f)}{2\alpha\pi + 4\pi f} = \frac{\alpha + 4f}{4\alpha + 8f}$$

2. (a) Skizze:



I z.B. Prandtl-Glauert Regel, Referenzmachzahl $Ma_{ref} = Ma_{inkompressibel}$

II es existiert keine rigorose Formulierung für den transsonischen Bereich

III z.B. Prandtl-Glauert-Ackeret Regel für den Überschall, $Ma_{ref} = \sqrt{2}$

(b) Für $Ma_1 = 0.6$ ergibt sich der Auftriebsbeiwert aus der Prandtl-Glauert-Regel und dem Wert für den inkompressiblen Fall zu

$$c_l|_{Ma_1=0.6} = \frac{1}{\sqrt{1-Ma_1^2}} c_l|_{inkompressibel} = \frac{\pi}{\sqrt{1-0.6^2}} (2A_0 + A_1) = \frac{2\pi}{0.8} (\alpha + 2f)$$

Im Rahmen der linearisierten Potentialtheorie ist für den Auftriebsbeiwert bei $Ma_2 = 1.4$ nur die Anstellung der Profildicke relevant:

$$c_p|_{Ma_\infty > 1.2} = \pm \frac{2\beta}{\sqrt{Ma_\infty^2 - 1}} \Rightarrow \Delta c_p = \frac{4\alpha}{\sqrt{Ma_\infty^2 - 1}}$$
$$c_l|_{Ma_2=1.4} = \int_0^1 \Delta c_p dX = \frac{4\alpha}{\sqrt{Ma_2^2 - 1}} = \frac{4\alpha}{\sqrt{1.4^2 - 1}} = \frac{4\alpha}{\sqrt{0.96}}$$