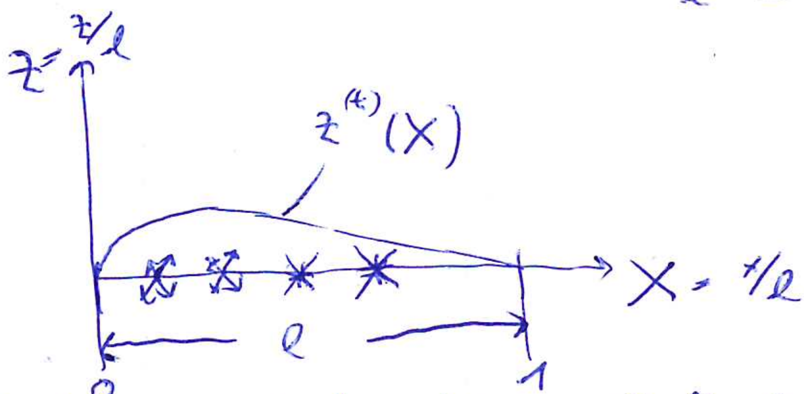
Singularitätenverfahren

Tropfentheorie
(Dickenproblem)

Skeletttheorie
(Auftriebsproblem)

Ziel: $z^{(t)}(x) \rightarrow q(x)$

Annahmen:
- pot Theorie (reibungsfrei + rotationsfrei)
- symmetrische Profile 
- Anströmung ist ∥ zur Sehne
- Profil dünn $\left(\frac{d_{max}}{l} \leq 0.2\right)$

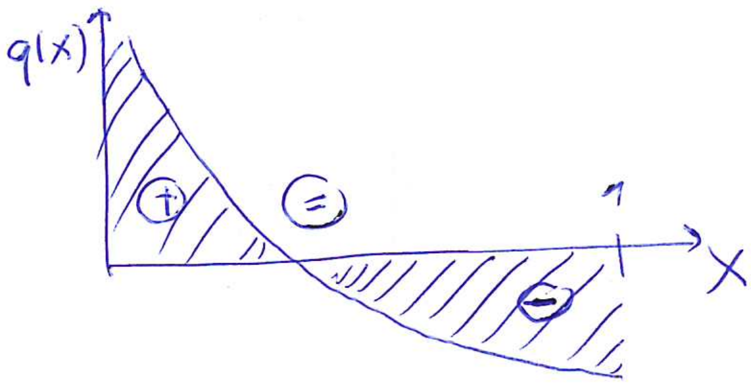


Quellenergiebigkeit pro Länge = Quellendichte = $q(X)$

Schließbed. für eine geschlossene Kontur:

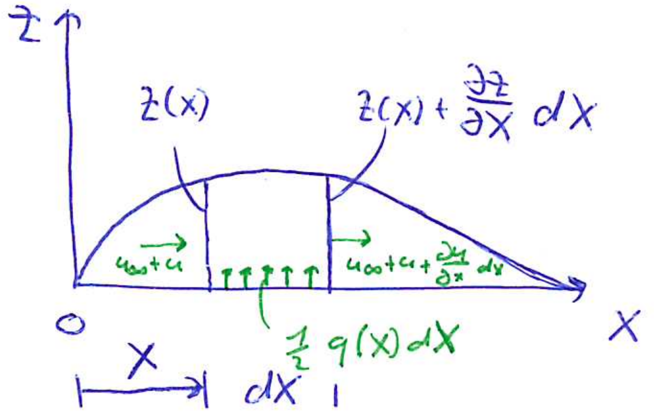
$$\boxed{\int_0^1 q(x)\, dX = 0}$$

$|\Sigma \text{ Quellen}| = |\Sigma \text{ Senken}|$



Herleitung d. Zusammenhangs zw. $\underline{z^{(t)}(X)}$ u. $\underline{q(X)}$

1. Methode: (Konti)



Konti: $(u_\infty + u)\, z + \frac{1}{2}\, q(x)\, dX =$

$$(u_\infty + u + \frac{\partial u}{\partial x} dX)(z + \frac{\partial z}{\partial x} dX)$$

$$\frac{1}{2}\, q(x) dX = (u_\infty + u)\frac{\partial z}{\partial X} dX + \frac{\partial u}{\partial x} dX\, z + \mathcal{O}(2)$$

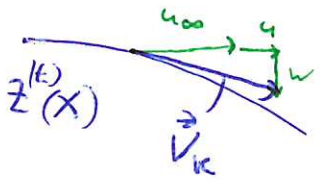
$$\boxed{\frac{1}{2}\, q(x) = \frac{\partial}{\partial X}\left((u_\infty + u)\, z\right)}$$ mit $u_\infty \gg u$

$$\frac{1}{2} q(X) = \frac{\partial}{\partial X}(u_\infty z)$$

$$q(x) = 2 u_\infty \frac{\partial z}{\partial X}$$

---

2 Methode (Stromlinie)



$$\frac{dz^{(t)}}{dX} = \frac{w}{u_\infty + u}$$ ⇒ dünne Profile (nicht im Staupunkt)

↳ $\frac{dz^{(t)}}{dX} \approx \frac{w}{u_\infty}$

$$w_{Sehne} = \frac{q(x)}{2} \Rightarrow \frac{dz^{(t)}}{dX} = \frac{q(X)}{2u_\infty}$$

$$q(X) = 2u_\infty \cdot \frac{dz^{(t)}}{dX}$$

$$V_K = \sqrt{(u_\infty + u)^2 + w^2}$$

↳ dünne Profile $(w \ll u_\infty + u)$

(nicht gültig an Vorderkante → $V_K^{(0)} = 0$

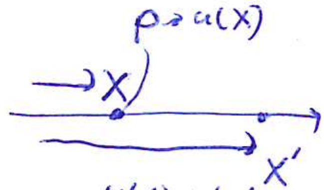
↳ $u(0) = -u_\infty$

$$V_K = \frac{1}{k}(u_\infty + u)$$

↑ Korrekturfaktor nach Riegels für vorne stumpfe Körper

$$k = \sqrt{1 + \left(\frac{dZ}{dX}\right)^2} \qquad \left[\text{Nase: } \frac{dZ}{dX} = \infty \rightarrow k = \infty \rightarrow V_K = 0\right]$$

$$u(X) = \frac{1}{2\pi}\int_0^1 \frac{q(X')\,dX'}{X - X'} = \frac{u_\infty}{\pi}\int_0^1 \frac{dZ}{dX'}\frac{dX'}{(X - X')}$$



$u(X)$ ist die an der Stelle X induzierte Geschw.

$$↳ \quad \frac{V_K}{u_\infty} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dZ}{dX}\right)^2}}\left(1 + \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{dZ^{(t)}}{dX'}\frac{dX'}{(X - X')}\right)$$

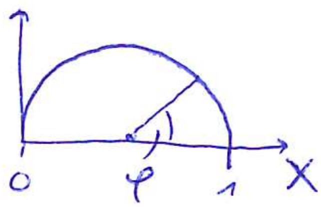
$\boxed{A1}$ (Tropfentheorie)

1. ges.: $Z^{(t)}(\varphi)$

$$X = \frac{1}{2}(1 + \cos\varphi)$$

Nase: $X = 0 \triangleq \varphi = \pi$

Hinterkante: $X = 1 \triangleq \varphi = 0$



$$Z(X) = 4\sqrt{X - X^2}\,(2 - 3X)$$

$$Z(\varphi) = 4\sqrt{\tfrac{1}{2}(\cos\varphi + 1) - \tfrac{1}{4}(\cos\varphi + 1)^2}\,\left(2 - \tfrac{3}{2}(\cos\varphi + 1)\right)$$

$$= 4\sqrt{\tfrac{1}{2}\cancel{\cos\varphi} + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}(\cos^2\varphi + 2\cancel{\cos\varphi} + 1)}\,\left(2 - \tfrac{3}{2}(\cos\varphi + 1)\right)$$

$$= 4\sqrt{\tfrac{1}{4}\underbrace{(1 - \cos^2\varphi)}_{\sin^2\varphi}}\,\left(2 - \tfrac{3}{2}(\cos\varphi + 1)\right)$$

$$= 2\sin\varphi\,\left(2 - \tfrac{3}{2}(\cos\varphi + 1)\right)$$

$$\boxed{Z(\varphi) = \sin\varphi\,(1 - 3\cos\varphi)}$$

2) $z(\varphi) = \sin\varphi - 3\sin\varphi\cos\varphi$
$= \sin\varphi - \frac{3}{2}\sin 2\varphi$

Fourier Reihe nach Riegels:

$$z(\varphi) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} b_n \sin(n\varphi) = \frac{1}{2}(b_1\sin\varphi + b_2\sin 2\varphi + b_3\sin 3\varphi \ldots)$$

oeffizientenvergleich:

$$\boxed{b_1 = 2;\quad b_2 = -3} \qquad b_n = 0 \;,\; \forall n \geq 3$$

3) ges. $k(\varphi) \Rightarrow x = \frac{1}{2}(1 + \cos\varphi)$

$$dx = -\frac{1}{2}\sin\varphi\, d\varphi$$

$$k(\varphi) = \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dx}\right)^2}$$

$$= \sqrt{1 + \left(-\frac{2}{\sin\varphi}\frac{dz}{d\varphi}\right)^2}$$

$$\frac{dz}{d\varphi} = \left(\sin\varphi - \frac{3}{2}\sin 2\varphi\right)' = \cos\varphi - 3\cos 2\varphi$$

$$k(\varphi) = \sqrt{1 + \left(\frac{6\cos 2\varphi - 2\cos\varphi}{\sin\varphi}\right)^2}$$