Tutorenprogramm - Strömungsmechanik II

Kompressible Strömungen - Musterlösung

1. Aufgabe

1. Energiegleichung:

$$\tilde{c_p} T_0 = \tilde{c_p} T + \frac{u^2}{2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{T_0}{T} = 1 + \frac{u^2}{2\tilde{c_p} T}$$
$$\Rightarrow \frac{T_0}{T} = 1 + \frac{u^2(\gamma - 1)}{2\gamma RT}$$

Schallgeschwindigkeit: $c = \sqrt{\gamma RT}$

$$\Rightarrow \frac{T_0}{T} = 1 + \underbrace{\frac{u^2}{c^2}}_{M^2} \cdot \frac{\gamma - 1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{T_0}{T} = 1 + M^2 \cdot \frac{\gamma - 1}{2}$$

mit Isentropenbeziehung:

$$\Rightarrow \frac{p}{p_0} = \left(1 + M^2 \cdot \frac{\gamma - 1}{2}\right)^{-\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

2.

$$c_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{\rho_\infty}{2} u_\infty^2} = \frac{(\frac{p}{p_\infty} - 1)p_\infty}{\frac{\rho_\infty}{2} M_\infty^2 c_\infty^2}$$

mit Schallgeschwindigkeit: $c_\infty = \sqrt{\gamma RT_\infty}$

$$c_p = \frac{(\frac{p}{p_\infty} - 1)p_\infty}{\frac{\rho_\infty}{2} M_\infty^2 \gamma RT_\infty}$$

mit idealem Gasgesetz: $p_\infty = \rho_\infty RT_\infty$

$$c_p = \frac{2}{\gamma M_\infty^2} \left(\frac{p}{p_\infty} - 1\right)$$

3.

$$M = 1 \Rightarrow \frac{p}{p_\infty} = \frac{p^*}{p_\infty} = \frac{p^*}{p_0} \cdot \left(\frac{p_\infty}{p_0}\right)^{-1} = \left(\frac{1 + M_\infty^2 \cdot \frac{\gamma - 1}{2}}{1 + \frac{\gamma - 1}{2}}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

mit $\quad \frac{p^*}{p_0} = \frac{p}{p_0}(M = 1) \quad$ siehe a) $\quad$ und $\quad \frac{p_\infty}{p_0} = \frac{p}{p_0}(M_\infty) \quad$ siehe a)

$$\Rightarrow c_{p,A} = \frac{2}{\gamma M_\infty^2} \left(\left(\frac{1 + M_\infty^2 \cdot \frac{\gamma - 1}{2}}{1 + \frac{\gamma - 1}{2}}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} - 1\right)$$

Quelle: Herbst 2013

2. Aufgabe

1. Energiegleichung:
$c_p T + \frac{u^2}{2} = c_p T^* + \frac{u^{*2}}{2}$
$c^2 + \frac{\gamma-1}{2} u^2 = c^{*2} + \frac{\gamma-1}{2} c^{*2} = \frac{\gamma+1}{2} c^{*2}$,d.h.
$\frac{1}{M^2} + \frac{\gamma-1}{2} = \frac{\gamma+1}{2} \frac{1}{M^{*2}}$
$M^{*2} = \frac{(\gamma+1)M^2}{2+(\gamma-1)M^2}; \quad M^2 = \frac{2M^{*2}}{(\gamma+1)-(\gamma-1)M^{*2}}$

2. $\lim_{M\to\infty} \left(M^{*2}\right) = \lim_{M\to\infty} \left(\frac{\gamma+1}{2/M^2+(\gamma-1)}\right) \Rightarrow M^*_{M\to\infty} \to \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}$

3. $M_1^* M_2^* = 1$, d.h. $M_2^* = \frac{1}{M_1^*}$
Aus 1. ist bekannt, dass $M^*(M)$ eine streng monotone Funktion der Machzahl M mit $M_{2,min} = M_2(M^*_{2,min}) = M_2(M^*_{1,max}) = M_2(M_{1,max})$ ist.
$M_{2,min} = M_2(M_1 \to \infty)$, d.h. die minimale Machzahl hinter dem Stoss, stellt sich ein, wenn die Machzahl vor dem Stoss gegen ∞ geht. Es gilt dabei mit dem Ergenis aus 1.:
$M^{*2}_{2,min} = \frac{1}{M^{*2}_{1,max}} = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}$ aus 2.
Einsetzen in Gleichung für $M(M^*)$:
$M^2_{2,min} = \frac{2\left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)}{(\gamma+1)-(\gamma-1)\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} = \frac{2(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2-(\gamma-1)^2} = \frac{\gamma-1}{2\gamma}$, d.h.
$M_{2,min} = \sqrt{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} = 0.378$

Quelle: Herbst 2012

3. Aufgabe

1. Temperaturverhältnis $\frac{T}{T_0}$

$$h_0 = h + \frac{1}{2}u^2 \Rightarrow c_pT_0 = c_pT + \frac{1}{2}\gamma RTM^2$$

mit $h = c_pT$, $c_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$, und $u = M\sqrt{\gamma RT}$

$$\Rightarrow \frac{T}{T_0} = \left(1 + \frac{(\gamma-1)}{2}M^2\right)^{-1}$$

Temperatur am Austritt
mit $M = 1$ (engster Querschnitt und $\frac{p_a}{p_0} = \frac{1}{5} < 0,5280$)

$$T = T^* = \frac{2}{\gamma+1}T_0$$

Geschwindigkeit u am Austritt

$$u = c^* = \sqrt{\gamma RT^*}$$

2. Massenstrom $\dot{m}$

$$\dot{m} = \varrho^* c^* A^*$$

Mit $A^* = A_{aus}$ folgt:

$$\begin{aligned}\dot{m} &= \frac{\varrho^*(t)}{\varrho_0(t)}\varrho_0(t)\sqrt{\gamma R\frac{T^*}{T_0}T_0}A_{aus} \\ &= \left(\frac{T^*}{T_0}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}\frac{p_0(t)}{RT_0}\sqrt{\gamma R\frac{T^*}{T_0}T_0}A_{aus} \\ &= \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}p_0(t)\sqrt{\frac{\gamma}{RT_0}}\sqrt{\frac{2}{\gamma+1}}A_{aus} \\ &= \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}\sqrt{\frac{\gamma}{RT_0}}A_{aus}p_0(t)\end{aligned}$$

$\Rightarrow \dot{m} = C_1 p_0(t)$ mit $C_1 = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}\sqrt{\frac{\gamma}{RT_0}}A_{aus}$

3. austretende Masse Δm

$$\Delta m = -V(\varrho_0(t_e) - \varrho_0(t_0))$$

mit $\varrho = \frac{p_0}{RT_0}$ und $T_0 = konst.$

$$\Delta m = \frac{V}{RT_0}(p_0(t_0) - p_0(t_e))$$

$\Rightarrow$ kritisches Druckverhältnis

$$p_0(t_e) = \frac{p_0(t_e)}{p_a}p_a = \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}p_a$$

$$\Rightarrow \Delta m = \frac{V}{RT_0}\left(p_0(t_0) - \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}p_a\right)$$

d) zeitlicher Verlauf des Druckes $p_0(t)$ in der Flasche

$$\dot{m}(t) = -V\frac{d\varrho_0(t)}{dt} = -V\frac{d}{dt}\left(\frac{p_0(t)}{RT_0}\right)$$

aus 2. folgt

$$-\frac{V}{RT_0}\frac{dp_0(t)}{dt} = C_1 p_0(t)$$

$$\Rightarrow -\frac{C_1 RT_0}{V}p_0(t) = \frac{dp_0(t)}{dt} \Rightarrow -\frac{C_1 RT_0}{V}dt = \frac{1}{p_0(t)}dp_0(t)$$

$$\Rightarrow p_0(t) = p_0(t_0)e^{\left(\frac{-C_1 RT_0 t}{V}\right)}$$

Quelle: Herbst 2010

4. Aufgabe

1. Temperaturverhältnis:

$$c_p T_0 = c_p T + \frac{u^2}{2}$$

$$c_p T_0 = c_p T + \frac{M^2 \gamma R T}{2}$$

$$\text{mit} \quad c_P = \frac{\gamma}{\gamma - 1} R$$

$$c_p T_0 = c_p T \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)$$

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2$$

2. Kanal A:

Mit $A_A^*/A_e = 0.5$ folgt aus Diagramm: $M_{eA,1} = 2$

aus $\dfrac{T_0}{T} = 1 + \dfrac{\gamma - 1}{2} M^2$ folgt mit $\dfrac{T}{T_0} = \left(\dfrac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$:

$$p_{eA,1} = p_{0A} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_{eA,1}^2\right)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$\text{mit} \ \frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)}{\gamma + 1}$$

$$\Rightarrow p_{eA} = p_{eA,2} = p_{eA,1} \left[\frac{2\gamma M_{eA,1}^2 - (\gamma - 1)}{\gamma + 1}\right]$$

$$= p_{0A} \left[1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_{eA,1}^2\right]^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}} \left[\frac{2\gamma M_{eA,1}^2 - (\gamma - 1)}{\gamma + 1}\right]$$

$$= p_{0A} \left[2\gamma - 1\right]^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}} \left[\frac{7\gamma + 1}{\gamma + 1}\right]$$

3. Der statische Druck im Querschnitt e von Kanal B entspricht dem statischen Druck in Querschnitt e in Kanal A, also $p_{eB} = p_{eA} = p_{0A} \left[1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{eA,1}^2\right]^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}} \left[1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1}\left(M_{eA,1}^2 - 1\right)\right]$.

4. Kanal B:

$$p_{0B,2} = p_{0B,e} = p_{eA} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_{eB}^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

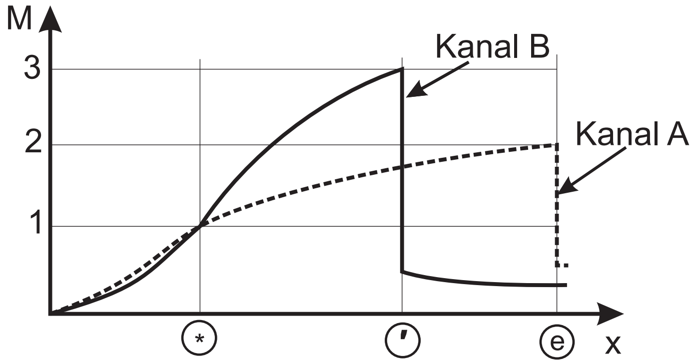
Mit $A_B^*/A_B' = 0.25$ folgt aus Diagramm: $M_{B,1}' = 3$

$$\text{Aus b):} \ p_{0B} = p_{0B,1} = p_{0B,2} \left(\frac{\frac{\gamma+1}{2} M_{B,1}'^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{B,1}'^2}\right)^{\frac{-\gamma}{\gamma-1}} \left(\frac{2\gamma M_{B,1}'^2 - (\gamma - 1)}{\gamma + 1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

$$= p_{eA} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_{eB}^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \left(\frac{\frac{\gamma+1}{2} M_{B,1}'^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{B,1}'^2}\right)^{\frac{-\gamma}{\gamma-1}} \left(\frac{2\gamma M_{B,1}'^2 - (\gamma - 1)}{\gamma + 1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

$$= p_{eA} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_{eB}^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \left(\frac{4.5(\gamma + 1)}{4.5\gamma - 3.5}\right)^{\frac{-\gamma}{\gamma-1}} \left(\frac{17\gamma + 1}{\gamma + 1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

5. Machzahlverläufe



Quelle: Herbst 2011