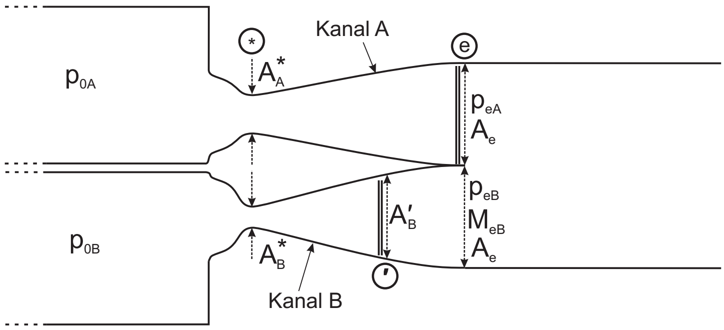
Tutorenprogramm - Strömungsmechanik II

Kompressible Strömungen - Musterlösung

4. Aufgabe



Annahmen für die Theorie:

- (quasi)1D ($v << u$)
- stationär
- adiabat
- reibungsfrei
- kompressibel ($\rho \neq konst., \partial\rho \neq 0$)

1.Hauptsatz für stationäre Fließprozesse:

$\dot{Q}_{12} + P_{12} = \dot{m}\left[h_2 - h_1 + \frac{1}{2}(u_2^2 - u_1^2) + \vec{g}(z_2 - z_1)\right] = 0$

mit $\dot{Q}_{12} + P_{12} = 0$, da adiabate Düsenströmung und $\vec{g}(z_2 - z_1) = 0$, da 1D betrachtung.

$\rightarrow h_2 + \frac{1}{2}u_2^2 = h_1 + \frac{1}{2}u_1^2$ mit der Definition der Totalenthalpie: $h_0 = h + \frac{1}{2}u^2$ folgt

$$\underline{\underline{h_0 = h_{01} = h_{02} = konst.}}$$

1. Herleitung $\frac{T_0}{T} = f(Ma)$

$h_0 = h + \frac{1}{2}u^2$ mit $h = c_p T$ und $c_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$

$c_p T_0 = c_p T + \frac{1}{2}u^2$

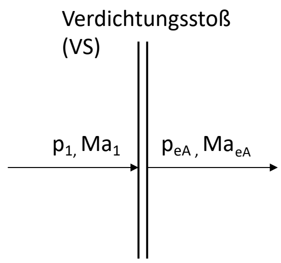
$\frac{\gamma R T_0}{\gamma-1} = \frac{\gamma R T}{\gamma-1} + \frac{1}{2}u^2 \qquad | : \frac{\gamma R T}{\gamma - 1}$

$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma-1}{2\gamma R T}u^2$ mit der Definition der Schallgeschwindigkeit: $c = \sqrt{\gamma R T}$

$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma-1}{2}\frac{u^2}{c^2}$ mit der Definition der Machzahl: $Ma = \frac{u}{c}$ folgt

$$\underline{\underline{\frac{T_0}{T} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2\right)}} \tag{1}$$

2. Statischer Druck im Endquerschnitt e hinter dem Stoß im Kanal A



Zur Berechnung des Austrittsdrucks p_{eA} wird die Gleichung für das statische Druckverhältnis aus dem Hinweis genutzt:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{p_{eA}}{p_1} = \frac{2\gamma Ma_1^2 - (\gamma - 1)}{\gamma + 1}$$

$$\underline{\underline{p_{eA} = p_1 \left(\frac{2\gamma Ma_1^2 - (\gamma - 1)}{\gamma + 1}\right)}} \tag{2}$$

$\rightarrow Ma_1 = ?, p_1 = ?$

In einer Düsenströmung ist die Machzahl an einer beliebigen Stelle x nur abhängig vom lokalen Flächenverhältnis $\frac{A^*}{A(x)}$ und dem Isentropenexponenten

γ ($\gamma_{Luft} = 1.4$). Der Verdichtungsstoß ist eine Diskontinuität, und hat eine Breite von einer mittleren freien Weglänge von Molekülen $\rightarrow A_{eA} = A_1$. Hier:

$$\frac{A^*}{A} = \frac{A_A^*}{A_{eA}} = \frac{1}{2}$$

Damit folgt aus Abbildung 1 und dem Flächenverhältnis $\frac{A^*}{A_{eA}} = 0.5$ zwei

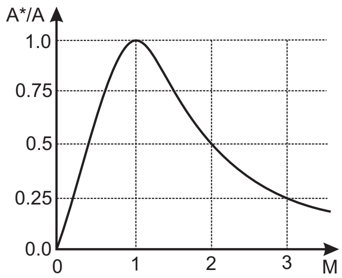


Abbildung 1: Flächenverhältnis als Funktion der Machzahl

mögliche Machzahlen, eine Unterschall- und eine Überschalllösung. Da sich der Verdichtungsstoß nur im Überschall einstellen kann, muss hier zur Bestimmung der Machzahl vor dem Stoß (Ma_1) die Überschalllösung gewählt werden.

$$\rightarrow \underline{\underline{Ma_1 = 2}}$$

Nun muss nur noch der statische Druck p_1 bestimmt werden. Dazu werden die Isentropenbeziehungen benutzt.

- $\frac{T}{T_0} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma^2\right)^{-1}$
- $\frac{p}{p_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma^2\right)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}}$
- $\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma^2\right)^{-\frac{1}{\gamma-1}}$

$$\rightarrow \frac{p}{p_0} = \frac{p_1}{p_{0A}} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma_1^2\right)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$\underline{\underline{p_1 = p_{0A} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma_1^2\right)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}}}} \tag{3}$$

Damit ergibt sich der statische Düsenaustrittsdruck aus Gleichung 4 und 3 zu:

$$\underline{\underline{p_{eA} = p_{0A} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma_1^2\right)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}} \left(\frac{2\gamma Ma_1^2 - (\gamma-1)}{\gamma+1}\right)}} \tag{4}$$

3. statischer Druck p_{eB} in Kanalaustriit B, wenn sich die Strömung in diesem Querschnitt in beiden Kanälen im Unterschall befindet

Die Strömung in beiden Kanälen befindet sich im Unterschall, d.h. keine Verdichtungsstöße. Die Austrittsquerschnitte der beiden Kanäle sind miteinander verbunden. Der statische Druck im Querschnitt e von Kanal B entspricht dem statischen Druck in Querschnitt e in Kanal A, d.h es stellt sich ein Druckgleichgewicht ein:

$$p_{eB} = p_{eA} = p_{0A}\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma_{1,sub}^2\right)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}} \left(\frac{2\gamma Ma_{1,sub}^2 - (\gamma - 1)}{\gamma + 1}\right) \tag{5}$$

wobei $Ma_{1,sub} = Ma_{eA}$ der Machzahl im Austrittsquerschnitt des Kanals A entspricht. Mit $\frac{A^*}{A_{eA}} = 0.5$ ergibt sich Ma_{eA} aus der Unterschalllösung aus Abbildung 1 zu $Ma_{eA} \approx 0.3$.

4. Bestimmung des Kesseldrucks p_{0B}

Vom Kessel bis vor den Stoß, sowie nach dem Stoß bis zum Austritt ist die Strömung Isentrop. Über den Stoß selbst dissipiert Energie, so dass der Totaldruck hinter dem Stoß $p_{02,B}$ kleiner ist als der Kesseldruck $p_{0,B}$. Der Verdichtungsstoß steht bei $\frac{A_B^*}{A_B'} = \frac{1}{4}$. Damit ergibt sich die Machzahl vor dem Stoß zu $Ma_{1,B} = 3$. Das Totaldruckverhältnis über den Stoß lässt sich mit der Gleichung aus dem Hinweis bestimmen:

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{p_{02,B}}{p_{0,B}} = \left(\frac{\frac{\gamma+1}{2} Ma_{1,B}^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma_{1,B}^2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \left(\frac{2\gamma Ma_{1,B}^2 - (\gamma - 1)}{\gamma + 1}\right)^{-\frac{1}{\gamma-1}}$$

$$\rightarrow \underline{\underline{p_{0,B} = p_{02,B} \left(\frac{\frac{\gamma+1}{2} Ma_{1,B}^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma_{1,B}^2}\right)^{\frac{-\gamma}{\gamma-1}} \left(\frac{2\gamma Ma_{1,B}^2 - (\gamma - 1)}{\gamma + 1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}}} \tag{6}$$

$p_{02,B} =?$

Hinter dem Stoß ist die Strömung wieder Isentrop, damit lässt sich der Totaldruck hinter dem Stoß ($p_{02,B}$) über das Isentropenverhältnis bestimmen. Dazu bestimmen wir das Druckverhältnis im Austrittsquerschnitt des Kanals B, da dort die Austrittsmachzahl Ma_{eB} bereits gegeben ist.

$$\frac{p}{p_0} = \frac{p_{eB}}{p_{02,B}} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma_{eB}^2\right)^{\frac{-\gamma}{\gamma-1}}$$

$$\rightarrow \underline{\underline{p_{02,B} = p_{e,B}\left(1+\frac{\gamma-1}{2}Ma_{eB}^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}} \tag{7}$$

Mit $p_{e,B} = p_{eA}$ und p_{eA} aus Gleichung 4 folgt:

$$p_{0,B} = p_{0A}\left(1+\frac{\gamma-1}{2}Ma_1^2\right)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}}\left(\frac{2\gamma Ma_1^2-(\gamma-1)}{\gamma+1}\right)\left(1+\frac{\gamma-1}{2}Ma_{eB}^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$\left(\frac{\frac{\gamma+1}{2}Ma_{1,B}^2}{1+\frac{\gamma-1}{2}Ma_{1,B}^2}\right)^{\frac{-\gamma}{\gamma-1}}\left(\frac{2\gamma Ma_{1,B}^2-(\gamma-1)}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

5. Machzahlverläufe