Die Gasdynamik beschreibt kompressible Strömungen, d.h. Strömungen mit Dichteänderungen:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0; \frac{\partial \rho}{\partial x} \neq 0; etc.$$

Als Unterscheidungskriterium zwischen inkompressibel und kompressibel wird die Machzahl herangezogen:

$$M = \frac{u}{c} = \frac{\text{Strömungsgeschwindigkeit}}{\text{lokale Schallgeschwindigkeit}}$$

Strömungen kompressibler Fluide im unteren Machzahlbereich ($M < 0.3$) werden als inkompressibel betrachtet, darüber sind Dichteänderungen zu berücksichtigen!
Die Schallgeschwindigkeit ist die Geschwindigkeit, mit der sich kleine Störungen (Druckänderungen, z.B. Schall) ausbreiten.

Für ein ideales Gas gilt:

$$c = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}} = \sqrt{\gamma R T}$$

Ist die Strömungsgeschwindigkeit größer als die Schallgeschwindigkeit ($M > 1$), dann können sich Störungen nicht mehr stromauf ausbreiten, sondern sind durch den Mach'schen Kegel eingeschränkt. Der beträgt:

$$\alpha = arcsin \frac{1}{M}$$

Aus der Energiegleichung

$$h_0 = h + \frac{u^2}{2} \Rightarrow c_p T_0 = c_p T + \frac{u^2}{2}$$

erhält man

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} \qquad \Rightarrow c_p - c_v = R$$

$$\Rightarrow c_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}, \qquad c_v = \frac{R}{\gamma - 1}.$$

Für ideale Gase gilt die Beziehung

$$\frac{T}{T_0} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{-1} = f(M).$$

Für isentrope Zustandsänderungen lassen sich die Isentropenbeziehungen

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

bestimmen. D.h. für isentrope Strömungen sind p, ρ und T lediglich Funktionen der Machzahl und des Ruhezustandes.
Neben dem Ruhezustand läßt sich der Schallzustand (oder auch kritische Zustand) als Bezug verwenden. Für diesen gilt:

$$u = c \quad \Rightarrow M = 1$$

$$T^\star = T(\text{Ma} = 1)$$

$$p^\star = p(\text{Ma} = 1)$$

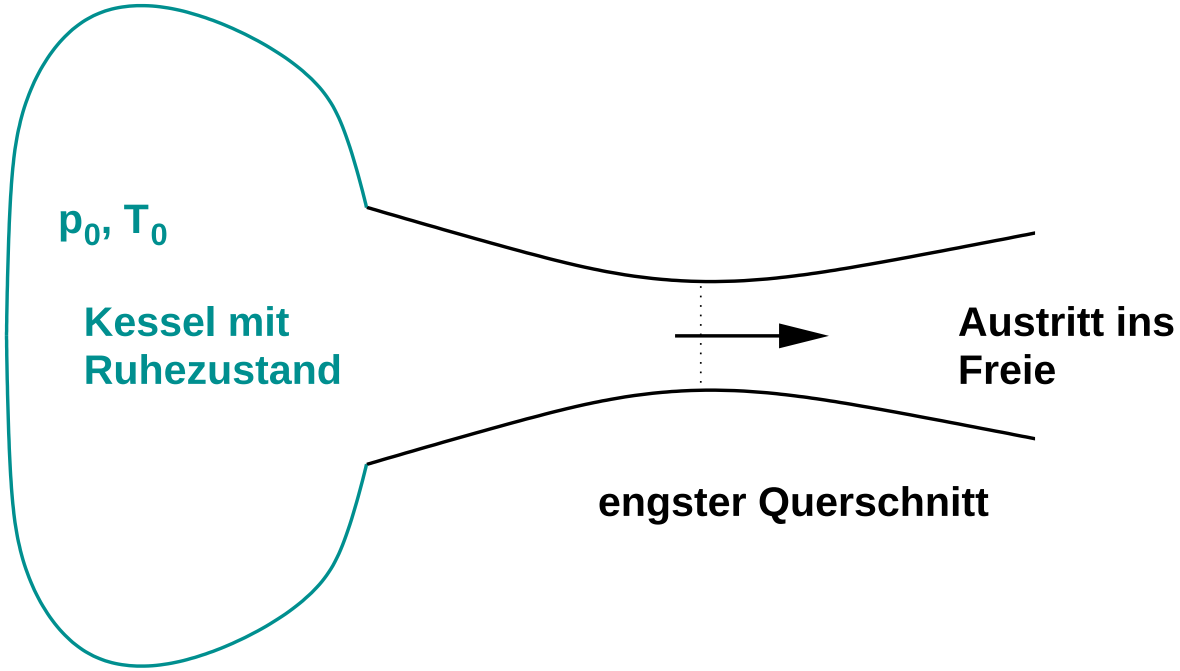
$$\rho^\star = \rho(\text{Ma} = 1)$$

Die zugehörigen Größen werden mit einem * gekennzeichnet. Der Zusammehang zwischen Ruhe- und kritischen Zustand ist nur vom Isentropenexponenten γ abhängig:

$$\Longrightarrow \frac{T_0}{T^\star} = 1 + \frac{1}{2}(\gamma - 1) = \frac{\gamma + 1}{2}$$

isentrop: $\rightarrow \dfrac{p_0}{p^\star} = \left(\dfrac{\rho_0}{\rho^\star}\right)^\gamma = \left(\dfrac{\gamma + 1}{2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$

$$\Rightarrow \frac{p^\star}{p_0} = 0.528$$



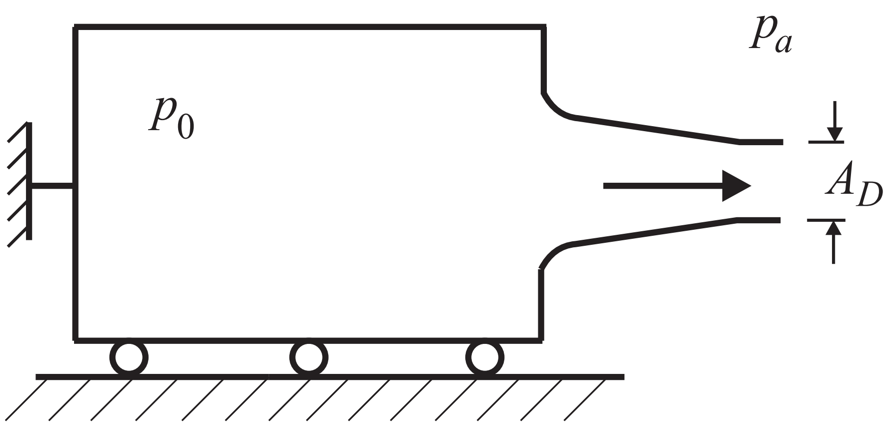
Flächen-Geschwindigkeitsbeziehung:

$$\frac{du}{u} = -\frac{1}{1-\text{Ma}^2}\frac{dA}{A} \text{ mit Ma} = 1 \quad \Rightarrow \quad dA = 0$$

$\rightarrow$ $\text{Ma} = 1$ kann nur im engsten Querschnitt auftreten

19.3

Aus einem großen, reibungsfrei gelagerten Behälter strömt Luft ($\gamma = 1.4$) isentrop durch eine gerundete Düse ins Freie.



a) Bestimmen Sie den dimensionslosen Schub $F_s/p_0 A_D$ für die Druckverhältnisse

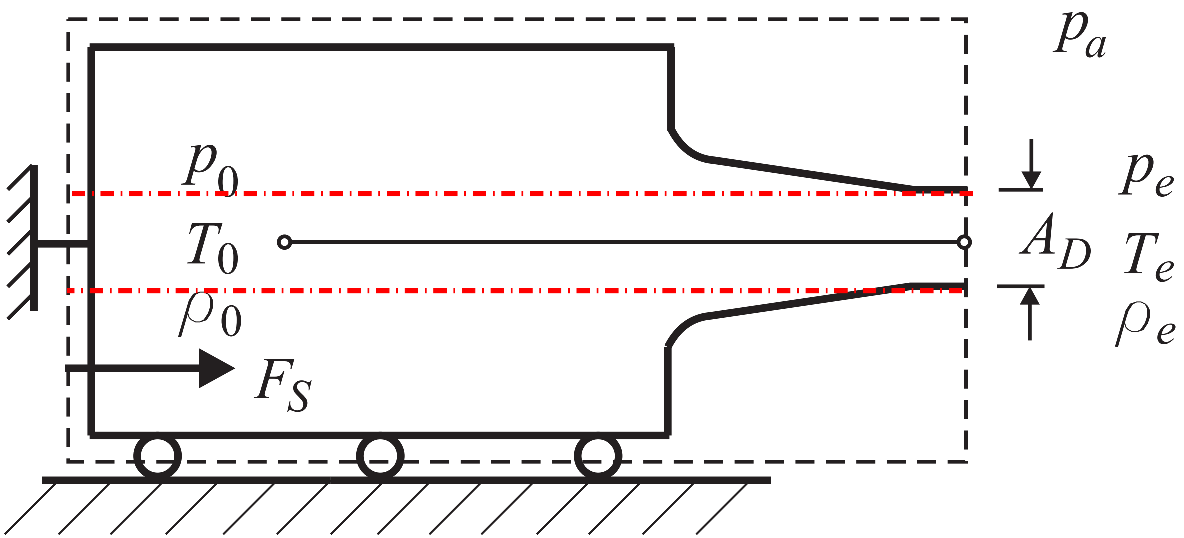
$$p_a/p_0 = 1;\ 0.6;\ 0.2;\ 0\ !$$

b) Wie groß sind die entsprechenden Werte einer inkompressiblen Flüssigkeit?

a) Ausströmen aus großem Behälter (ideales Gas)

Kräfte aus Impulssatz

$$\frac{d\vec{I}}{dt} = \int_\tau \frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{v})\,d\tau + \int_A \rho\vec{v}(\vec{v}\cdot\vec{n})\,dA = \vec{F}_p + \underbrace{\vec{F}_R}_{=0} + \vec{F}_s + \underbrace{\vec{F}_{vol}}_{=0}$$



$$\frac{dI_x}{dt} = \rho_e v_e^2 A_D = F_s + (p_a - p_e)A_D$$

$$\frac{F_s}{p_0 A_D} = \frac{\rho_e v_e^2}{p_0} + \frac{p_e - p_a}{p_0}$$

gesucht: ρ_e, v_e, p_e

erweitern mit γp_e

$$\frac{F_s}{p_0 A_D} = \frac{\gamma \rho_e v_e^2}{\gamma p_e} \frac{p_e}{p_0} + \frac{p_e}{p_0} - \frac{p_a}{p_0} =$$

$$= \frac{p_e}{p_0} \gamma \, \mathrm{Ma}_e^2 + \frac{p_e}{p_0} - \frac{p_a}{p_0}$$

Energiesatz: $c_p T_0 = c_p T + \frac{1}{2} v^2 \Rightarrow \frac{T_0}{T} = 1 + \frac{1}{2}(\gamma - 1)\mathrm{Ma}^2$

$$\Longrightarrow \mathrm{Ma}^2 = \frac{2}{\gamma - 1}\left(\frac{T_0}{T} - 1\right) = \frac{2}{\gamma - 1}\left[\left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right]$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{F_s}{p_0 A_D} = \frac{p_e}{p_0}\frac{2\gamma}{\gamma-1}\left[\left(\frac{p_0}{p_e}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right] + \left(\frac{p_e}{p_0} - \frac{p_a}{p_0}\right)$$

$$= f\left(\frac{p_e}{p_a}, \frac{p_a}{p_0}\right)$$

Druckverhältnis $\dfrac{p_e}{p_0} =$??

2 Möglichkeiten:

$v_e < a_e$	Unterschallströmung
$v_e = a_e$	Schallgeschwindigkeit
$v_e > a_e$	Überschallströmung ist unmöglich, da der Austrittsquerschnitt der engste Querschnitt ist

unterkritischer Fall:

$p_a > p^* = 0.528 \quad \Rightarrow p_e = p_a$ und es folgt

$$\Longrightarrow \frac{F_s}{p_0 A_D} = \frac{p_a}{p_0} \frac{2\gamma}{\gamma - 1} \left[\left(\frac{p_0}{p_a} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right]$$

überkritischer Fall:

$p_a \leq p^* \quad \Rightarrow p_e = p^*$

$$\frac{p_e}{p_0} = \frac{p_*}{p_0} = \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 0.528$$

b) inkompressibles Fluid

$$c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s \rightarrow \infty$$

weil $d\rho = 0 \Rightarrow w_{\text{abs}} \rightarrow \infty$

Außendruck ist unabhängig von v_e aufgeprägt

Bernoulli ($\rho =$ konst.

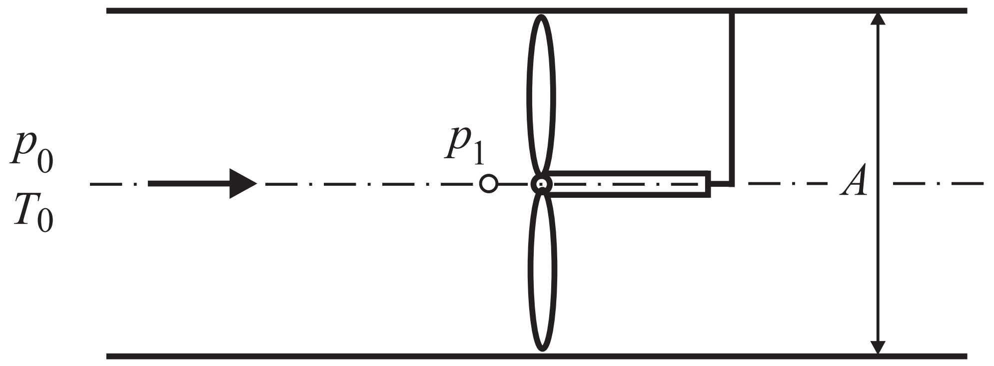
$$\frac{1}{2}\rho\left(v_e^2 - \underbrace{v_0^2}_{=0}\right) = (p_0 - p_e) \Longrightarrow \rho v_e^2 = 2(p_0 - p_e)$$

$$\frac{F_s}{p_0 A_D} = \frac{\rho_e v_e^2}{p_0} + \underbrace{\frac{p_e - p_a}{p_0}}_{=0}$$

$$= 2\frac{p_0 - p_a}{p_0} = 2\left(1 - \frac{p_a}{p_0}\right)$$

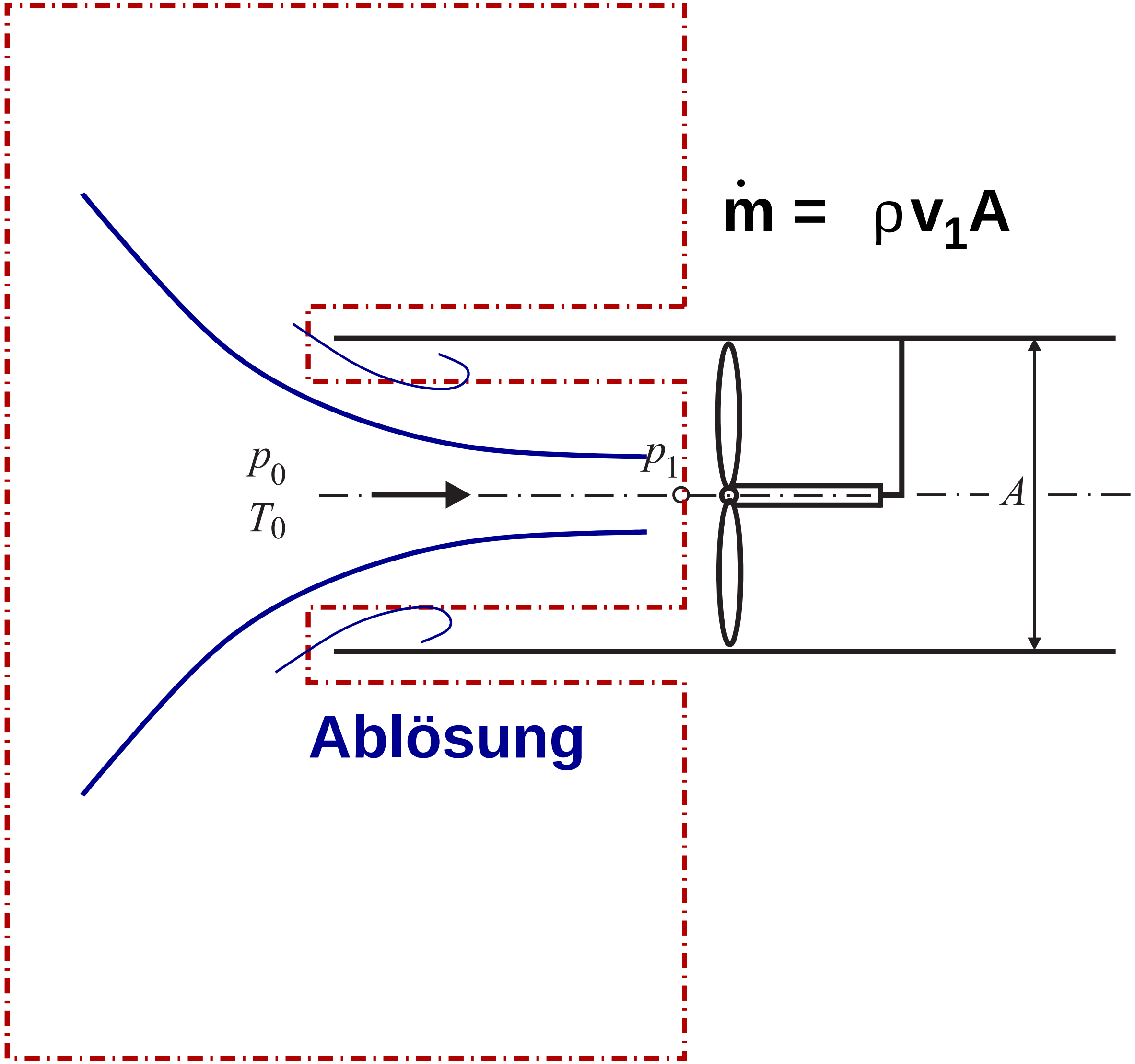
$\frac{p_a}{p_0}$	$\frac{F_s}{p_0 A_D}$	
	a) kompr.	b) inkompr.
1	0	0
0.6	0.66	0.8
0.2	1.07	1.6
0	1.27	2

Ein Turbotriebwerk saugt Luft aus der Atmosphäre an. Unmittelbar vor dem Kompressor ist der Druck p_1 .



$$p_0 = 10^5\ N/m^2 \quad T_0 = 287\ K \quad p_1 = 0.74 \cdot 10^5\ N/m^2 \quad A = 9 \cdot 10^3\ mm^2$$
$$R = 287\ Nm/(kgK) \quad \gamma = 1.4$$

Bestimmen Sie den Massenstrom durch das Triebwerk!



$\dot{m} = \rho v_1 A$
p_0
T_0
p_1
A
Ablösung

Ablösung $\rightarrow$ Verluste $\rightarrow$ Änderung von p_0

Zwar ist $\dot{Q} + P_t = 0 \Rightarrow h_0 = konst.$
aber wegen Ablösung $\rightarrow$ keine isentrope Strömung

$\Longrightarrow$ irreversible Umwandlung von kinetischer in innere Energie

Impulssatz in x-Richtung

$$\frac{dI_x}{dt} = \rho_1 v_1^2 A - 0 = (p_0 - p_1) A$$

$$\rho_1 v_1^2 = p_0 - p_1 \qquad \text{Impuls}$$

$$c_p T_0 = c_p T_1 + \tfrac{1}{2} v_1^2 \quad \text{Energie}$$

gesucht: $\dot{m} = \rho_1 v_1 A$ mit

$$\rho_1 = \frac{p_1}{R T_1} \qquad v_1 = \text{Ma}_1 \sqrt{\gamma R T_1}$$

$$p_0 - p_1 = \rho_1 v_1^2 = \frac{\rho_1 v_1^2}{p_1} p_1 = \frac{v_1^2}{\gamma \frac{p_1}{\rho_1}} \gamma p_1 =$$

$$= \gamma\, p_1\, \text{Ma}_1^2 \quad \Longrightarrow \quad \text{Ma}_1^2 = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{p_0}{p_1} - 1\right) = 0.25$$

Energiesatz: $c_p T_0 = c_p T_1 + \frac{1}{2} v_1^2 ; \qquad c_p = \frac{\gamma}{\gamma - 1} R$

$$\gamma R T_0 = \gamma R T_1 + \frac{\gamma - 1}{2} v_1^2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{T_0}{T_1} = 1 + \frac{1}{2}(\gamma - 1)\text{Ma}_1^2$$

$$\Longrightarrow T_1 = \frac{T_0}{1 + \frac{1}{2}(\gamma - 1)\text{Ma}_1^2} = 273.3K$$

$$\dot{m} = 1.41 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

19.5

Die Machzahl im Rohr beträgt $\mathrm{Ma}_1 = \sqrt{\frac{1}{\gamma}\left(\frac{p_0}{p_1} - 1\right)} = 0.5$. (Wenn die Strömung verlustfrei wäre, entspräche das Druckverhältnis einer Machzahl im Rohr von Ma = 0.67.)

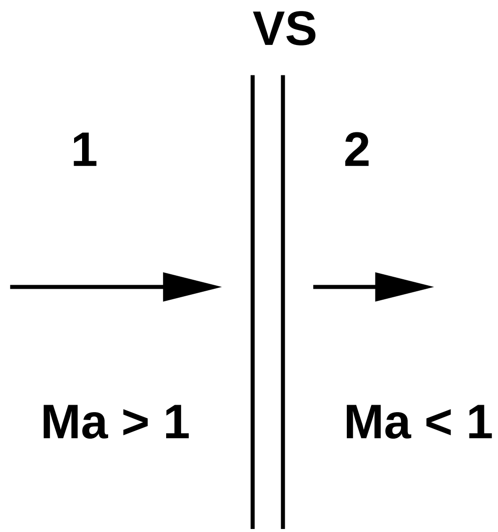
zum Vergleich Aufgabe 7.8):

inkompressible Strömung mit $\rho = \rho_0 = \dfrac{p_0}{RT_0}$

$$\dot{m} = \rho v A = \sqrt{\rho \Delta p} A = 1.6 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}$$

Verdichtungsstoß

Berechnung über den senkrechten Verdichtungsstoß



Entropiezunahme: $s_2 > s_1$

$\longrightarrow$ Isentropenbeziehung ist nicht anwendbar,
Wichtig: h_0,T_0 und $T^\star$ bleiben konstant, aber $p_{01} \neq p_{02}$ und $s_{01} \neq s_{02}$
$\longrightarrow$ Stoß ist isenthalp, nicht isentrop.

Verdichtungsstoß

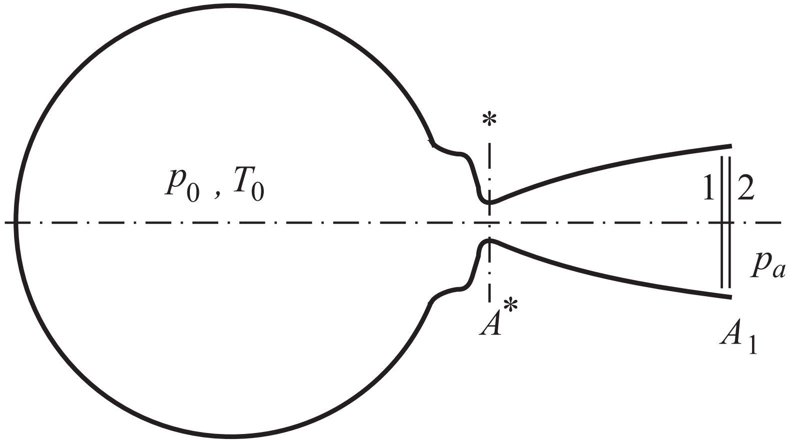
Kontinuität, Impuls- und Energiegleichung

$$\mathrm{Ma}_1^\star = \frac{1}{\mathrm{Ma}_2^\star}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1}\left(\mathrm{Ma}_1^2 - 1\right)$$

Das Druckverhältnis steigt mit der Machzahl.

Aus einem großen Behälter strömt Luft durch eine gut gerundete Düse ins Freie. Im Endquerschnitt A_1 steht ein senkrechter Verdichtungsstoß.

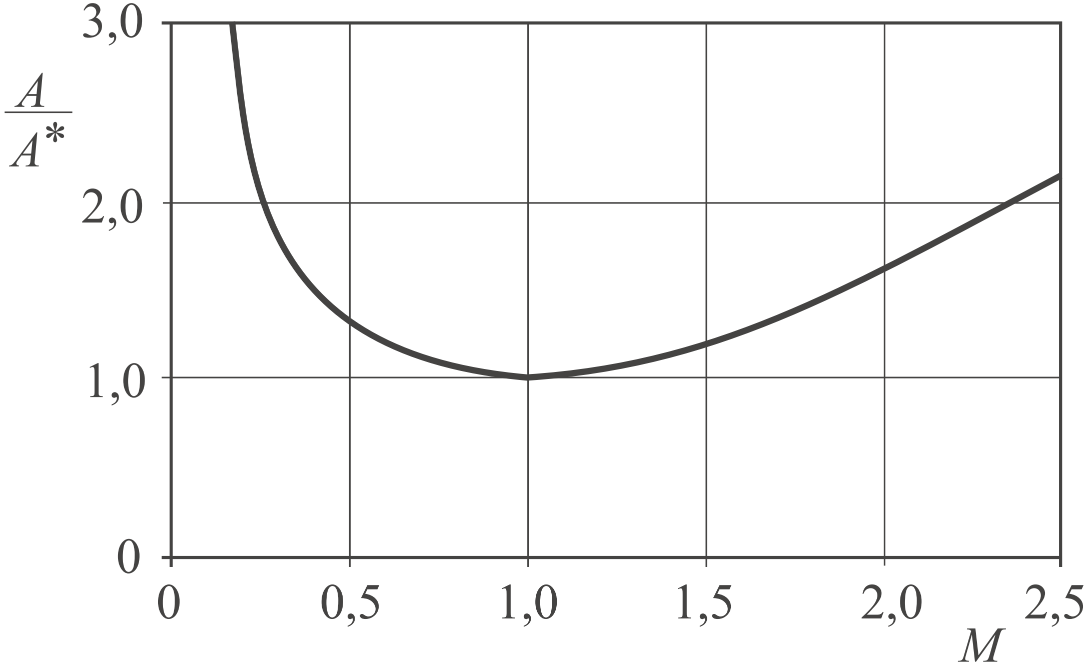


a) Bestimmen Sie den Massenstrom.
b) Skizzieren Sie den Verlauf des statischen Druckes in der Düse.

$$A_1 = 0.018\ m^2 \quad T_0 = 287\ K \quad A^* = 0.01\ m^2 \quad p_a = 10^5\ \frac{N}{m^2}$$

$$R = 287\ \frac{J}{kg\ K}$$

Hinweis: $\dfrac{p_2}{p_1} = 1 + \dfrac{2\gamma}{\gamma+1}(M_1^2 - 1)$



$$\dot{m} = \rho_1 u_1 A_1 = \frac{\rho_1}{\rho_0} \frac{p_0}{RT_0} \frac{u_1}{\sqrt{\gamma R T_1}} \sqrt{\gamma R T_0} \sqrt{\frac{T_1}{T_0}} A_1$$

$$M_1 > 1, \quad M_2 < 1; \quad p_2 = p_a$$

$0 \rightarrow 1$ isentrope Strömung

$$\frac{A^*}{A_1} = \frac{1}{1.8}$$ (aus Diagramm) $\rightarrow$ $M_1 = 2$

$$p_1 = \frac{p_2}{1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1}(M_1^2 - 1)} = 2.22 \cdot 10^4 \ N/m^2$$

$$T_1 = \frac{T_0}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2}$$

$$p_0 = p_1 \left(\frac{T_0}{T_1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = p_1 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 1.74 \cdot 10^5 \; N/m^2$$

$$\dot{m} = \left(\frac{1}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} M_1 \frac{p_0}{\sqrt{RT_0}} \sqrt{\gamma} A_1 = 4.43 \; kg/s$$

b)