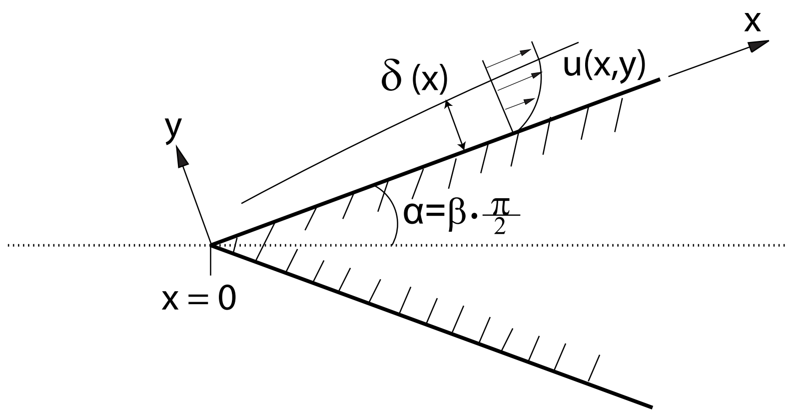
Tutorenprogramm - Strömungsmechanik II

Turbulente Grenzschichten / Grenzschichtablösung - Musterlösung

3. Aufgabe



$$u_a(x,y) = Cx^m \text{mit } m = \frac{\beta}{2-\beta}$$
$$u_a(x) = Cx^{\frac{\beta}{2-\beta}}$$

Das Geschwindigkeitsprofil in der Grenzschicht wird durch folgenden Polynomansatz angenähert:

$$\frac{u(x,y)}{u_a(x,y)} = a_1 \left(\frac{y}{\delta(x)}\right) + a_2 \left(\frac{y}{\delta(x)}\right)^2 + a_3 \left(\frac{y}{\delta(x)}\right)^3$$

1. Bestimmung der Koeffizienten a1, a2, a3 als Funktion von β

Zur Bestimmung der Koeffizienten werden die selben Randbedingungen benutzt wie in bei den laminaren Grenzschichten.

1. Haftbedingung: $y = 0 \rightarrow u = v = 0$

2. Grenzschichtrand: $y = \delta \rightarrow u = u_a \rightarrow \frac{u}{u_a} = 1$

3. Wandbindungsgleichung (x-Impuls bei y=0): $\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big|_{y=0}$

4. Glatterübergang am GS-Rand (kein Knick): $y = \delta \rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = 0$

5. Glatterübergang am GS-Rand (keine Krümmung): $y = \delta \rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

1. RB: Haftbedingung. $\frac{y}{\delta} = 0 \rightarrow u(x{,}y) = 0 \rightarrow$Haftbedingung ist durch Ansatz Erfüllt

2. RB: Grenzschichtrand: $y = \delta \rightarrow u = u_a \rightarrow \frac{u}{u_a} = 1 \rightarrow \underline{\underline{1 = a_1 + a_2 + a_3}}$

3. RB: Wandbindungsgleichung: $\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big|_{y=0}$
and der Wand (y=0) gilt: $u = v = 0 \rightarrow \eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial p}{\partial x}$

Zur einfacheren Differentiation wird der Tipp aus der Übung: Laminare Grenzschichten angewandt:

$$\eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \eta \frac{u_a(x)}{\delta^2(x)} \left. \frac{\partial^2 \left(\frac{u(x,y)}{u_a(x)}\right)}{\partial \left(\frac{y}{\delta}\right)^2} \right|_{\frac{y}{\delta}=0}$$

mit

$$\left. \frac{\partial^2 \left(\frac{u(x,y)}{u_a(x)}\right)}{\partial \left(\frac{y}{\delta}\right)^2} \right|_{\frac{y}{\delta}=0} = 2a_2$$

folgt

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 2\eta \frac{u_a(x)}{\delta^2(x)} a_2 \tag{1}$$

Der Druckgradient kann mit Hilfe der 1D Impulsgleichung aus dem Hinweis bestimmt werden

$$\rho u_a \frac{\partial u_a}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} \rightarrow \underline{\underline{\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho C^2 \left(\frac{\beta}{2-\beta}\right) x^{\left(\frac{2\beta}{2-\beta}-1\right)}}} \tag{2}$$

Durch einsetzen von Gl(**??**) in Gl(**??**) und umstellen nach a_2 folgt:

$$a_2 = \frac{-\rho C^2 \left(\frac{\beta}{2-\beta}\right) \delta^2(x)}{2\eta C} x^{\left(\frac{2\beta}{2-\beta}-1\right)} x^{-\frac{\beta}{2-\beta}}$$

$$\rightarrow \underline{\underline{a_2 = -\frac{\delta^2(x) C\beta}{2\nu(2-\beta)} x^{\left(\frac{\beta}{2-\beta}-1\right)}}}$$

4. RB: Stetigkeit am Grenzschichtrand: $\frac{y}{\delta} = 1 \rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \rightarrow \underline{\underline{a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 0}}$

$\rightarrow a_3 = -\frac{1}{3}(a_1 + 2a_2)$

Einsetzen in RB 2 $\rightarrow a_1 + a_2 - \frac{1}{3}(a_1 + 2a_2) = 1 \rightarrow \frac{2}{3}a_1 + \frac{1}{2}a_2 = 1$

$$\underline{\underline{\rightarrow a_1 = \frac{3}{2} + \frac{\delta^2(x)C\beta}{4\nu(2-\beta)} x^{\left(\frac{\beta}{2-\beta}-1\right)}}}$$

$$\underline{\underline{a_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\delta^2(x)C\beta}{4\nu(2-\beta)} x^{\left(\frac{\beta}{2-\beta}-1\right)}}}$$

2. Wertebereich von β, für den die Strömung ablösen kann

Die Strömung ist abgelöst, wenn $\tau_w \leqslant 0 \rightarrow \eta \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} \leqslant 0$

$$\eta \frac{\partial u}{\partial y}\Bigg|_{y=0} \leqslant 0 \rightarrow a_1 \leqslant 0 \rightarrow \frac{3}{2} + \frac{\delta^2(x)C\beta}{4\nu(2-\beta)} x^{\left(\frac{\beta}{2-\beta}-1\right)} \leqslant 0$$

$$\rightarrow \frac{\delta^2(x)C\beta}{4\nu(2-\beta)} x^{\left(\frac{\beta}{2-\beta}-1\right)} \leqslant -\frac{3}{2}$$

$$\rightarrow \frac{\beta}{(2-\beta)} \underbrace{x^{\left(\frac{\beta}{2-\beta}-1\right)}}_{>0} \leqslant \underbrace{-\frac{6\nu}{\delta^2(x)C}}_{<0}$$

Der Term $x^{\left(\frac{\beta}{2-\beta}-1\right)}$ ist stets > 0, da $x^c > 0$ für alle $x \in (0, \infty]$ und $c \in \mathbb{R}$

$$\rightarrow \frac{\beta}{2-\beta} < 0 \rightarrow \beta < 0 \text{ oder } \beta > 2$$

Ablösung kann auftreten für

$$\beta \in [-\infty, 0) \cup (2, \infty]$$

3. Wie ändert sich qualitativ die Grenzschichtdicke $\delta(x)$ für abnehmende m

Für abnehmendes m ist die Beschleunigung geringer
$\rightarrow$ betragsmäßig kleinerer negativer Druckgradient
$\rightarrow$ Geschwindigkeitsprofil wird schlanker
$\rightarrow$ Grenzschichtdicke $\delta(x)$ wird größer