

AERODYNAMISCHES INSTITUT
der Rheinisch - Westfälischen
Technischen Hochschule Aachen
Univ.-Prof. Dr.-Ing. W. Schröder

Klausur

Aerodynamik II

13. 02. 2019

M U S T E R L Ö S U N G
E I N S I C H T N A H M E

Hinweis:

Achten Sie darauf, ob Sie alle Aufgaben erhalten haben.

Klausur Aerodynamik II

Fragenteil, Skelett-Theorie, Überschallströmung

Integrale und Additionstheoreme

Additionstheoreme

- $\sin(x \pm y) = \sin(x) \cdot \cos(y) \pm \sin(y) \cdot \cos(x)$
- $\cos(x \pm y) = \cos(x) \cdot \cos(y) \mp \sin(x) \cdot \sin(y)$
- $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
- $\sin(2x) = 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$
- $\sin(x) = 2 \cdot \sin(x/2) \cdot \cos(x/2)$
- $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$
- $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$
- $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$
- $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$
- $\tan\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \sin(x) = 1 - \cos(x)$
- $\sin(x) \cdot \sin(nx) = -\frac{1}{2}(\cos[(n+1)x] - \cos[(n-1)x])$
- $\sin[(n+1)x] - \sin[(n-1)x] = 2 \cdot \cos(nx) \cdot \sin(x)$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(n\varphi_p) \cdot \sin(n\varphi) = \frac{1}{4} \ln\left(\frac{1 - \cos(\varphi_p + \varphi)}{1 - \cos(\varphi_p - \varphi)}\right)$

Integrale

- $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \cdot \ln(ax+b)$
- $\int \frac{x}{ax+b} dx = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2} \cdot \ln(ax+b)$
- $\int \frac{x^2}{X} dx = \frac{1}{a^3} \left[\frac{1}{2}(X) - 2b(X) + b^2 \ln(X) \right]$
mit $X = ax+b$
- $\int \sin(ax) dx = -\frac{\cos(ax)}{a}$
- $\int \cos(ax) dx = +\frac{\sin(ax)}{a}$
- $\int \sin^2(ax) dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4a} \sin(2ax)$
- $\int \cos^2(ax) dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4a} \sin(2ax)$
- $\int \sin^3(ax) dx = \frac{\cos^3(ax)}{3a} - \frac{\cos(ax)}{a}$
- $\int \cos^3(ax) dx = -\frac{\sin^3(ax)}{3a} + \frac{\sin(ax)}{a}$
- $\int \cos^4(ax) dx = \frac{3}{8}x + \frac{\sin(2ax)}{4a} + \frac{\sin(4ax)}{32a}$
- $\int \sin(ax) \cos(ax) dx = \frac{\sin^2(ax)}{2a}$
- $\int_0^{\pi} \cos(n \cdot \varphi) \cdot \cos(p \cdot \varphi) d\varphi = \begin{cases} \pi/2 & n = p \\ 0 & n \neq p \end{cases}$
- $\int_0^{\pi} \sin(n \cdot \varphi) \cdot \sin(p \cdot \varphi) d\varphi = \begin{cases} \pi/2 & n = p \\ 0 & n \neq p \end{cases}$
- Glauert-Integral
 $\int_0^{\pi} \frac{\cos(n \cdot \varphi')}{\cos(\varphi) - \cos(\varphi')} d\varphi' = -\pi \cdot \frac{\sin(n \cdot \varphi)}{\sin(\varphi)}$
- $\int \cos(ax) \cdot \cos(bx) dx = \frac{\sin[(a-b)x]}{2(a-b)} + \frac{\sin[(a+b)x]}{2(a+b)} \quad \forall |a| \neq |b|$

1. Aufgabe: Fragenteil (13 Punkte)

- Es wird im Folgenden ein symmetrisches Laminarprofil NACA 64(2)-015 betrachtet.
 - Zeichnen Sie für dieses Profil die Polare $c_a = f(c_w)$ bei der Auslegungsreynoldszahl von $Re_c = 2 \cdot 10^6$ im Falle einer inkompressiblen Anströmung. Nehmen Sie hierfür an, dass der Profilwiderstandsbeiwert beim Nullauftriebswinkel $c_{wp_0} = 0.005$ beträgt.
 - Erweitern Sie Ihr Diagramm aus 1(a) mit der Polare für die Reynoldszahl von $Re_c = 5 \cdot 10^6$ im Falle einer inkompressiblen Anströmung.
- Wie lautet die linearisierte Störpotentialgleichung im Unter- und im Überschall? Wie breiten sich die Störungen innerhalb von Überschall- bzw. Unterschallströmungen aus?
- Gegeben ist die reibungsfreie Strömung über eine Wellenoberfläche mit der Kontur $y = \epsilon \sin(\alpha x)$ bei zwei Machzahlen $M_{\infty,1} > 1$ und $M_{\infty,2} < 1$. Skizzieren Sie das Stromlinienbild über die Wellenoberfläche für diese beiden Machzahlen und erklären Sie stichpunktartig die Ursache für die Entstehung des Wellenwiderstandes. Ordnen Sie die folgenden Ausdrücke für den Druckbeiwert den beiden Machzahlen zu und begründen Sie Ihre Antwort:
 - $c_p = -\frac{2\epsilon\alpha}{\sqrt{|M_\infty^2 - 1|}} \sin(\alpha x)$
 - $c_p = -\frac{2\epsilon\alpha}{\sqrt{|M_\infty^2 - 1|}} \cos(\alpha x)$
- Um ein NACA 2412 Profil bildet sich bei $M_\infty = 0.4$, $\alpha = 5^\circ$ und $Re_l = 0.4 \cdot 10^6$ das in Abb. 1.1 dargestellte Strömungsfeld aus. Skizzieren Sie in den Lösungsblättern sorgfältig die zum dargestellten Strömungsfeld zu erwartende c_p Verteilung. Markieren Sie in Ihrer Skizze und benennen Sie stichwortartig die auf der Saugseite des Profils auftretenden herausragenden Merkmale, die auf Reibungseffekte zurückzuführen sind.

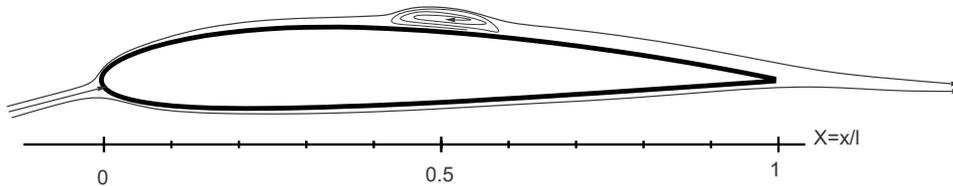


Abbildung 1.1: Strömungsfeld um ein NACA2412 Profils bei $M_\infty = 0.4$, $\alpha = 5^\circ$ und $Re_l = 0.4 \cdot 10^6$

Hinweis:

Falls nötig, übertragen Sie die Skizzen in Ihre Lösungsblätter und zeichnen Sie die Lösung dort ein!

2. Aufgabe: Skelett-Theorie (18 Punkte)

Es soll die Umströmung eines Tragflügelprofils mit Hilfe der Skelett-Theorie untersucht werden. Das Profil liegt in einer Parallelströmung mit der Anströmgeschwindigkeit U_∞ und dem Anstellwinkel α . Zur Trimmung besitzt das Tragflügelprofil ein Gelenk an der Stelle $X_g = 0.5$, durch das eine Drehung des hinteren Profilabschnitts $0.5 < X \leq 1.0$ um den Winkel η erzeugt werden kann. Die Skelettlinie ist durch die Gleichung

$$\begin{aligned} Z_I^s &= 0.1 (0.25 - (X - 0.5)^2), & \text{für } 0 \leq X < 0.5 \\ Z_{II}^s &= 0.1 (0.25 - (X - 0.5)^2) + \eta (X - 0.5), & \text{für } 0.5 \leq X \leq 1.0 \\ \text{mit } X &= \frac{x}{l}, & Z^s &= \frac{z^s}{l} \end{aligned}$$

gegeben.

1. Unter welchen Voraussetzungen ist die Skelett-Theorie gültig?
2. Ermitteln Sie die Koeffizienten A_i der ersten und zweiten Birnbaum-Ackermanschen Normalverteilungen in Abhängigkeit der gegebenen Größen und dem Winkel η .
3. Leiten Sie den allgemeinen Ausdruck für den Momentenbeiwert um die Profilhase $c_m = -\frac{\pi}{4}(2A_0 + 2A_1 + A_2)$ her.
Hinweis: Vernachlässigen Sie in Ihrem Ansatz alle Koeffizienten $A_i, i \geq 3$
4. Bestimmen Sie für das untersuchte Profil den Momentenbeiwert um die Profilhase c_m unter Berücksichtigung der Koeffizienten A_0 und A_1 . Wie muss der Neigungswinkel η gewählt werden, damit das Moment im Neutralpunkt $C_{m,0}$ verschwindet.
Hinweis: $c_a = \pi(2A_0 + A_1)$

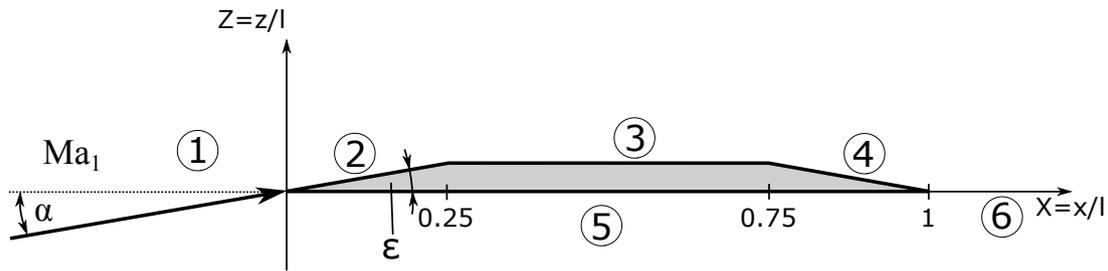
Gegeben: Anstellwinkel α , Anströmgeschwindigkeit U_∞ , Sehnenlänge l , Neutralpunktlage $X_N = 0.25$

Hinweise:

$$\begin{aligned} \gamma(\varphi) &= 2U_\infty \left(A_0 \tan \frac{\varphi}{2} + \sum_{n=1}^N A_n \sin(n\varphi) \right) \\ w_a(\varphi) &= \frac{w}{U_\infty} = -A_0 - \sum_{n=1}^N A_n \cos(n\varphi) \\ w_a &= \frac{\partial Z^s}{\partial X} - \alpha \\ \Delta c_p &= \frac{2\gamma(\varphi)}{U_\infty} \end{aligned}$$

3. Aufgabe: Überschallströmung (19 Punkte)

Es soll die supersonische Strömung um das dargestellte Profil mit gerader Unterseite untersucht werden.



1. Das Profil wird zunächst **ohne** Annahmen der linearisierten Potentialtheorie **mittels der allgemeinen gasdynamischen Beziehungen** untersucht. Der Anstellwinkel bezüglich der Profilschneide beträgt $\alpha = \alpha_1 = 10^\circ$. Die Machzahl der freien Anströmung ist $M_\infty = M_1 = 3.4$. Bitte beachten Sie die Hinweise für Teil 1.

- Skizzieren Sie sorgfältig das System aller evtl. auftretender Verdichtungsstöße, Expansionsfächer sowie Machschen Linien um das Profil. Gehen Sie davon aus, dass die Strömung an der Hinterkante unter einem Winkel von $\delta = 13^\circ$ gegenüber der x-Achse abströmt.
- Skizzieren Sie sorgfältig in einer Hodographenebene die einzelnen Zustandsänderungen für die Unterseite des Profils (1 \rightarrow 5 \rightarrow 6) und markieren Sie die entsprechenden Stromlinienänderungswinkel in Ihrer Skizze.
- Bestimmen Sie den Auftriebsbeiwert c_l mittels der allgemeinen gasdynamischen Beziehungen in Abhängigkeit der Druckverhältnisse $\frac{p_i}{p_1}$ ($i = 2, 3, 4, 5$). Bestimmen Sie die Druckverhältnisse $\frac{p_i}{p_1}$ für die Zustände **i=2,3,5** unter Verwendung der beigefügten Diagramme.

Gegeben für Teil 1: Machzahl der freien Anströmung $M_\infty = M_1 = 3.4$, Anstellwinkel $\alpha = \alpha_1 = 10^\circ$, Keilöffnungswinkel $\epsilon = 10^\circ$, Isentropenexponent $\gamma = 1.4$.

2. Das in (1) untersuchte Profil wird nun im Allgemeinen über einen breiten Bereich an Mach-Zahlen im Überschall bei kleinen Anstellwinkeln $\alpha \neq 0^\circ$ **mittels der linearisierten Potentialtheorie** untersucht. Bitte beachten Sie die Hinweise für Teil 2.

- Bestimmen Sie den Auftriebsbeiwert c_l des Profils in Abhängigkeit der für Teil 2 gegebenen Größen.
- Bestimmen Sie den Widerstandsbeiwert c_d des Profils in Abhängigkeit der für Teil 2 gegebenen Größen.

Gegeben für Teil 2: Machzahl der freien Anströmung M_∞ , Anstellwinkel α , Keilöffnungswinkel ϵ .

Hinweise:

α	$15^\circ \pm 2^\circ$	$20^\circ \pm 2^\circ$	$25^\circ \pm 2^\circ$	$30^\circ \pm 2^\circ$	$35^\circ \pm 2^\circ$
$\sin \alpha \approx$	0.25	0.35	0.4	0.5	0.55

$$c = \sqrt{\gamma RT} \quad , \quad p = \rho RT \quad , \quad c_{p,linTheorie} = \pm \frac{2\beta}{\sqrt{Ma^2 - 1}}$$

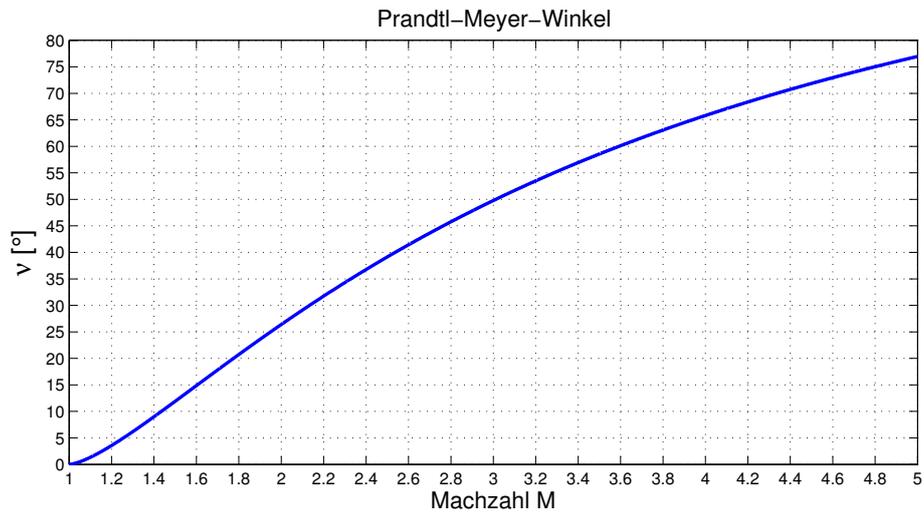


Abbildung 3.1: Prandtl-Meyer-Winkel ν über Machzahl M

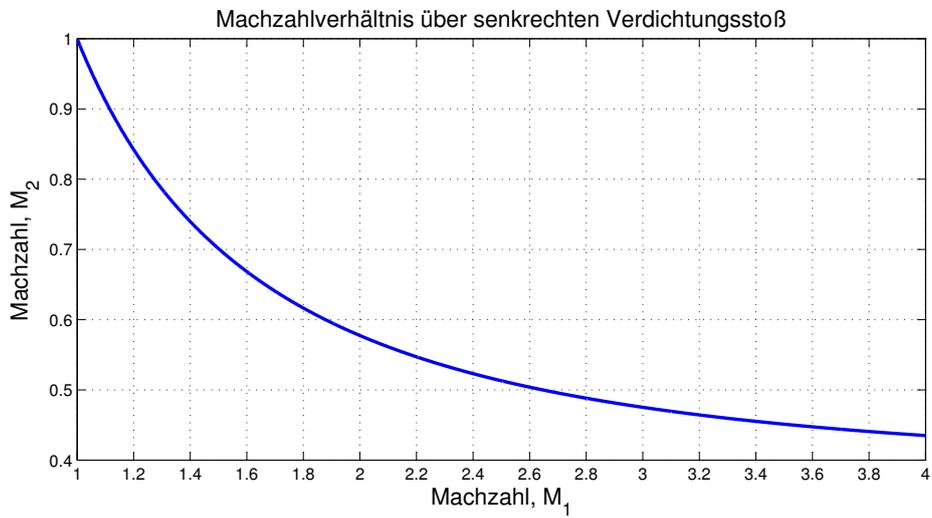


Abbildung 3.2: Machzahlverhältnis M_1 zu M_2 über einen senkrechten Verdichtungsstoß

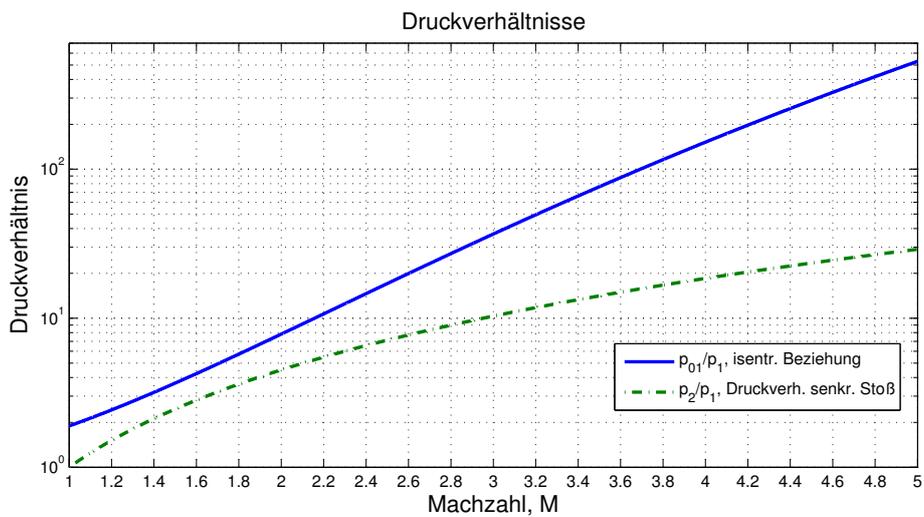


Abbildung 3.3: Druckverhältnisse über senkrechten Verdichtungsstoß und isentropes Druckverhältnis über der Machzahl M

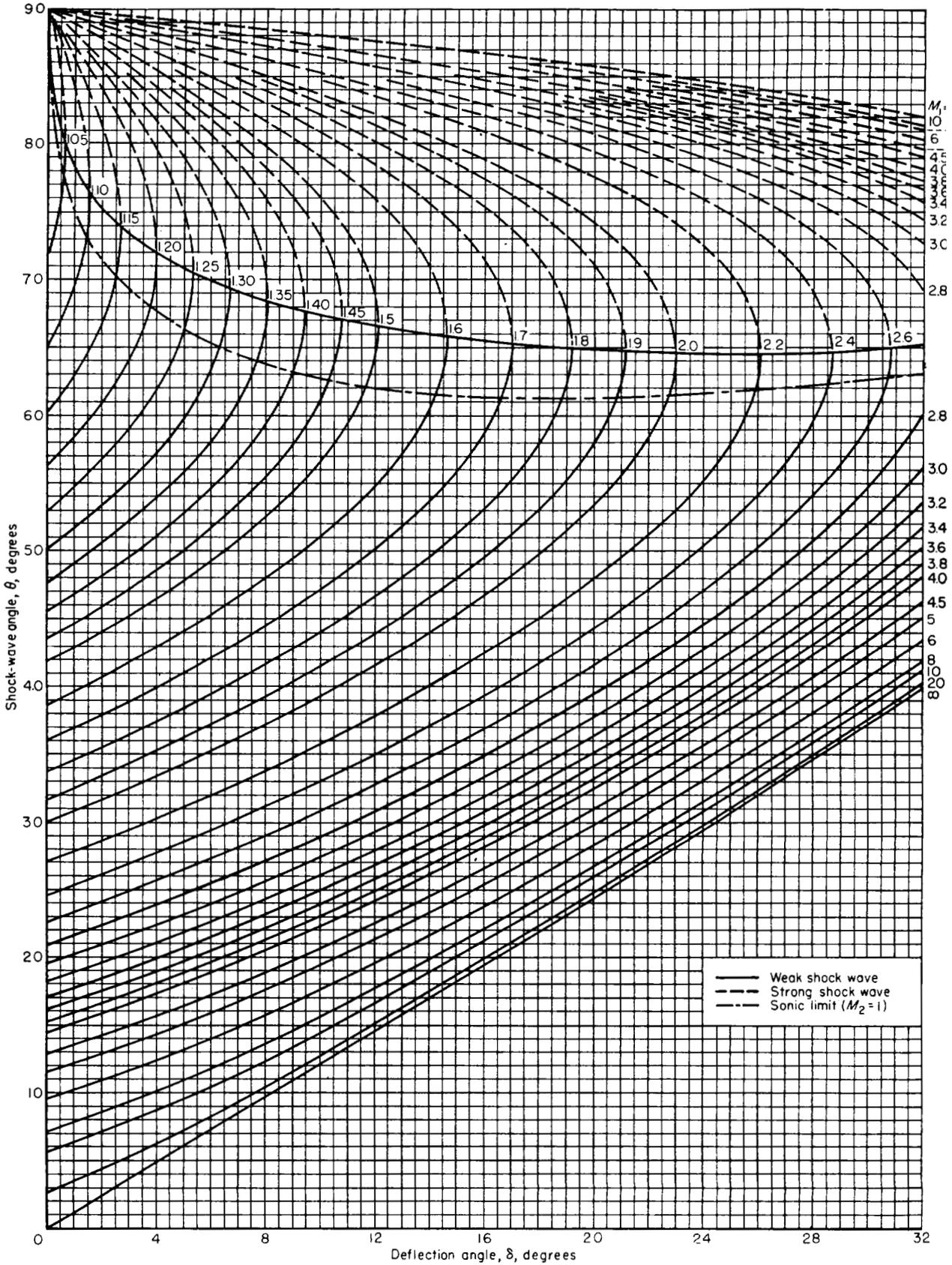
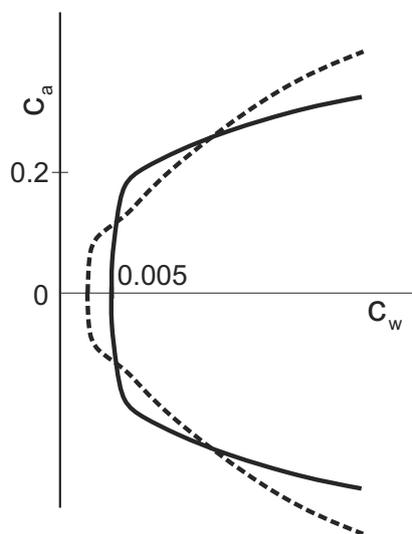


CHART 2.—Variation of shock-wave angle with flow-deflection angle for various upstream Mach numbers Perfect gas, $\gamma=7/5$.

Abbildung 3.4: Änderung des Stoßwinkels in Abhängigkeit vom Umlenkwinkel für verschiedene Anström-Machzahlen M_∞

Lösung 1. Aufgabe: Fragenteil (13 Punkte)(LÖSUNG)

- (a) Die Polare des NACA 64(2)-015 Profils bei der Design-Reynoldszahl von $Re_c = 2 \cdot 10^6$ weist folgende Merkmale auf (siehe die durchgezogene Linie in der Skizze):
 - symmetrisch um die c_w -Achse aufgrund der symmetrischen Profilform
 - Laminardelle bei $c_w = 0.005$ von der Ausdehnung $c_a = \pm 0.2$ (3. Kennziffer)
- (b) Eine höhere Reynoldszahl der Anströmung führt zur früheren Transition der Grenzschicht und als Folge zur Verringerung der Ausdehnung der Laminardelle und ihrer Verschiebung hin zu kleineren Werten von c_w (siehe gestrichelte Linie in der Skizze).



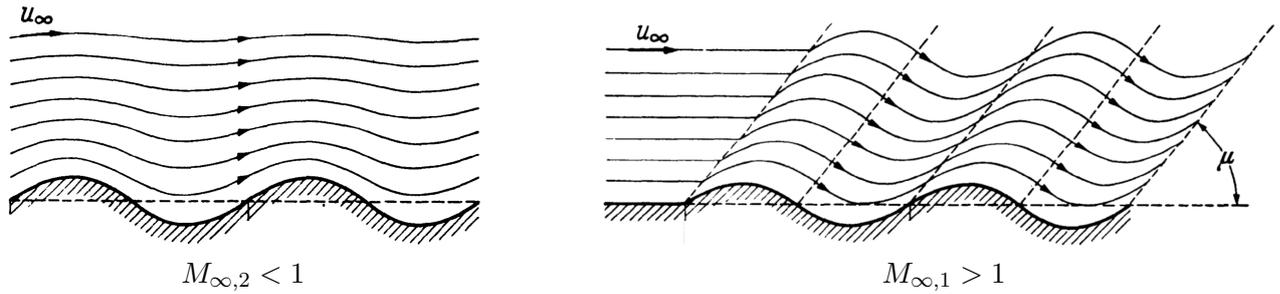
- Potentialgleichung im Unter- und im Überschall:

Unterschall: $(1 - M_\infty^2)\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0$ elliptische DGL (analog: Laplace-Gleichung)

Überschall: $(M_\infty^2 - 1)\varphi_{xx} - \varphi_{yy} = 0$ hyperbolische DGL (analog: Wellengleichung)

Da im Unterschall die Störpotentialgleichung eine elliptische DGL ist, breiten sich die Informationen bzw. Störungen in alle Raumrichtungen aus. Im Überschall liegt eine hyperbolische DGL vor. Dadurch ergibt sich eine Informationsausbreitung innerhalb des Mach'schen Kegels mit einem Halböffnungswinkel $\eta = \arcsin\left(\frac{1}{M_\infty}\right)$, der in Strömungsrichtung liegt.

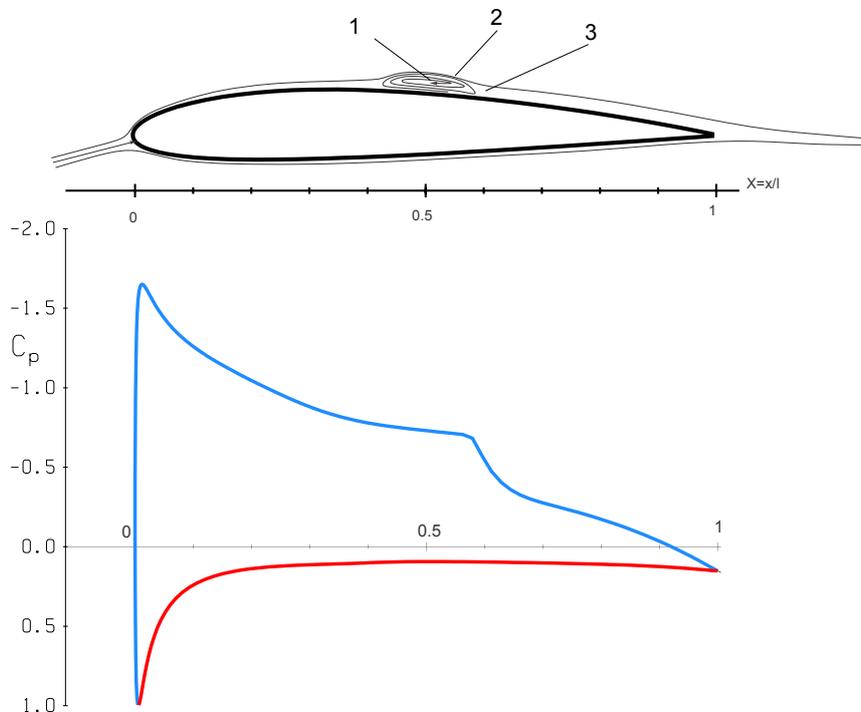
3. Strömungsverhältnisse über der Wellenoberfläche.



Wegen der Vorzeichenumkehr in der linearisierten Potentialgleichung $(1 - M_\infty^2)\varphi_{xx} + \varphi_{yy}$ im Überschall durch den Term $(1 - M_\infty^2)$ wird diese zur Wellengleichung. Die Strömungsinformationen breiten sich nun nur stromab entlang der Charakteristiken aus. Die Druckänderungen erfolgen nur aufgrund lokaler Änderungen der Oberfläche (Prandtl-Meyer: positive Krümmung \rightarrow Kompression, negative Krümmung \rightarrow Expansion, oder Formel $c_p = \frac{2 \frac{dy}{dx}}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}$). Die sich daraus ergebende Druckverteilung auf der Wellenoberfläche $c_p \approx \cos(x)$ ist phasenverschoben zum Oberflächenverlauf. Dies ergibt eine finite resultierende Kraft von der Strömung auf die Oberfläche in axialer Richtung, die als Wellenwiderstand bezeichnet wird.

Die Machzahl $M_{\infty,2}$ gehört zum c_p Ausdruck a), da für diesen Fall die Wellenoberfläche und der Druckbeiwert ohne Phasenverschiebung zueinander laufen. Die Machzahl $M_{\infty,1}$ gehört zum c_p Ausdruck b), da für diesen Fall die Wellenoberfläche und der Druckbeiwert mit Phasenverschiebung zueinander laufen.

4. (a) 1. Ablösung der laminaren Grenzschicht.
 2. Umschlag der Strömung an der Ablöseblase.
 3. Wiederanliegen der turbulenten Grenzschicht.



Lösung 2. Aufgabe: (LÖSUNG) Skelett-Theorie (18 Punkte)

1. Voraussetzungen Skelett-Theorie:

1. • Potentialtheorie:
 - reibungsfrei
 - inkompressibel
 - stationär
 - drehungsfrei
- kleine Störungen:
 - dünne Profile
 - kleine Wölbung
 - kleine Anstellwinkel

2. Koordinatentransformation:

$$X = \frac{1}{2}(1 + \cos \varphi) \quad dX = -\frac{1}{2} \sin \varphi d\varphi$$

Bestimmung von A_n durch Einsetzen der Koordinatentransformation und $w_a(\varphi)$ in die kinematische Strömungsbedingung, Multiplikation mit $\cos(p\varphi)$ und Integration:

$$\int_0^\pi \left[-A_0 - \sum_{n=1}^N A_n \cos(n\varphi) + \alpha \right] \cos(p\varphi) d\varphi = \int_0^\pi \frac{dZ^s}{dX} \cos(p\varphi) d\varphi$$

für $p = 0$:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_0^\pi (-A_0 + \alpha) d\varphi &= \int_0^\pi \frac{dZ^s}{dX} d\varphi \\ \Leftrightarrow A_0 &= \alpha - \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dZ_{II}^s}{dX} d\varphi + \int_{\frac{1}{2}\pi}^\pi \frac{dZ_I^s}{dX} d\varphi \right] \end{aligned}$$

Ableitung der Skelettlinie dZ^s/dX :

$$\begin{aligned} \frac{dZ_I^s}{dX} &= -0.1(2x-1) \rightarrow \frac{dZ_I^s}{dX} = -0.1 \cos(\varphi) \\ \frac{dZ_{II}^s}{dX} &= -0.1(2x-1) + \eta \rightarrow \frac{dZ_{II}^s}{dX} = -0.1 \cos(\varphi) + \eta \end{aligned}$$

Einsetzen in A_0 und der korrespondierenden Transformation:

$$\begin{aligned} \Rightarrow A_0 &= \alpha - \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (-0.1 \cos \varphi + \eta) d\varphi + \int_{\frac{1}{2}\pi}^\pi -0.1 \cos \varphi d\varphi \right] \\ A_0 &= \alpha - \frac{1}{\pi} \left[-0.1 + \frac{1}{2}\pi\eta + 0.1 \right] = \alpha - \frac{\eta}{2} \end{aligned}$$

für $p = n = 1$:

$$\int_0^\pi \cos(n\varphi) \cdot \cos(p\varphi) d\varphi = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{für } n = p \\ 0 & \text{für } n \neq p \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow A_1 &= -\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{dZ^s}{dX} \cos \varphi d\varphi \\
&= -\frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (-0.1 \cos \varphi + \eta) \cos \varphi d\varphi + \int_{\frac{1}{2}\pi}^\pi (-0.1 \cos \varphi) \cos \varphi d\varphi \right) \\
&= -\frac{2}{\pi} \left(\left[-0.1 \frac{1}{2} \left(\varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) + \eta \sin \varphi \right]_0^{\frac{1}{2}\pi} + \left[-0.1 \frac{1}{2} \left(\varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) \right]_{\frac{1}{2}\pi}^\pi \right) \\
&= -\frac{2}{\pi} \left(-0.1 \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} + \eta - 0.1 \frac{1}{2} \pi + 0.1 \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} \right) \\
&= -\frac{2\eta}{\pi} + 0.1
\end{aligned}$$

3. Für den Momentenbeiwert gilt.

$$c_m = - \int_0^1 \Delta c_p(X) X dX$$

mit der Transformation $X = \frac{1}{2}(1 + \cos(\varphi))$ bzw. $\frac{dX}{d\varphi} = -\frac{\sin(\varphi)}{2}$ folgt.

$$\begin{aligned}
c_m &= -\frac{1}{4} \int_0^\pi \Delta c_p(\varphi) (1 + \cos(\varphi)) \sin(\varphi) d\varphi \quad \text{und mit dem Hinweis} \\
&= -\frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{\gamma(\varphi)}{U_\infty} (1 + \cos(\varphi)) \sin(\varphi) d\varphi \\
&= - \int_0^\pi \left[\underbrace{A_0 \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin(\varphi)}_{(1-\cos(\varphi))} (1 + \cos(\varphi)) + A_1 (1 + \cos(\varphi)) \sin^2(\varphi) \right. \\
&\quad \left. + A_2 (1 + \cos(\varphi)) \underbrace{\frac{\sin(\varphi) \sin(2\varphi)}{-\frac{1}{2}(\cos(3\varphi) - \cos(\varphi))}} \right] d\varphi \\
&= - \int_0^\pi \left[A_0 \underbrace{(1 - \cos^2(\varphi))}_{\sin^2(\varphi)} + \frac{A_1}{2} (1 + \cos(\varphi))(1 - \cos(2\varphi)) \right. \\
&\quad \left. + \frac{A_2}{2} \left(-\cos(3\varphi) + \cos(\varphi) - \cos(\varphi) \cos(3\varphi) + \cos^2(\varphi) \right) \right] d\varphi \\
&= - \int_0^\pi \left[A_0 \underbrace{\sin^2(\varphi)}_{\frac{\pi}{2}} + \frac{A_1}{2} \left(\underbrace{1}_{\pi} \overset{0}{-\cos(2\varphi)} + \overset{0}{\cos(\varphi)} - \overset{0}{\cos(\varphi) \cos(2\varphi)} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{A_2}{2} \left(\overset{0}{-\cos(3\varphi)} + \overset{0}{\cos(\varphi)} - \overset{0}{\cos(\varphi) \cos(3\varphi)} + \underbrace{\cos^2(\varphi)}_{\frac{\pi}{2}} \right) \right] d\varphi \\
&= -\frac{\pi}{4} (2A_0 + 2A_1 + A_2)
\end{aligned}$$

4. Unter Berücksichtigung der ersten beiden Birnbaum-Ackermannschen Koeffizienten, $A_0 = \alpha - \frac{\eta}{2}$ und $A_1 = -\frac{2\eta}{\pi} + 0.1$ folgt für den Momentenbeiwert.

$$c_m = -\frac{\pi}{2} (A_0 + A_1) = -\frac{\pi}{2} \left(\alpha - \eta \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \right) + 0.1 \right)$$

Aus den Hinweisen $c_a = 2\pi(A_0 + \frac{A_1}{2})$ folgt:

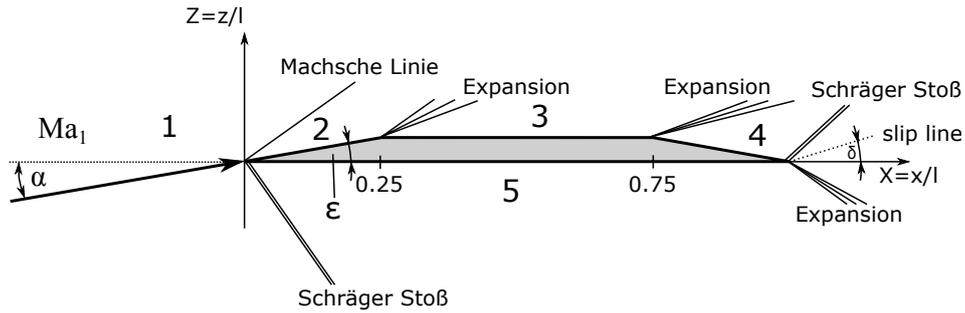
$$c_a = \pi(2A_0 + A_1)$$
$$c_a = 2\pi \left(\alpha - \eta \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \right) + 0.05 \right)$$

Mit der Lage des Neutralpunkts im Rahmen der Skeletttheorie $X_N = \frac{1}{4}$ folgt für den Nullmomentenbeiwert:

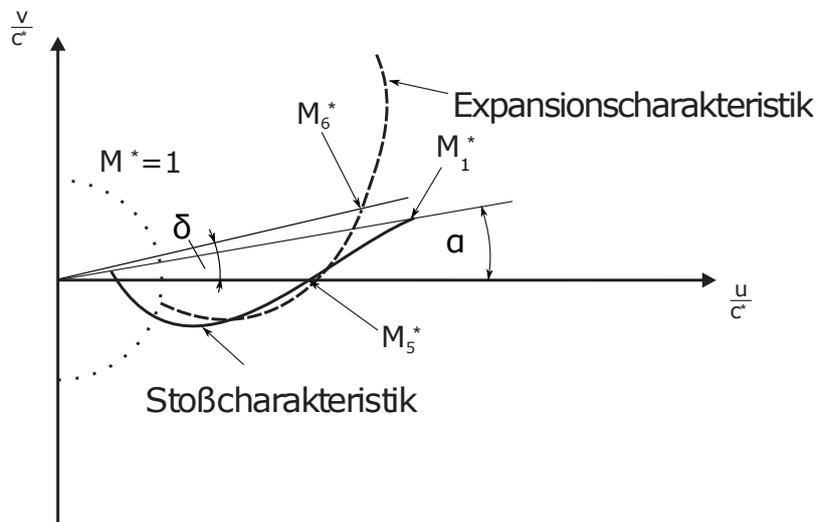
$$c_{m0} = c_{m, \frac{1}{4}} = c_{m_{LE}} + X_N c_l = -\frac{\pi}{2} \left(\alpha - \eta \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \right) + 0.1 \right) + \frac{\pi}{2} \left(\alpha - \eta \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \right) + 0.05 \right) \stackrel{!}{=} 0$$
$$\rightarrow \eta \left(\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \right) \right) = 0.05$$
$$\eta = 0.05\pi$$

Lösung 3. Aufgabe: (LÖSUNG) Kompressible Strömung (19 Punkte)

1. (a) System der Verdichtungsstöße, Expansionsfächer sowie Machschen Linien.



- (b) Zustandsänderungen für die Unterseite des Profils (1 → 5 → 6)



- (c) Mit der idealen Gasgleichung $p_1 = \rho_1 RT_1$ sowie der Beziehung für die Schallgeschwindigkeit $c_1 = \sqrt{\gamma RT_1}$ ergibt sich für den Auftriebsbeiwert:

$$\begin{aligned}
 c_l &= \frac{L}{\rho_\infty / 2 v_\infty^2 l} = \frac{L}{\rho_1 / 2 v_1^2 l} = \frac{L}{\rho_1 / 2 (M_1 \sqrt{\gamma RT_1})^2 l}, \quad \text{mit } v_1 = M_1 \sqrt{\gamma RT_1} \\
 &= \frac{2L}{\rho_1 M_1^2 \gamma \underbrace{RT_1}_{p_1 / \rho_1} l} = \frac{2L}{\gamma M_1^2 p_1 l}
 \end{aligned}$$

Die Auftriebskraft ergibt sich aus den resultierenden Kräften senkrecht und parallel zum Keil wie folgt.

$$L = R_\perp \cos(\alpha) - R_\parallel \sin(\alpha)$$

$$R_\perp = \left(p_5 - \frac{p_2}{4} - \frac{p_3}{2} - \frac{p_4}{4} \right) l$$

$$R_\parallel = (p_2 - p_4) \frac{l}{4} \tan(\epsilon)$$

$$\Rightarrow L = \left(p_5 - \frac{p_2}{4} - \frac{p_3}{2} - \frac{p_4}{4} \right) l \cos(\alpha) - (p_2 - p_4) \frac{l}{4} \underbrace{\tan(\epsilon) \sin(\alpha)}_{\text{Von höherer Ordnung, Vernachlässigbar klein}}$$

$$c_l = \frac{1}{\gamma M_1^2} \left(2 \frac{p_5}{p_1} - 0.5 \frac{p_2}{p_1} - \frac{p_3}{p_1} - 0.5 \frac{p_4}{p_1} \right)$$

Bestimmung der gesuchten Druckverhältnisse.

Zustandsänderungen für die Oberseite:

$\frac{p_2}{p_1}$?

Zustand 1 und 2 sind identisch, da keine Umlenkung stattfindet ($\alpha = \epsilon$)

$\rightarrow p_2/p_1 = 1$ und $Ma_2 = Ma_1 = 3.4$

$\frac{p_3}{p_1}$?

Expansion von 2 nach 3 $\Rightarrow \nu_3 = \nu_2 + \epsilon$

$$M_2 = 3.4 \quad (\text{Abb. 3.1}) \Rightarrow \nu_2 = 57^\circ \Rightarrow \nu_3 = 57^\circ + 10^\circ = 67^\circ \quad (\text{Abb. 3.1}) \Rightarrow M_3 \approx 4$$

Für das zweite gesuchte Druckverhältnis folgt:

$$\frac{p_3}{p_1} = \frac{p_3}{p_{03}} \cdot \frac{p_{02}}{p_2} \cdot \frac{p_2}{p_1}$$

$$(\text{Abb. 3.3}) \Rightarrow \frac{p_3}{p_{03}} (M_3 = 4) \approx \frac{1}{150} \cdot \frac{p_{02}}{p_2} (M_2 = 3.4) \approx 67.5$$

$$\frac{p_3}{p_1} = \frac{1}{150} \cdot 67.5 \cdot 1 = 0.45$$

Zustandsänderungen für die Unterseite:

Kompression von 1 nach 5 $\Rightarrow \delta_{1,5} = \alpha = 10^\circ$

$$M_1 = 3.4 \quad (\text{Abb. 3.4}) \Rightarrow \theta_{1,5} \approx 25^\circ$$

$$M_{1n} = 3.4 \cdot \sin 25^\circ \approx (\text{Tabelle aus dem Hinweis}) 3.4 \cdot 0.4 = 1.36$$

Für das gesuchte Druckverhältnis $\frac{p_5}{p_1}$ folgt:

$$(\text{Abb. 3.3}) \Rightarrow \frac{p_5}{p_1} (M_{1n} = 1,36) \approx 2$$

2. (a) Im Rahmen der linearisierten Potentialtheorie lässt sich die Strömung um das gewölbte Keilprofil durch Superposition der Strömungen um seine Sehne, Skelettlinie sowie Dickenverteilung beschreiben.

Für den Auftrieb ist nur der Anstellwinkel der Sehne α relevant. Somit ergibt sich mit dem Hinweis $c_{p,linTheorie} = \pm \frac{2\beta}{\sqrt{Ma^2-1}}$ und α als Anstellwinkel der Sehne bezogen auf die Hauptströmungsrichtung für den Auftriebsbeiwert

$$c_l = \int_0^1 \Delta c_p dX = \frac{4\alpha}{\sqrt{Ma_1^2 - 1}}$$

- (b) Der Widerstandsbeiwert ergibt sich unter Berücksichtigung jeweiliger Änderungswinkel β_i der Strömung und des Hinweises $c_{p,linTheorie} = \pm \frac{2\beta}{\sqrt{Ma^2-1}}$ aus der Summe des Auftriebsanteils, Wölbungsanteils und des Dickenanteils zu

$$c_d = \frac{4}{\sqrt{Ma_\infty^2 - 1}} \left(\underbrace{\alpha^2}_{\text{Auftriebsanteil}} + \underbrace{\int_0^1 \left(\frac{dZ}{dX} \right)^2 dX}_{\text{Wölbungsanteil}} + \underbrace{\int_0^1 \left(\frac{dh}{dX} \right)^2 dX}_{\text{Dickenanteil}} \right)$$

Für das vorliegende Keilprofil resultiert daraus.

$$c_d = \frac{4}{\sqrt{Ma_1^2 - 1}} [\alpha^2 + 0.5(\epsilon/2)^2 + 0.5(\epsilon/2)^2] = \frac{4\alpha^2 + \epsilon^2}{\sqrt{Ma_1^2 - 1}}$$

