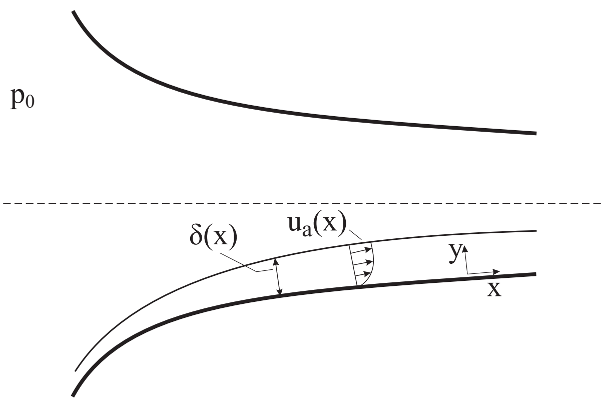
Tutorenprogramm - Strömungsmechanik II

Laminare Grenzschichten - Musterlösung

2. Aufgabe



Das Geschwindigkeitsprofil in der Grenzschicht ist gegeben durch:

$$\frac{u(x{,}y)}{u_a x} = a_0 + a_1 \sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{y}{\delta}\right)$$

(u_a=Geschwindigkeit der reibungsfreien Außenströmung). Der Druckverlauf wurde gemessen:

$$p(x) = p_0 - C\frac{x^2}{2}$$

1. Bestimmung der Koeffizienten a_0 und a_1

Zur Bestimmung der Koeffizienten stehen 5 Randbedingungen zur Verfügung:

1. Haftbedingung: $y = 0 \rightarrow u = v = 0$
2. Grenzschichtrand: $y = \delta \rightarrow u = u_a \rightarrow \frac{u}{u_a} = 1$
3. Wandbindungsgleichung (x-Impuls bei y=0): $\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big|_{y=0}$

4. Glatterübergang am GS-Rand (kein Knick): $y = \delta \rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = 0$

5. Glatterübergang am GS-Rand (keine Krümmung): $y = \delta \rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

Dabei sind die ersten 3 RBs physikalische RBs und die beiden letzten mathematische. Die Reihenfolge der RBs ist unbedingt beizubehalten! Hier: 2 Koeffizienten $\rightarrow$ benutze die ersten beiden RBs.

1.RB: $y = 0 \rightarrow u = 0 \rightarrow \frac{u}{u_a} = 0 = a_0 + a_1 \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{0}{\delta}\right)}_{0} \rightarrow a_0 = 0$

2.RB: $y = \delta \rightarrow \frac{u}{u_a} \rightarrow \frac{u}{u_a} = 1 = a_1 \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{\delta}{\delta}\right)}_{1} \rightarrow a_1 = 1$

$$\underline{\underline{\frac{u(x,y)}{u_a} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{y}{\delta}\right)}}$$

2. Bestimmung der Außengeschwindigkeit $u_a(x)$ unter der Bedingung $u_a(x = 0) = 0$

Ansatz: Bernoulli am GS-Rand

$$p_{tot} = p_{stat}(x) + \frac{1}{2}\rho u_a(x)^2 = konst.$$

Bernoulli: $0 \rightarrow x$

$$p(x = 0) + \frac{1}{2}\rho \underbrace{u_a(x = 0)^2}_{0} = p(x) + \frac{1}{2}\rho u_a(x)^2$$

mit $p(x = 0) = p_0$ und $p(x) = p_0 - C\frac{x^2}{2}$ folgt:

$$p_0 = p_0 - C\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\rho u_a(x)^2 \rightarrow \underline{\underline{u_a(x) = x\sqrt{\frac{C}{\rho}}}}$$

3. Bestimmung von δ_1, δ_2 und $\tau(y = 0)$

- $\frac{\delta_1}{\delta} = \int_0^1 \left(1 - \frac{u}{u_a}\right) d\left(\frac{y}{\delta}\right)$

$$\delta_1 = \delta \int_0^1 \left(1 - \sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{y}{\delta}\right)\right) d\left(\frac{y}{\delta}\right) = \delta\left[\frac{y}{\delta} + \frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{y}{\delta}\right)\right]_0^1$$

$$\rightarrow \underline{\underline{\delta_1 = \left(1 - \frac{2}{\pi}\right)\delta = k_1\delta}}$$

- $\frac{\delta_2}{\delta} = \int_0^1 \left(\frac{u}{u_a}\right)\left(1 - \frac{u}{u_a}\right) d\left(\frac{y}{\delta}\right)$

$$\delta_2 = \delta \int_0^1 \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{y}{\delta}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\frac{y}{\delta}\right)\right) d\left(\frac{y}{\delta}\right)$$

Mit der Integrationshilfe aus dem Hinweis folgt:

$$\delta_2 = \delta\left[-\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{y}{\delta}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right) + \frac{1}{2\pi}\sin\left(\frac{\pi y}{\delta}\right)\right]_0^1$$

$$\rightarrow \underline{\underline{\delta_2 = \left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2}\right)\delta = k_2\delta}}$$

- $\tau(y=0) = -\tau_w \quad \text{mit} \quad \tau_w = \eta\frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0} \rightarrow \tau(y=0) = -\eta\frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0}$

Tipp - zur einfacheren differentiation nutze:

$$\tau(y=0) = -\eta\frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0} \rightarrow \underline{\underline{\tau(y=0) = -\eta\frac{u_a}{\delta}\frac{\partial\left(\frac{u}{u_a}\right)}{\partial\left(\frac{y}{\delta}\right)|_{y=0}}}}$$

Herleitung:

$$\tau_w = \eta\frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{y=0} = \eta\frac{\partial u \cdot \left(\frac{u_a}{u_a}\right)}{\partial y \cdot \left(\frac{\delta}{\delta}\right)}\bigg|_{y=0} = \eta\frac{\partial\left(u_a\frac{u}{u_a}\right)}{\partial\left(\delta\ \frac{y}{\delta}\right)}\bigg|_{\frac{y}{\delta}=0}$$

mit Produktregel:

- $\partial\left(u_a\frac{u}{u_a}\right) = u_a\partial\left(\frac{u}{u_a}\right) + \left(\frac{u}{u_a}\right)\cancelto{0}{\partial u_a} = u_a\partial\left(\frac{u}{u_a}\right)$
- $\partial\left(\delta\frac{y}{\delta}\right) = \delta\partial\left(\frac{y}{\delta}\right) + \left(\frac{y}{\delta}\right)\cancelto{0}{\partial\delta} = \delta\partial\left(\frac{y}{\delta}\right)$

$$\rightarrow \tau_w = \eta\frac{u_a}{\delta}\frac{\partial\left(\frac{u}{u_a}\right)}{\partial\left(\frac{y}{\delta}\right)}\bigg|_{\frac{y}{\delta}=0}$$

$$\tau(y=0) = -\eta\frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{y=0} = -\ \eta\frac{u_a}{\delta}\frac{\partial\left(\frac{u}{u_a}\right)}{\partial\left(\frac{y}{\delta}\right)}\bigg|_{\frac{y}{\delta}=0} = \eta\frac{u_a}{\delta}\frac{\partial\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{y}{\delta}\right)\right)}{\partial\left(\frac{y}{\delta}\right)}\bigg|_{\frac{y}{\delta}=0}$$

$$\rightarrow \underline{\underline{\tau(y=0) = -\eta\frac{u_a\pi}{2\delta}}}$$

4. Bestimmung des Grenzschichtverlaufs $\delta(x)$

$\delta(x)$ aus Kármán'scher Integralbeziehung:

$$\frac{d\delta_2}{dx} + \frac{1}{u_a}\frac{du_a}{dx}\left(2\delta_2 + \delta_1\right) + \frac{\tau(y=0)}{\rho u_a^2} \tag{1}$$

Einsetzten der Ausdrücke für δ_1, δ_2 und $\tau(y=0)$ aus 3.), sowie $u_a(x)$ aus 2.) liefert

$$k_2\frac{d\delta}{dx} + \sqrt{\frac{\rho}{C}}\frac{1}{x}\sqrt{\frac{C}{\rho}}\left(2k_2 + k_1\right)\delta - \frac{\eta\pi\rho x}{2\delta\rho x^2 C}\sqrt{\frac{C}{\rho}} = 0$$

$$\rightarrow k_2\frac{d\delta}{dx} + (2k_2 + k_1)\frac{\delta}{x} - \frac{\eta\pi}{2\sqrt{C\rho}}\frac{1}{x\delta} = 0 \tag{2}$$

Zur Integration wird die Integrationshilfe aus dem Hinweis zu Hilfe genommen. Dafür wird Gleichung 2 auf die Form

$$\frac{d\delta(x)}{dx} + \Gamma\frac{\delta(x)}{x} - \Omega\frac{1}{\delta(x)x} = 0$$

gebracht:

$$\rightarrow \frac{d\delta}{dx} + \underbrace{\frac{(2k_2 + k_1)}{k_2}}_{\Gamma}\frac{\delta}{x} - \underbrace{\frac{\eta\pi}{2\sqrt{C\rho}k_2}}_{\Omega}\frac{1}{x\delta} = 0$$

$$\frac{d\delta}{dx} = \Omega\frac{1}{\delta} - \Gamma\frac{\delta}{x} = \left(\Omega\frac{1}{\delta(x)} - \Gamma\delta\right)\frac{1}{x} = \left(\frac{\Omega - \Gamma\delta^2}{\delta}\right)\frac{1}{x}$$

Nun werden die Variablen getrennt

$$\int\left(\frac{\delta}{\Omega - \Gamma\delta^2}\right)d\delta = \frac{1}{\Gamma}\int\left(\frac{\delta}{\frac{\Omega}{\Gamma} - \delta^2}\right)d\delta = \int\frac{1}{x}dx$$

Mit der Integrationshilfe:

$$\rightarrow \frac{1}{\Gamma}\int\left(\frac{\delta}{\frac{\Omega}{\Gamma} - \delta^2}\right)d\delta = -\frac{1}{2\Gamma}\ln\left(\left(\frac{\Omega}{\Gamma}\right) - \delta^2\right)\Bigg|_{\delta_0}^{\delta(x)} =$$

$$-\frac{1}{2\Gamma}\ln\left(\left(\frac{\Omega}{\Gamma}\right) - \delta^2(x)\right) + \frac{1}{2\Gamma}\ln\left(\left(\frac{\Omega}{\Gamma}\right) - \delta_0^2\right) =$$

$$\underline{\underline{-\frac{1}{2\Gamma}\ln\left[\frac{\left(\frac{\Omega}{\Gamma}\right) - \delta^2(x)}{\left(\frac{\Omega}{\Gamma}\right) - \delta_0^2}\right]}}$$

$$\rightarrow -\frac{1}{2\Gamma}\ln\left[\frac{\left(\frac{\Omega}{\Gamma}\right)-\delta^2(x)}{\left(\frac{\Omega}{\Gamma}\right)-\delta_0^2}\right]=\ln\left(\frac{x}{x_0}\right)$$

Diese Gleichung wird nun nach $\delta(x)$ gelöst:

$$-\frac{1}{2\Gamma}\ln\left[\frac{\left(\frac{\Omega}{\Gamma}\right)-\delta^2(x)}{\left(\frac{\Omega}{\Gamma}\right)-\delta_0^2}\right]=\ln\left(\frac{x}{x_0}\right)\rightarrow\left(\frac{\left(\frac{\Omega}{\Gamma}\right)-\delta^2(x)}{\left(\frac{\Omega}{\Gamma}\right)-\delta_0^2}\right)^{-\frac{1}{2\Gamma}}=\frac{x}{x_0}$$

$$\rightarrow\left(\frac{\Omega}{\Gamma}\right)-\delta(x)^2=\left[\left(\frac{\Omega}{\Gamma}\right)-\delta_0^2\right]\left(\frac{x}{x_0}\right)^{-2\Gamma}$$

$$\rightarrow \underline{\underline{\delta(x)=\sqrt{\left(\frac{\Omega}{\Gamma}\right)-\left[\frac{\Omega}{\Gamma}-\delta_0^2\right]\left(\frac{x}{x_0}\right)^{-2\Gamma}}}}$$