

Die Gasdynamik beschreibt kompressible Strömungen, d.h. Strömungen mit Dichteänderungen:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0; \frac{\partial \rho}{\partial x} \neq 0; \text{etc.}$$

Als Unterscheidungskriterium zwischen inkompressibel und kompressibel wird die Machzahl herangezogen:

$$M = \frac{u}{c} = \frac{\text{Strömungsgeschwindigkeit}}{\text{lokale Schallgeschwindigkeit}}$$

Strömungen kompressibler Fluide im unteren Machzahlbereich ($M < 0.3$) werden als inkompressibel betrachtet, darüber sind Dichteänderungen zu berücksichtigen!

Die Schallgeschwindigkeit ist die Geschwindigkeit, mit der sich kleine Störungen (Druckänderungen, z.B. Schall) ausbreiten.

Für ein ideales Gas gilt:

$$c = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}} = \sqrt{\gamma RT}$$

Ist die Strömungsgeschwindigkeit größer als die Schallgeschwindigkeit ($M > 1$), dann können sich Störungen nicht mehr stromauf ausbreiten, sondern sind durch den Mach'schen Kegel eingeschränkt. Der beträgt:

$$\alpha = \arcsin \frac{1}{M}$$

Aus der Energiegleichung

$$h_0 = h + \frac{u^2}{2} \Rightarrow c_p T_0 = c_p T + \frac{u^2}{2}$$

erhält man

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} \Rightarrow c_p - c_v = R$$
$$\Rightarrow c_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}, \quad c_v = \frac{R}{\gamma - 1}.$$

Für ideale Gase gilt die Beziehung

$$\frac{T}{T_0} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{-1} = f(M).$$

Für isentrope Zustandsänderungen lassen sich die Isentropenbeziehungen

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$
$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

bestimmen. D.h. für isentrope Strömungen sind p , ρ und T lediglich Funktionen der Machzahl und des Ruhezustandes.

Neben dem Ruhezustand läßt sich der Schallzustand (oder auch kritische Zustand) als Bezug verwenden. Für diesen gilt:

$$u = c \quad \Rightarrow \quad M = 1$$

$$T^* = T(\text{Ma} = 1)$$

$$p^* = p(\text{Ma} = 1)$$

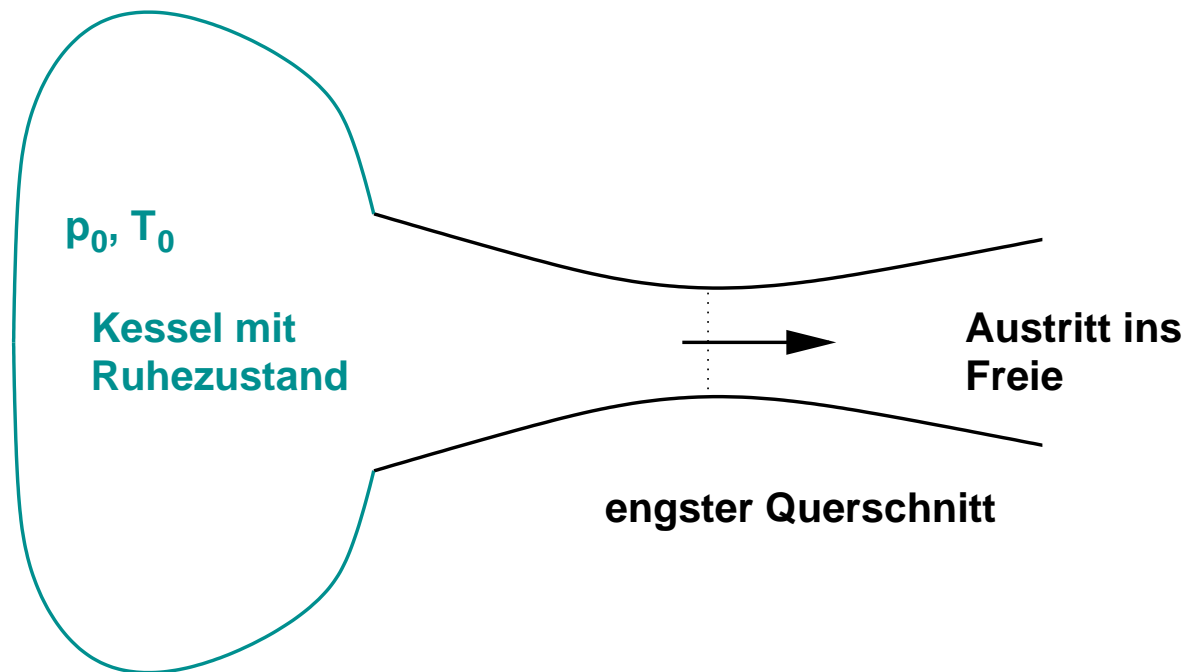
$$\rho^* = \rho(\text{Ma} = 1)$$

Die zugehörigen Größen werden mit einem * gekennzeichnet. Der Zusammenhang zwischen Ruhe- und kritischen Zustand ist nur vom Isentropenexponenten γ abhängig:

$$\Rightarrow \frac{T_0}{T^*} = 1 + \frac{1}{2}(\gamma - 1) = \frac{\gamma + 1}{2}$$

isentrop: $\rightarrow \frac{p_0}{p^*} = \left(\frac{\rho_0}{\rho^*}\right)^\gamma = \left(\frac{\gamma + 1}{2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$

$$\Rightarrow \frac{p^*}{p_0} = 0.528$$



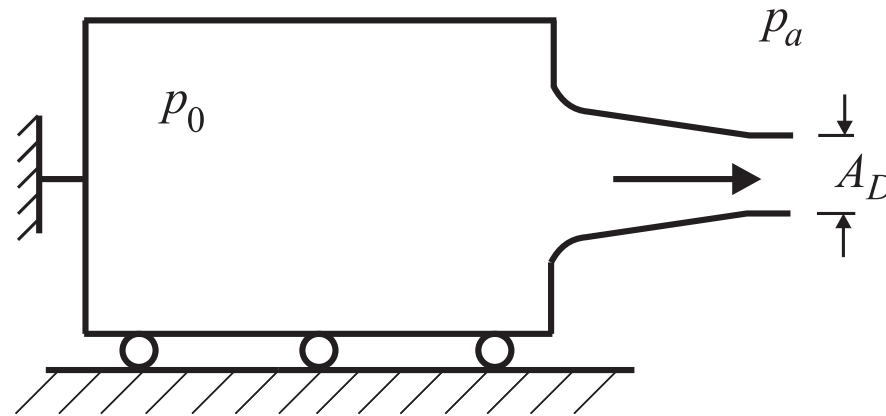
Flächen-Geschwindigkeitsbeziehung:

$$\frac{du}{u} = - \frac{1}{1 - \text{Ma}^2} \frac{dA}{A} \quad \text{mit } \text{Ma} = 1 \quad \Rightarrow \quad dA = 0$$

→ $\text{Ma} = 1$ kann nur im engsten Querschnitt auftreten

19.3

Aus einem großen, reibungsfrei gelagerten Behälter strömt Luft ($\gamma = 1.4$) isentrop durch eine gerundete Düse ins Freie.



a) Bestimmen Sie den dimensionslosen Schub $F_s/p_0 A_D$ für die Druckverhältnisse

$$p_a/p_0 = 1; 0.6; 0.2; 0 !$$

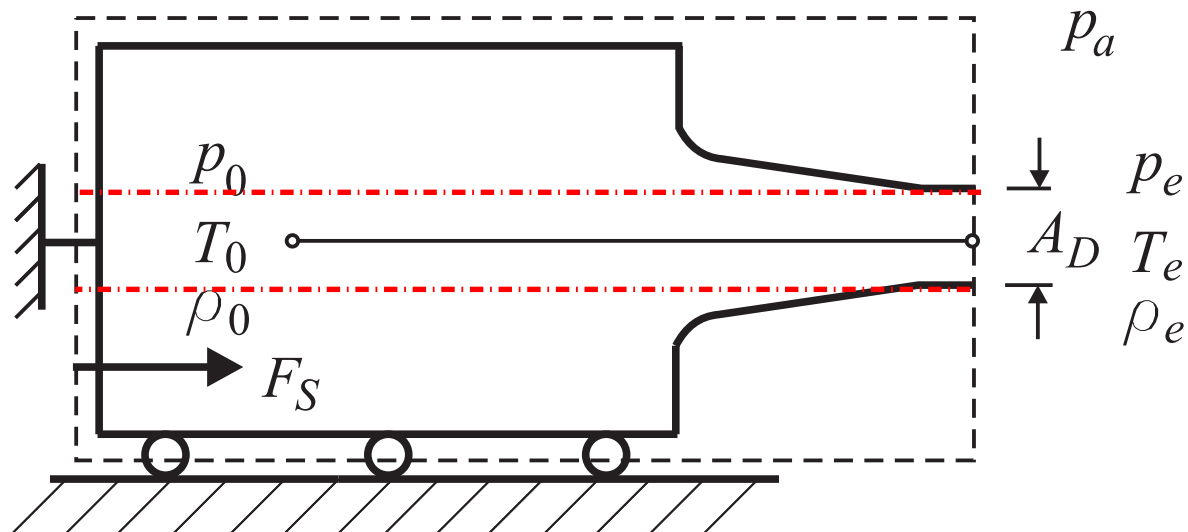
b) Wie groß sind die entsprechenden Werte einer inkompressiblen Flüssigkeit?

19.3

a) Ausströmen aus großem Behälter (ideales Gas)

Kräfte aus Impulssatz

$$\frac{d\vec{I}}{dt} = \int_{\tau} \frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{v}) d\tau + \int_A \rho\vec{v}(\vec{v} \cdot \vec{n}) dA = \vec{F}_p + \underbrace{\vec{F}_R}_{=0} + \vec{F}_s + \underbrace{\vec{F}_{vol}}_{=0}$$



$$\frac{dI_x}{dt} = \rho_e v_e^2 A_D = F_s + (p_a - p_e) A_D$$

$$\frac{F_s}{p_0 A_D} = \frac{\rho_e v_e^2}{p_0} + \frac{p_e - p_a}{p_0}$$

gesucht: ρ_e, v_e, p_e

erweitern mit γp_e

$$\begin{aligned} \frac{F_s}{p_0 A_D} &= \frac{\gamma \rho_e v_e^2}{\gamma p_e} \frac{p_e}{p_0} + \frac{p_e}{p_0} - \frac{p_a}{p_0} = \\ &= \frac{p_e}{p_0} \gamma \mathbf{Ma}_e^2 + \frac{p_e}{p_0} - \frac{p_a}{p_0} \end{aligned}$$

Energiesatz: $c_p T_0 = c_p T + \frac{1}{2} v^2 \Rightarrow \frac{T_0}{T} = 1 + \frac{1}{2} (\gamma - 1) \mathbf{Ma}^2$

$$\Rightarrow \mathbf{Ma}^2 = \frac{2}{\gamma - 1} \left(\frac{T_0}{T} - 1 \right) = \frac{2}{\gamma - 1} \left[\left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right]$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{F_s}{p_0 A_D} &= \frac{p_e}{p_0} \frac{2\gamma}{\gamma - 1} \left[\left(\frac{p_0}{p_e} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right] + \left(\frac{p_e}{p_0} - \frac{p_a}{p_0} \right) \\ &= f \left(\frac{p_e}{p_a}, \frac{p_a}{p_0} \right) \end{aligned}$$

Druckverhältnis $\frac{p_e}{p_0} = ??$

2 Möglichkeiten:

$$v_e < a_e$$

Unterschallströmung

$$v_e = a_e$$

Schallgeschwindigkeit

$$v_e > a_e$$

Überschallströmung ist unmöglich, da der Austrittsquerschnitt der engste Querschnitt ist

19.3

unterkritischer Fall:

$p_a > p^* = 0.528 \Rightarrow p_e = p_a$ und es folgt

$$\Rightarrow \frac{F_s}{p_0 A_D} = \frac{p_a}{p_0} \frac{2\gamma}{\gamma - 1} \left[\left(\frac{p_0}{p_a} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right]$$

überkritischer Fall:

$p_a \leq p^* \Rightarrow p_e = p^*$

$$\frac{p_e}{p_0} = \frac{p^*}{p_0} = \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 0.528$$

b) inkompressibles Fluid

$$c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \rightarrow \infty$$

weil $d\rho = 0 \Rightarrow w_{\text{abs}} \rightarrow \infty$

Außendruck ist unabhängig von v_e aufgeprägt

Bernoulli ($\rho = \text{konst.}$)

$$\frac{1}{2}\rho \left(v_e^2 - \underbrace{v_0^2}_{=0} \right) = (p_0 - p_e) \implies \rho v_e^2 = 2(p_0 - p_e)$$

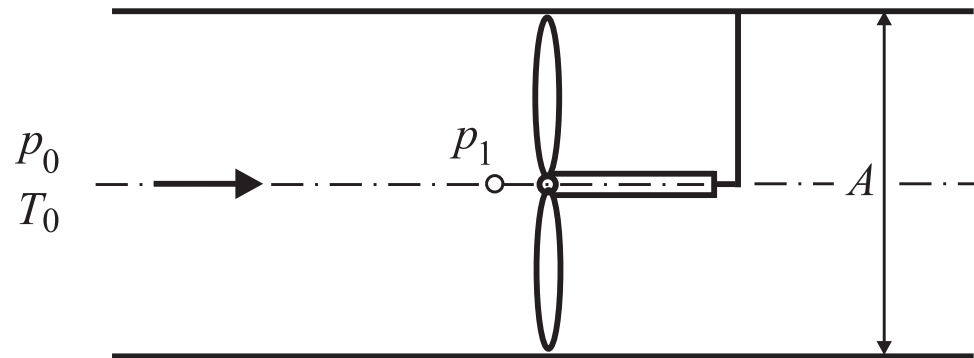
$$\frac{F_s}{p_0 A_D} = \frac{\rho_e v_e^2}{p_0} + \underbrace{\frac{p_e - p_a}{p_0}}_{=0}$$

$$= 2 \frac{p_0 - p_a}{p_0} = 2 \left(1 - \frac{p_a}{p_0} \right)$$

$\frac{p_a}{p_0}$	$\frac{F_s}{p_0 A_D}$	
	a) kompr.	b) inkompr.
1	0	0
0.6	0.66	0.8
0.2	1.07	1.6
0	1.27	2

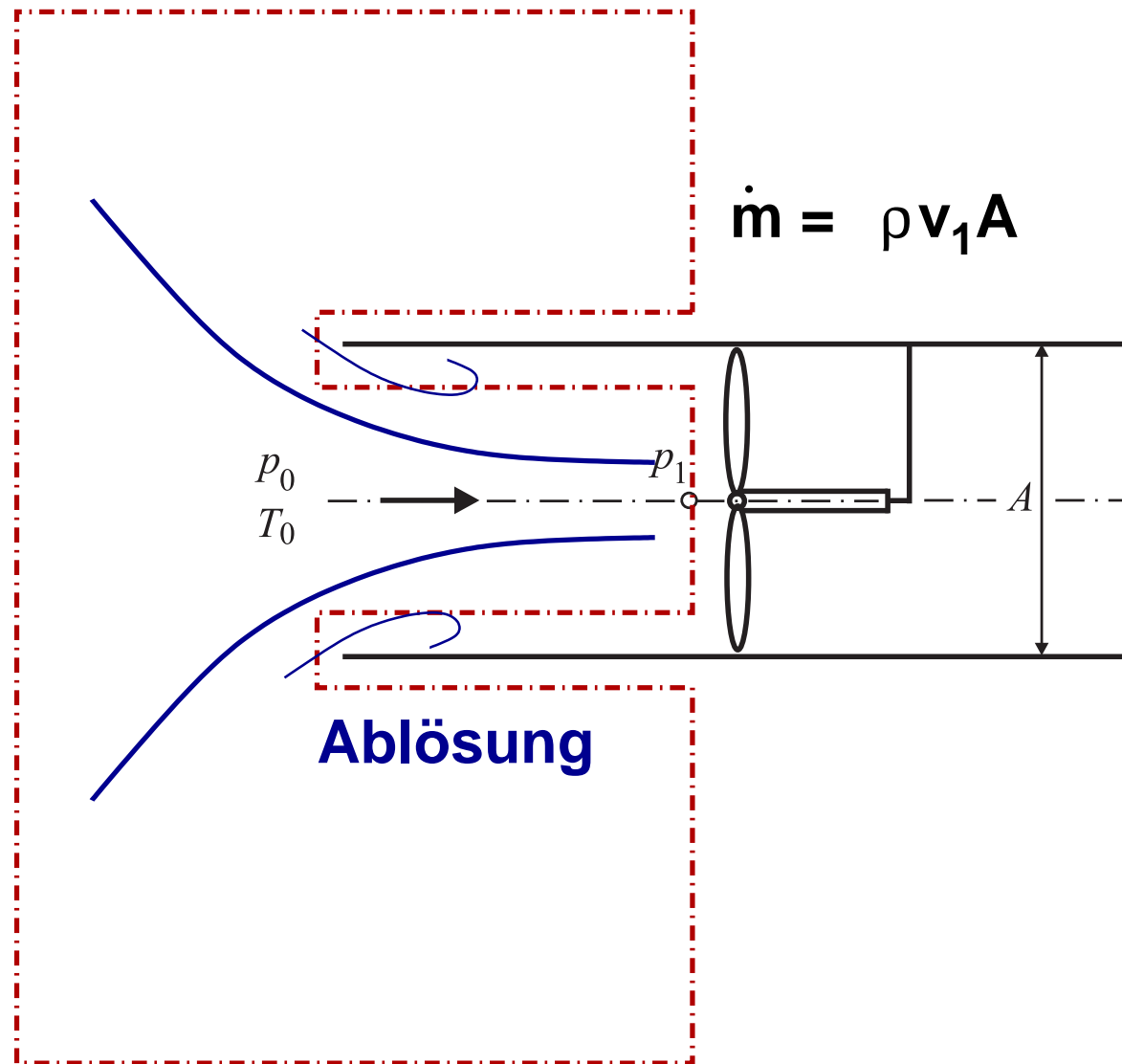
19.5

Ein Turbotriebwerk saugt Luft aus der Atmosphäre an. Unmittelbar vor dem Kompressor ist der Druck p_1 .



$$p_0 = 10^5 \text{ N/m}^2 \quad T_0 = 287 \text{ K} \quad p_1 = 0.74 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2 \quad A = 9 \cdot 10^3 \text{ mm}^2$$
$$R = 287 \text{ Nm/(kgK)} \quad \gamma = 1.4$$

Bestimmen Sie den Massenstrom durch das Triebwerk!



19.5

Ablösung \rightarrow Verluste \rightarrow Änderung von p_0

Zwar ist $\dot{Q} + P_t = 0 \Rightarrow h_0 = \textit{konst.}$

aber wegen Ablösung \rightarrow keine isentrope Strömung

\implies irreversible Umwandlung von kinetischer in innere Energie

Impulssatz in x -Richtung

$$\frac{dI_x}{dt} = \rho_1 v_1^2 A - 0 = (p_0 - p_1)A$$

$$\rho_1 v_1^2 = p_0 - p_1 \quad \text{Impuls}$$

$$c_p T_0 = c_p T_1 + \frac{1}{2} v_1^2 \quad \text{Energie}$$

gesucht: $\dot{m} = \rho_1 v_1 A$ mit

$$\rho_1 = \frac{p_1}{RT_1} \quad v_1 = \text{Ma}_1 \sqrt{\gamma RT_1}$$

$$p_0 - p_1 = \rho_1 v_1^2 = \frac{\rho_1 v_1^2}{p_1} p_1 = \frac{v_1^2}{\gamma \frac{p_1}{\rho_1}} \gamma p_1 =$$

$$= \gamma p_1 \text{Ma}_1^2 \implies \text{Ma}_1^2 = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{p_0}{p_1} - 1 \right) = 0.25$$

Energiesatz: $c_p T_0 = c_p T_1 + \frac{1}{2} v_1^2$; $c_p = \frac{\gamma}{\gamma - 1} R$

$$\gamma R T_0 = \gamma R T_1 + \frac{\gamma - 1}{2} v_1^2 \implies \frac{T_0}{T_1} = 1 + \frac{1}{2} (\gamma - 1) \text{Ma}_1^2$$

$$\implies T_1 = \frac{T_0}{1 + \frac{1}{2} (\gamma - 1) \text{Ma}_1^2} = 273.3 \text{K}$$

$$\dot{m} = 1.41 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

19.5

Die Machzahl im Rohr beträgt $Ma_1 = \sqrt{\frac{1}{\gamma} \left(\frac{p_0}{p_1} - 1 \right)} = 0.5$. (Wenn die Strömung verlustfrei wäre, entspräche das Druckverhältnis einer Machzahl im Rohr von $Ma = 0.67$.)

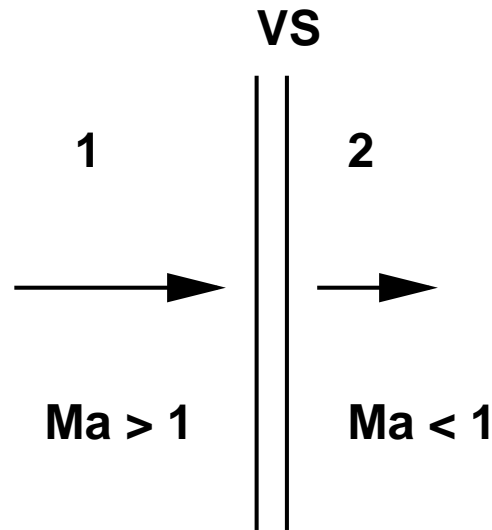
zum Vergleich Aufgabe 7.8):

inkompressible Strömung mit $\rho = \rho_0 = \frac{p_0}{RT_0}$

$$\dot{m} = \rho v A = \sqrt{\rho \Delta p} A = 1.6 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

Verdichtungsstoß

Berechnung über den senkrechten Verdichtungsstoß



Entropiezunahme: $s_2 > s_1$

→ Isentropenbeziehung ist nicht anwendbar,

Wichtig: h_0, T_0 und T^* bleiben konstant, aber $p_{01} \neq p_{02}$ und $s_{01} \neq s_{02}$

→ Stoß ist isenthalp, nicht isentrop.

Verdichtungsstoß

Kontinuität, Impuls- und Energiegleichung

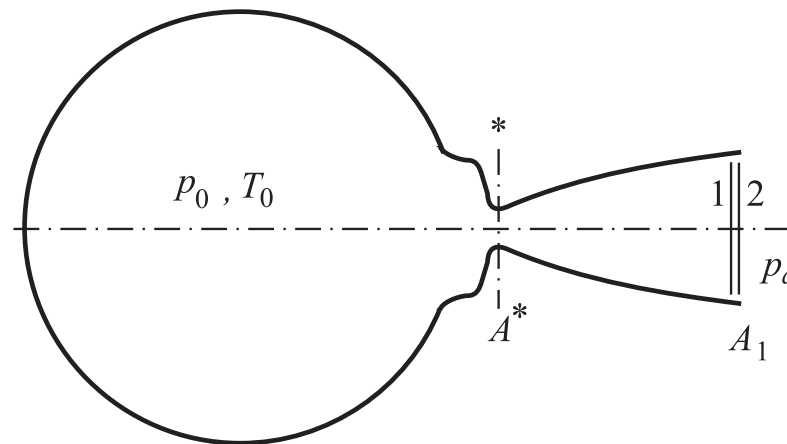
$$\text{Ma}_1^* = \frac{1}{\text{Ma}_2^*}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (\text{Ma}_1^2 - 1)$$

Das Druckverhältnis steigt mit der Machzahl.

19.6

Aus einem großen Behälter strömt Luft durch eine gut gerundete Düse ins Freie. Im Endquerschnitt A_1 steht ein senkrechter Verdichtungsstoß.



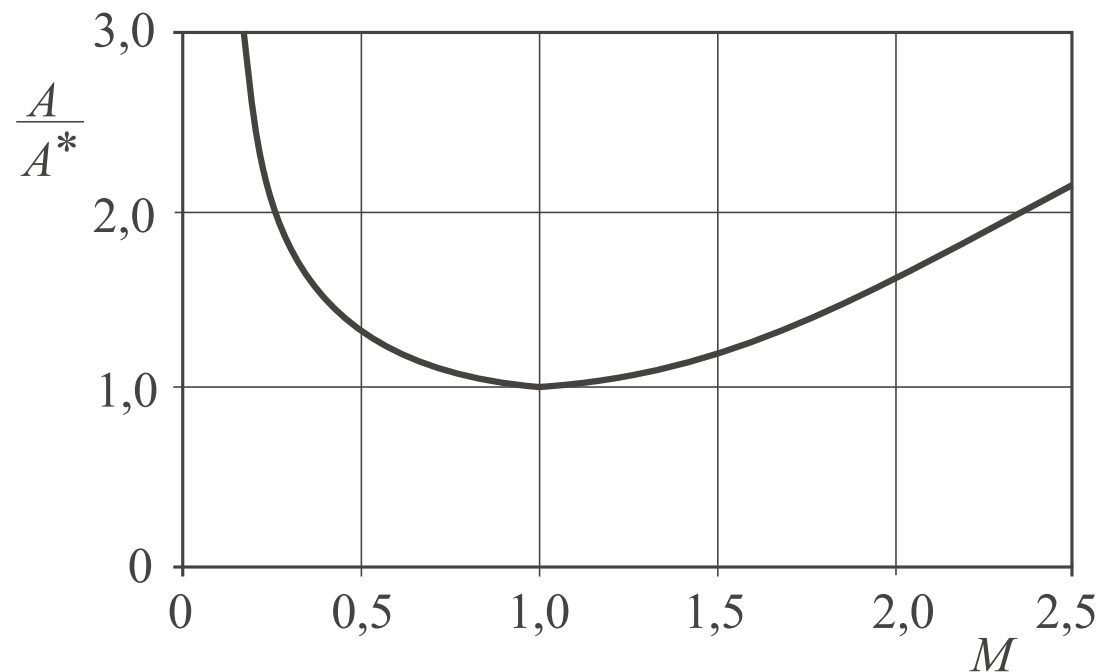
- Bestimmen Sie den Massenstrom.
- Skizzieren Sie den Verlauf des statischen Druckes in der Düse.

19.6

$$A_1 = 0.018 \text{ m}^2 \quad T_0 = 287 \text{ K} \quad A^* = 0.01 \text{ m}^2 \quad p_a = 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

$$R = 287 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}$$

Hinweis: $\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1}(M_1^2 - 1)$



$$\dot{m} = \rho_1 u_1 A_1 = \frac{\rho_1 p_0}{\rho_0 RT_0} \frac{u_1}{\sqrt{\gamma RT_1}} \sqrt{\gamma RT_0} \sqrt{\frac{T_1}{T_0}} A_1$$

$$M_1 > 1, \quad M_2 < 1; \quad p_2 = p_a$$

0 → 1 isentrope Strömung

$$\frac{A^*}{A_1} = \frac{1}{1.8} \quad (\text{aus Diagramm}) \quad \rightarrow \quad M_1 = 2$$

$$p_1 = \frac{p_2}{1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1}(M_1^2 - 1)} = 2.22 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2$$

$$T_1 = \frac{T_0}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2}$$

$$p_0 = p_1 \left(\frac{T_0}{T_1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = p_1 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 1.74 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$$

$$\dot{m} = \left(\frac{1}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} M_1 \frac{p_0}{\sqrt{RT_0}} \sqrt{\gamma} A_1 = 4.43 \text{ kg/s}$$

b)

