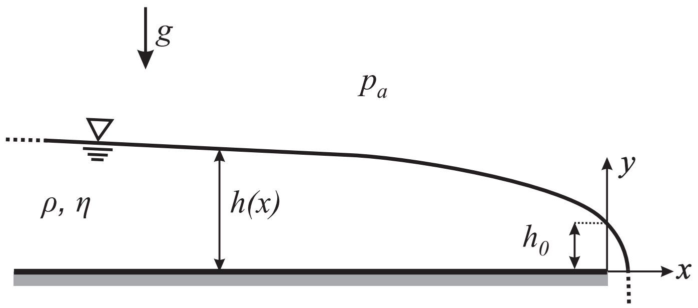
Tutorenprogramm - Strömungsmechanik II

Schleichende Strömung - Musterlösung

2. Aufgabe



Allgemeines Vorgehen um bei gegebener Geometrie $h(x)$ den Druckverlauf zu ermittlen

1.) 2-fache Integration der DGL $\frac{\partial p}{\partial x} = \eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ in y-Richtung $\rightarrow u = f\left(\frac{\partial p}{\partial x}, \eta, u_\infty, y, h(x)\right)$

2.) Integration von $u(x,y)$:
$\dot{V} = const. = \int_0^{h(x)} u\left(\frac{\partial p}{\partial x}, \eta, u_\infty, y, h(x)\right) \cdot B dy \rightarrow \dot{V} = f\left(\frac{\partial p}{\partial x}, \eta, u_\infty, h(x)\right)$

3.) Auflösen nach $\frac{\partial p}{\partial x} = f\left(\dot{V}, \eta, u_\infty, h(x)\right)$

4.) Integration von $\frac{\partial p}{\partial x}$:

$$\int_0^l \frac{\partial p}{\partial x}\left(\dot{V}, \eta, u_\infty, h(x)\right) = 0$$

mit $p(x=0) = p_\infty$ und $p(x=L) = p_\infty$

$$\rightarrow \int_0^l \frac{\partial p}{\partial x} dx = 0 \rightarrow f\left(\dot{V}, \eta, u_\infty\right) = 0$$

5.) Auflösen nach $\dot{V} = (\eta, u_\infty)$

6.) Einsetzen in $\dot{V}$ in $\frac{\partial p}{\partial x} = f\left(\dot{V}, \eta, u_\infty, h(x)\right)$

7.) Integration von $\frac{\partial p}{\partial x}$: $\int_0^x \frac{\partial p}{\partial x'}dx' \rightarrow p(x) = f(x, u_\infty, \eta)$

1. Bestimmung der Filmdicke h(x)

Ein Ausdruck für den Druckverlauf $p(x,y)$ kann durch Integration des y-Impuls bestimmt werden:

$$\int dp = -\int \rho g dy \rightarrow \underline{\underline{p(x,y) = -\rho g y + C_1}}$$

Mit der Randbedingung am Grenzschichtrand: $p(y = h(x)) = pa$ folgt:

$$p(y = h(x)) = pa = -\rho g h(x) + C_1 \rightarrow C_1 = pa + \rho g h(x)$$

$$\rightarrow \underline{\underline{p(x,y) = pa + \rho g(h(x) - y)}}$$

Eine nachfolgende Differentiation nach x ergibt den Druckgradienten:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(pa + \rho g(h(x) - y)) \rightarrow \underline{\underline{\frac{\partial p}{\partial x} = \rho g \frac{\partial h(x)}{\partial x}}}$$

1.) 2-fache Integration der DGL $\frac{\partial p}{\partial x} = \eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ in y-Richtung

$$\text{1. Integration:} \int \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy = \int \frac{1}{\eta}\frac{\partial p}{\partial x}dy \rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\eta}\frac{\partial p}{\partial x}y + C_1$$

$$\text{2. Interation :} \int \frac{\partial u}{\partial y}dy = \int \left(\frac{1}{\eta}\frac{\partial p}{\partial x}y + C_1\right)dy \rightarrow \underline{\underline{u(x,y) = \frac{1}{\eta}\frac{\partial p}{\partial x}y^2 + C_1 y + C_2}}$$

Lösen der Integrationskonstanten mit den Randbedingungen:

- Haftbedingung: $y = 0 \rightarrow u(x,y) = 0 \rightarrow C_2 = 0$
- Filmoberfläche: $y = h(x) \rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \rightarrow C_1 = -\frac{1}{\eta}\frac{\partial p}{\partial x}h(x)$

Damit ergibt sich das Geschwindigkeitsprofil

$$u(x,y) = -\frac{1}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial x}h^2(x)\left(2 - \frac{y}{h(x)}\right)\frac{y}{h(x)}$$

$$\underline{\underline{\rightarrow u(x,y) = -\frac{1}{2\eta}\rho g \frac{\partial h(x)}{\partial x}h^2(x)\left(2 - \frac{y}{h(x)}\right)\frac{y}{h(x)}}}$$

2.) $\dot{V} = konst.$

$$\dot{V} = B\int_0^{h(x)} u(x,y)dy$$

$$\rightarrow \dot{V} = -B\frac{1}{2\eta}\rho g\frac{\partial h(x)}{\partial x}h^2(x)\left[\frac{2}{h(x)}\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3h^2(x)}\right]_0^{h(x)}$$

$$\rightarrow \underline{\underline{\dot{V} = -B\frac{1}{3\eta}\rho g\frac{\partial h(x)}{\partial x}h^3(x)}}$$

Nun werden die Variablen getrennt und die DGL für $h(x)$ Integriert:

$$\int_{h_0}^{h(x)} h^3 dh = \int_0^x -\dot{V}\frac{3\eta}{\rho g B}dx$$

$$\rightarrow \frac{h^{4(x)}}{4} - \frac{h_0^4}{4} = -\dot{V}\frac{3\eta}{\rho g B}x$$

$$\rightarrow \underline{\underline{h(x) = \sqrt[4]{-\dot{V}\frac{12\eta}{\rho g B}x + h_0^4}}}$$

gültig für $x << 0$ (ausreichende Entfernung zur Vorderkante).