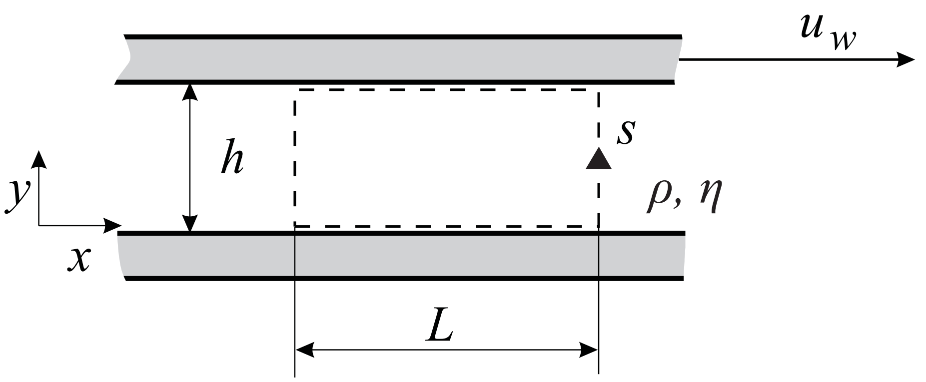
Tutorenprogramm - Strömungsmechanik II

Grundgleichungen strömender Fluide - Musterlösung

2. Aufgabe

1. Vereinfachung der Erhaltungsgleichungen für Masse und Impuls



Vereinfachungen aus Aufgabentext:

- $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$
- stationär: $\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$, ($\phi$ steht für eine beliebige Variable, d.h. alle partiellen Ableitungen nach der Zeit sind $= 0$)
- ausgeblidet: $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$
- inkompressibel: $\rho =$ konst. bzw. $\partial \rho = 0$

Vereinfachung der Erhaltungsgleichungen für Masse und Impuls unter Annahme einer ebenen Strömung (2D,$z = 0$, $w = 0$)

Massenerhaltung:

$$\frac{d\rho}{dt} = \rho \left(\nabla \cdot \vec{v}\right) = 0$$

Hierbei entspricht $\frac{d}{dt}$ dem substantiellen Differential, mit

$$\frac{d}{dt} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}}_{lokales\ diff.} + \underbrace{u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + \cancel{w\frac{\partial}{\partial z}}}_{konvektiver\ term} \quad 0, da\ 2D$$

Damit folgt für die Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u\frac{\partial \rho}{\partial x} + v\frac{\partial \rho}{\partial v} + \rho\left(\nabla \cdot \vec{v}\right) = 0.$$

Einsetzen der Vereinfachungen $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial \rho}{\partial y} = 0$, da $\rho =$konst., liefert:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0$$

Nabla ist der Vektor der partiellen Ableitungen und $\vec{v}$ der Geschwindigkeitsvektor, sodass das Skalarprodukt $div(\vec{v})$:

$$\nabla \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

Für die ausgebildete Strömung ist $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$. Damit folgt die vereinfachte Kontinuitätsgleichung

$$\underline{\underline{\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \to v = konst.}}$$

Die vertikale Geschwindigkeitskomponente v ist im gesamten Strömungsfeld konstant. Durch die Haftbedingung an der Wand $(v(y = 0) = 0)$, stellen wir fest, dass im gesamten Strömungsfeld gilt $\underline{\underline{v = 0}}$.

Impulserhaltung (Navier-Stokes-Gleichung) für eine eben (2D) Strömung

$$\rho\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho\left(\vec{v} \cdot \nabla\right)\vec{v} = -\nabla p + \nabla \cdot \tau$$

mit

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \tau = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} \end{pmatrix}$$

folgt

$$\rho\left(\frac{\partial \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}}{\partial t} + \underbrace{\left[\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}\right]}_{1} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right) = -\begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} \end{pmatrix}}_{2}$$

Ausdruck 1: Achtung! Für den Nabla Operator gilt das Komutativgesetz nicht $\rightarrow \nabla \cdot \vec{v} \neq \vec{v} \cdot \nabla$

$$(\vec{v} \cdot \nabla)\,\vec{v} = \left[\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \left[u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y}\right] \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} \\ u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Ausdruck 2:
Hier soll das Skalarprodukt aus einem Vektor und einer Matrix gebildet werden, dafür muss folgende Operation durchgeführt werden:

- Vector $\vec{c} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}$
- Dyade/Matrix $\underline{A} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} \end{pmatrix}$

$$\vec{c} \cdot \underline{A} = \underline{A}^T \cdot \vec{c}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich die Impulsgleichung zu:

$$\rho\left[\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} \\ u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}\right] = -\begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Hierbei entspricht die erste Zeile dem x-Impuls und die zweite Zeile dem y-Impuls. Einsetzen der Vereinfachungen:

- $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, ausgebildete Strömung
- $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$, kein Druckgradient in x-Richtung
- $\frac{\partial}{\partial t} = 0$, stationär
- $\rho = konst. \rightarrow \partial\rho = 0$
- $v = 0$, aus Konti.

liefert die vereinfachte Impulserhaltungsgleichung:

x-Impuls: $\quad 0 = \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}$
y-Impuls: $\quad 0 = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y}$

2. Bestimmung der Geschwindigkeitsverteilung $u(x,y)$ für ein Newton'sches Fluid

x-Impuls: $\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0$

mit Hinweis: $\tau_{xx} = 2\eta \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \tau_{yy} = 2\eta \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \tau_{xy} = \eta \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$

$$\rightarrow \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(2\eta \cancelto{0}{\frac{\partial u}{\partial x}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\eta\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \cancelto{0}{\frac{\partial v}{\partial x}}\right)\right) = 0 \rightarrow \underline{\underline{\eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0}}$$

2-fache Integration nach y liefert das Geschwindigkeitsprofil.
1. Integration:

$$\int \eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy = \int 0 dy \rightarrow \eta \frac{\partial u}{\partial y} = C_1 \rightarrow \underline{\underline{\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{C_1}{\eta}}}$$

2. Integration

$$\int \frac{\partial u}{\partial y} dy = \int \frac{C_1}{\eta} dy \rightarrow \underline{\underline{u(y) = \frac{C_1}{\eta} y + C_2}}$$

Bestimmen der Integrationskonstanten C_1 & C_2 mittels Randbedingungen:

- 1.RB - Haftbedingung $\rightarrow u(y=0) = 0 \rightarrow C_2 = 0$
- 2.RB - $u(y=h) = u_w \rightarrow u_w = \frac{C_1}{\eta} h \rightarrow C_1 = \frac{u_w \eta}{h}$

Daraus folgt das Geschwindigkeitsprofil:

$$\underline{\underline{u(y) = \frac{u_w}{h} y}} \qquad \text{"Couette-Strömung"}$$