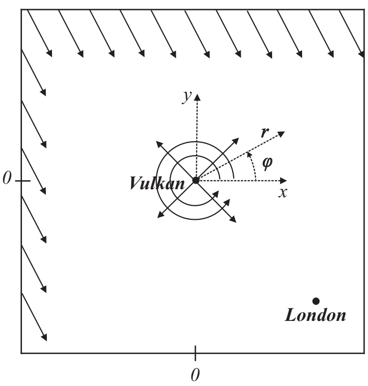
Tutorenprogramm - Strömungsmechanik II

Potentialströmung - Musterlösung

2. Aufgabe



Die Strömung wird durch folgende Potentialgleichung gegeben:

$$F(z) = (u_\infty - iv_\infty)z + \frac{E}{2\pi}\ln(z) - \frac{\Gamma}{2\pi} i \ln(z) \text{ mit } E > 0, \Gamma > 0$$

1. Ermitteln der Geschwindigkeitskomponenten $v_r(r,\phi)$ und $v_\phi(r,\phi)$ in Polarkoordinaten

- $z = r\cos(\phi) + ir\sin(\phi) = re^{i\phi}$
- $\ln(re^{i\phi}) = \ln(r) + i\phi$

$F(z) = (u_\infty - iv_\infty)(r\cos(\phi) + ir\sin(\phi)) + \frac{E}{2\pi}\ln(re^{i\phi}) - \frac{i\Gamma}{2\pi}\ln(re^{i\phi})$
$\rightarrow F(z) = u_\infty r\cos(\phi) + iu_\infty r\sin\phi - iv_\infty r\cos(\phi) + v_\infty r\sin(\phi) + \frac{E}{2\pi}\ln(r) + i\frac{E}{2\pi}\phi - \frac{i\Gamma}{2\pi}\ln(r) + \frac{\Gamma}{2\pi}\phi$

$\Phi(r,\phi) = Re(F(z)) = u_\infty r\cos(\phi) + v_\infty r\sin(\phi) + \frac{E}{2\pi}\ln(r) + \frac{\Gamma}{2\pi}\phi$
$\Psi(r,\phi) = Im(F(z)) = u_\infty r\sin(\phi) - v_\infty r\cos(\phi) + \frac{E}{2\pi}\phi - \frac{\Gamma}{2\pi}\ln(r)$

$\rightarrow v_r(r,\phi) = \frac{\partial \phi}{\partial r} = u_\infty \cos(\phi) + v_\infty \sin(\phi) + \frac{E}{2\pi r}$
$\rightarrow v_\phi(r,\phi) = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = -u_\infty \sin(\phi) + v_\infty \cos(\phi) + \frac{\Gamma}{2\pi r}$

2. Bestimmung von $v_\infty = v(E, \Gamma, u_\infty)$ mit Staupunkt bei $\phi = 45°$

Im Staupunkt sind $v_r = v_\phi = 0$

$$\rightarrow v_r = 0 \rightarrow v_\infty = -\frac{1}{\sin(\phi)} \left(u_\infty \cos(\phi) + \frac{E}{2\pi r} \right)$$

mit Staupunkt bei $\frac{\pi}{4} \rightarrow \phi = \phi_s = \frac{\pi}{4} \quad \rightarrow \quad \sin(\phi_s) = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \cos(\phi_s) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\rightarrow \underline{\underline{v_\infty = -\left(u_\infty + \frac{E}{\sqrt{2}\pi r} \right)}} \tag{1}$$

Die unbekannt r wird aus $v_\phi = 0$ bestimmt:

$$v_\phi = 0 \rightarrow -u_\infty + v_\infty + \frac{\Gamma}{\sqrt{2}\pi} r = 0$$

$$\rightarrow r = \frac{\Gamma}{\sqrt{2}\pi (u_\infty - v_\infty)} \tag{2}$$

Gl.(2) wird in Gl.(1) eingesetzt und nach v_∞ gelöst:

$$v_\infty = -\left(u_\infty + \frac{E}{\Gamma}(u_\infty - v_\infty) \right) \rightarrow \underline{\underline{v_\infty = \frac{E + \Gamma}{E - \Gamma} u_\infty}} \tag{3}$$

Nun werden die Staupunktskoordinaten in Polarkoordinaten bestimmt. Der Staupunkt soll auf der $\phi = \frac{\pi}{4}$ Linie liegen, damit muss nur noch r_s bestimmt werden $\rightarrow$ einsetzten von Gl.(3) in Gl.(2)

$$r_s = \frac{\Gamma}{\sqrt{2}\pi \left(u_\infty - \frac{E+\Gamma}{E-\Gamma} u_\infty \right)} \rightarrow \underline{\underline{r_s = -\frac{E - \Gamma}{2\sqrt{2}\pi u_\infty}}} \tag{4}$$

3. Stromfunktion für London Ψ_L und für den Ursprung Ψ_0

$\Psi(r,\phi) = u_\infty r \sin(\phi) - v_\infty r \cos(\phi) + \frac{E}{2\pi}\phi - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln(r)$

Für den Ursprung $(r = 0, \psi = 0)$:

$$\Psi(r = 0, \psi = 0) \rightarrow \infty$$

Für London ($r=1, \psi=-\frac{\pi}{4}$):

$$\Psi(r=1,\psi=-\frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(u_\infty+v_\infty) - \frac{E}{2\pi}\frac{\pi}{4} - \frac{\Gamma}{2\pi}\ln(1)$$

$$= -\frac{u_\infty}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{E+\Gamma}{E-\Gamma}\right) - \frac{E}{8} = -\frac{\sqrt{2}u_\infty E}{E-\Gamma} - \frac{E}{8}$$

4.

Berechne erst den Wert der Stromfunktion auf der Staupunktstromlinie Ψ_s. Der Ursprung liegt sicher in der Aschewolke (Quelle der Aschewolke liegt im Ursprung) und besitzt ein Maximum der Stromfunktion. Daher entscheide, ob $\Psi_L \in [\Psi_s, \Psi(0,0)]$. In diesem Fall befindet sich London unter der Aschewolke. Andernfalls befindet sich saubere Luft über London.

5. Stromlinienbild