

Tutorenprogramm - Strömungsmechanik II

Turbulente Grenzschichten, Grenzschichtablösung - Musterlösung

1. Aufgabe

Längs angeströmte ebene Platte $\Rightarrow \frac{du_a}{dx} = 0, \quad u_a = u_\infty = \text{konst.}$

v. Kármánsche Integralbeziehung: $\frac{d\delta_2}{dx} = -\frac{\tau(y=0)}{\rho u_\infty^2} = \frac{\tau_W}{\rho u_\infty^2} = \frac{1}{2} c_f$

$$\delta_2 = \int_0^\delta \frac{u}{u_\infty} \left(1 - \frac{u}{u_\infty}\right) dy = \delta \int_0^1 \frac{u}{u_\infty} \left(1 - \frac{u}{u_\infty}\right) d\frac{y}{\delta} = \delta \int_0^1 \xi^{1/7} (1 - \xi^{1/7}) d\xi$$

$$= \delta \int_0^1 (\xi^{1/7} - \xi^{2/7}) d\xi = \delta \left[\frac{7}{8} \xi^{8/7} - \frac{7}{9} \xi^{9/7} \right]_0^1 = \frac{7}{72} \delta$$

$$\frac{d\delta_2}{dx} = \frac{7}{72} \frac{d\delta}{dx} = \frac{1}{2} c_f = \frac{1}{2} \frac{c}{Re_\delta^{1/4}} = \frac{1}{2} \frac{c \eta^{1/4}}{(\rho u_\infty)^{1/4} \delta^{1/4}}$$

$$\Rightarrow \frac{7}{72} \delta^{1/4} \frac{d\delta}{dx} = \frac{1}{2} c \left(\frac{\eta}{\rho u_\infty} \right)^{1/4}$$

$$\text{d.h. } \frac{7}{72} \frac{4}{5} \delta^{5/4} = \frac{1}{2} c \left(\frac{\eta}{\rho u_\infty} \right)^{1/4} x + K_1$$

Randbedingung: $\delta(x=0) = 0 \Rightarrow K_1 = 0$

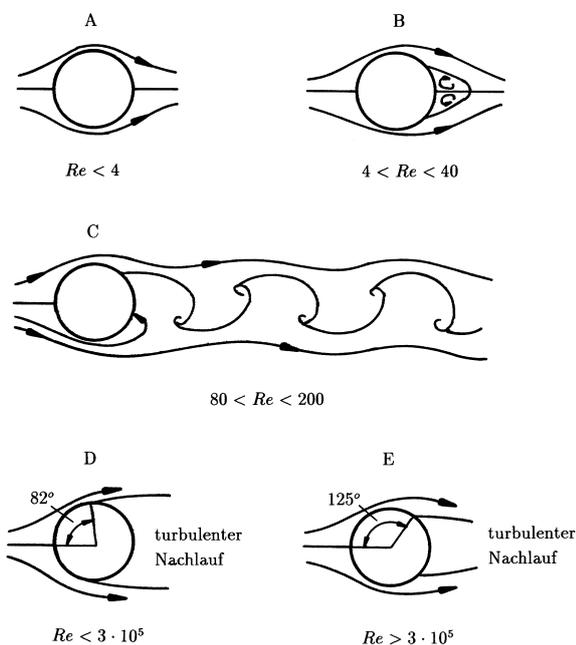
$$\delta^{5/4} = \frac{45}{7} c \left(\frac{\eta}{\rho u_\infty} \right)^{1/4} x$$

$$\delta(x) = \left(\frac{45}{7} c \right)^{4/5} \left(\frac{\eta}{\rho u_\infty} \right)^{1/5} x^{4/5}$$

Quelle: Herbst 2012

2. Aufgabe

1. Strömungsfelder:



2. Eine laminare Grenzschicht hat geringere Geschwindigkeitsgradienten an der Wand als eine turbulente Grenzschicht bei der gleichen Außengeschwindigkeit. Dadurch ergibt sich eine verringerte Wandschubspannung und somit ein geringerer Reibungswiderstand. Gleichzeitig kann die verringerte Schubspannung selbst schon von Vorteil sein (z.B. Blutströmung aufgrund empfindlicher Blutkomponenten, die hohe Scherraten und Schubspannungen nicht gut vertragen).

Maßnahmen zur Laminarhaltung:

- Grenzschichtabsaugung
 - Grenzschichtausblasung
 - Geometrie
 - ...
3. • hochmolekulares Gas $\gamma \downarrow$
 • kryogener Windkanal $T \downarrow$
 • ...

4. An der Platte ($y = 0$) ist:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} \neq 0$$

$$\Rightarrow \text{Widerspruch zur drehungsfreien Strömung: } \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

5. $u^* = c^* = \sqrt{u_1 u_2}$

Quelle: Herbst 2012

3. Aufgabe

1. 1. Haftbedingung: $\frac{y}{\delta} = 0 \Rightarrow u = 0$, durch Ansatz erfüllt
2. Grenzschichttrand: $\frac{y}{\delta} = 1 \Rightarrow u = u_a \Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 = 1$ (1)
3. aus x-Impuls: $\eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{y=0} = \frac{\partial p}{\partial x}$ (2)
4. Stetigkeit am Grenzschichttrand: $\frac{y}{\delta} \geq 1 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \Rightarrow a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 0$ (3)

Aus (2) $\eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{y=0} = \eta \frac{u_a}{\delta^2} \frac{\partial^2 \left(\frac{u}{u_a} \right)}{\partial \left(\frac{y}{\delta} \right)^2} \Big|_{\frac{y}{\delta}=0} = \frac{\partial p}{\partial x} \Rightarrow \eta \cdot \frac{u_a}{\delta^2} \cdot 2a_2 = \frac{\partial p}{\partial x}$ (4)

Eindimensionale Impulsgleichung des reibungsfreien äußeren Strömungsfeldes:

$$\rho u_a \frac{\partial u_a}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = -\rho C^2 m \cdot x^{2m-1}$$

$$\eta \cdot \frac{u_a}{\delta^2} \cdot 2a_2 = -\rho C^2 m \cdot x^{2m-1} \Rightarrow a_2 = -\frac{\delta^2 C \beta}{2\nu(2-\beta)} x^{\frac{\beta}{2-\beta}-1}$$

mit (1), (3):

$$\Rightarrow a_3 = \frac{-1 - a_2}{2}, \quad a_1 = -2a_2 - 3a_3$$

$$\Rightarrow a_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\delta^2 C \beta}{4\nu(2-\beta)} x^{\frac{\beta}{2-\beta}-1}$$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{3}{2} + \frac{\delta^2 C \beta}{4\nu(2-\beta)} x^{\frac{\beta}{2-\beta}-1}$$

2. Ablösung:

$$\frac{\partial p}{\partial x} > 0 \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = -\rho u_a \frac{\partial u_a}{\partial x} = -\underbrace{\rho C^2 m}_{>0} \underbrace{x^{2m-1}}_{>0} > 0$$

$$\Rightarrow m < 0 \Rightarrow \beta < 0 \quad \text{oder} \quad \beta > 2$$

Alternativ:

$$\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} \leq 0 \Rightarrow a_1 \leq 0 \Rightarrow \frac{\beta}{2-\beta} \cdot \underbrace{x^{\frac{\beta}{2-\beta}-1}}_{>0} \leq \underbrace{-\frac{6\nu}{\delta^2 C}}_{<0}$$

$$\Rightarrow \frac{\beta}{2-\beta} < 0 \Rightarrow \beta < 0 \quad \text{oder} \quad \beta > 2$$

3. Für abnehmendes m ist die Beschleunigung geringer
 - \Rightarrow betragsmäßig kleinerer negativer Druckgradient
 - \Rightarrow Geschwindigkeitsprofil wird schlanker
 - \Rightarrow Grenzschichtdicke $\delta(x)$ wird größer

Quelle: Herbst 2013