Tutorenprogramm - Strömungsmechanik II

Gemischte Aufgaben - Musterlösung

1. Aufgabe

1. 90° gedrehter Dipol: Multiplikation mit $i \quad \Rightarrow \quad F(z) = \dfrac{iM}{2\pi z}$

   - oder -

   Drehung mittels $\varphi^* = \varphi - \dfrac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad F(z) = \dfrac{M}{2\pi r e^{i(\varphi-\pi/2)}}$

   $= \dfrac{M}{2\pi r e^{i\varphi}} e^{i\pi/2} = \dfrac{M}{2\pi z}\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{iM}{2\pi z}$

   Komplexe Potentialfunktion des gesamten Strömungsfeldes: $F(z) = \dfrac{iM}{2\pi z} + u_\infty z$

2. $\Psi = \dfrac{Mx}{2\pi(x^2+y^2)} + u_\infty y \quad$ oder $\quad \Phi = \dfrac{My}{2\pi(x^2+y^2)} + u_\infty x$

   $u = \dfrac{\partial\Phi}{\partial x} = -\dfrac{2Mxy}{2\pi(x^2+y^2)^2} + u_\infty = -\dfrac{M\sin\varphi\cos\varphi}{\pi r^2} + 1$

   $v = \dfrac{M(x^2-y^2)}{2\pi(x^2+y^2)^2} = \dfrac{M(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)}{2\pi r^2}$

3. $v = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin^2\varphi = \cos^2\varphi \quad \Leftrightarrow \quad \varphi = \dfrac{(2n-1)\pi}{4} \quad n = 1\dots 4$

   oder $\quad r \to \pm\infty$

4. Staupunkte: $u = v = 0$

   $v = 0$ aus Teilaufgabe c) $\quad \Rightarrow \quad$ einsetzen in u:

   $u = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - \dfrac{M\sin\varphi\cos\varphi}{\pi r^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{\pi r^2}{M} = \sin\varphi\cos\varphi$

   Mit $\varphi = \pi/4$ oder $\varphi = 5\pi/4$ folgt: $\sin\varphi\cos\varphi = 1/2$

   Mit $\varphi = 3\pi/4$ oder $\varphi = 7\pi/4$ folgt: $\sin\varphi\cos\varphi = -1/2$

   Da $r = R = 1$ und $M < 0$ gefordert, muss gelten: $\dfrac{\pi}{M} = -\dfrac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad M = -2\pi$

   und somit $\varphi_1 = 3\pi/4$ oder $\varphi_2 = 7\pi/4 \quad \Rightarrow (r_{S1}, \varphi_{S1}) = (1, 3\pi/4), \quad (r_{S2}, \varphi_{S2}) = (1, 7\pi/4)$.

5. Staupunktstromlinien: $\quad \Psi = \dfrac{Mr\cos\varphi}{2\pi r^2} + u_\infty r\sin\varphi$

   $\Psi_1 = \Psi(\varphi_1 = 3\pi/4, R = 1) = \dfrac{2\pi\cdot 1/\sqrt{2}}{2\pi} + 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}$

   $\Psi_2 = \Psi(\varphi_1 = 7\pi/4, R = 1) = \dfrac{-2\pi\cdot 1/\sqrt{2}}{2\pi} - 1/\sqrt{2} = -\sqrt{2}$

Linie 1: $\sqrt{2} = \dfrac{-2\pi r\cos\varphi}{2\pi r^2} + r\sin\varphi = -\dfrac{\cos\varphi}{r} + r\sin\varphi$

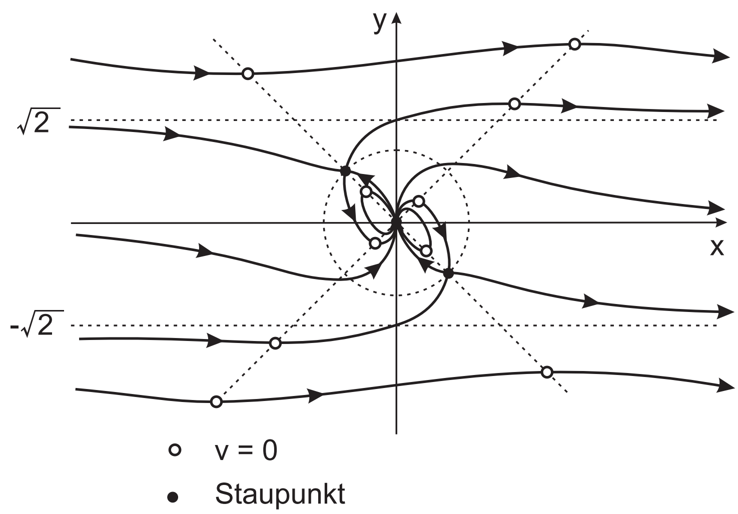
$\Rightarrow r^2\sin\varphi - \sqrt{2}r - \cos\varphi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r_{1,2} = \dfrac{1}{2\sin\varphi}\left(\sqrt{2} \pm \sqrt{2 + 4\sin\varphi\cos\varphi}\right)$

Linie 2: $-\sqrt{2} = -\dfrac{\cos\varphi}{r} + r\sin\varphi$

$\Rightarrow r^2\sin\varphi + \sqrt{2}r - \cos\varphi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r_{3,4} = \dfrac{1}{2\sin\varphi}\left(-\sqrt{2} \pm \sqrt{2 + 4\sin\varphi\cos\varphi}\right)$

6. Obere Staupunktstromlinie ist Stromlinie gehörend zu $R = 1, \varphi = \varphi_1 = 3\pi/4$, also Linie 1.
   Asymptote: $y_1 = r\sin\varphi = \sqrt{2} + \dfrac{\cos\varphi}{r}$
   Mit $r \to \infty$ folgt $\varphi \to 0$ oder $\varphi \to \pi$. In beiden Fällen gilt:
   $\lim\limits_{r\to\infty} y_1 = \sqrt{2}$.

7. Stromlinienbild:



Quelle: Herbst 2011

2. Aufgabe

1. $\frac{u}{U} = a_0 + a_1 \left(\frac{y}{\delta}\right) + a_2 \left(\frac{y}{\delta}\right)^2 + a_3 \left(\frac{y}{\delta}\right)^3 + a_4 \left(\frac{y}{\delta}\right)^4$
   Randbedingungen:
   1.) $\frac{u}{U} = 0$ für $\frac{y}{\delta} = 0$
   2.) $\frac{u}{U} = 1$ für $\frac{y}{\delta} = 1$
   3.) $\frac{\partial^2\left(\frac{u}{U}\right)}{\partial\left(\frac{y}{\delta}\right)^2} = 0$ für $\frac{y}{\delta} = 0$
   4.) $\frac{\partial\left(\frac{u}{U}\right)}{\partial\left(\frac{y}{\delta}\right)} = 0$ für $\frac{y}{\delta} = 1$
   5.) $\frac{\partial^2\left(\frac{u}{U}\right)}{\partial\left(\frac{y}{\delta}\right)^2} = 0$ für $\frac{y}{\delta} = 1$
   mit 1.) $\Rightarrow a_0 = 0$
   mit 2.) $\Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1$
   mit 3.) $\Rightarrow a_2 = 0$
   mit 4.) $\Rightarrow a_1 + 3a_3 + 4a_4 = 0$
   mit 5.) $\Rightarrow 6a_3 + 12a_4 = 0$
   Damit folgt: $a_1 = 2, \quad a_3 = -2, \quad a_4 = 1$ und $\frac{u}{U} = 2\left(\frac{y}{\delta}\right) - 2\left(\frac{y}{\delta}\right)^3 + \left(\frac{y}{\delta}\right)^4$

2. 1.) Verdrängungsdicke: Abstand, um den der Körper in einer reibungsfreien Strömung aufgedickt werden muß, so dass sich der gleiche Massenstrom wie in der tatsächlichen Strömung ergibt (Skizze siehe Skript S.257).
   2.) Impulsverlustdicke: $\rho U^2 \delta_2$ muß den Impulsverlust aufgrund der Grenzschicht darstellen.

3. $\frac{\delta_2}{\delta} = \int\limits_0^1 \frac{u}{U}\left(1 - \frac{u}{U}\right) d\left(\frac{y}{\delta}\right) = \frac{37}{315}$
   die von Kármánsche Integralbeziehung ergibt für das ebene Problem:
   $\frac{d\delta_2}{dx} + \frac{\tau(y=0)}{\varrho U^2} = 0$
   $\tau(y=0) = -\frac{\eta U}{\delta}\frac{\partial\left(\frac{u}{U}\right)}{\partial\left(\frac{y}{\delta}\right)}|_{\frac{y}{\delta}=0} = -2\frac{\eta U}{\delta}$
   $\frac{d\delta_2}{dx} = \frac{2\eta U}{\delta\varrho U^2} = \frac{2\eta}{\varrho\delta U}$
   $\frac{37}{315}\frac{d\delta}{dx} = \frac{2\eta}{\varrho\delta U}$
   $\delta d\delta = \frac{315}{37} 2\frac{\eta}{\varrho U} dx$
   $\frac{\delta^2}{2} = \frac{315}{37} 2\frac{\eta}{\varrho U} x$
   $\delta^2 = \frac{1260}{37}\frac{\eta}{\varrho U} x$
   $\frac{\delta}{x} = \frac{5.84}{\sqrt{Re_x}}$

4. $h_E = \delta(L) = \frac{5.84}{\sqrt{\frac{\varrho U}{\eta L}}}$

Quelle: Herbst 2006

3. Aufgabe

1. $c_pT_0 = c_pT + \frac{1}{2}u^2 \Leftrightarrow \frac{T_0}{T} = 1 + \frac{u^2}{2c_pT}$

   mit $c_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \Rightarrow \frac{T_0}{T} = 1 + \frac{u^2(\gamma-1)}{2\gamma RT}$

   mit Schallgeschwindigkeit $a = \sqrt{\gamma RT} \Rightarrow \frac{T_0}{T} = 1 + \frac{u^2(\gamma-1)}{2a^2}$

   mit Machzahl $M = \frac{u}{a} \Rightarrow \frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2 \Leftrightarrow \frac{T}{T_0} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{-1}$

2. Massenstrom in der Düse im engsten Querschnitt:

$$\dot{m} = \rho^* u^* A^* = \rho^* c^* A^* = \frac{\rho^*}{\rho_a}\rho_a\sqrt{\gamma RT_a\frac{T^*}{T_a}}A^*$$

   Energiesatz siehe a):

$$\frac{T_a}{T^*} == 1 + \frac{\gamma-1}{2}M^{*2}$$

   Im engsten Querschnitt ist $M = M^* = 1$

$$\Rightarrow \frac{T_a}{T^*} = \frac{\gamma+1}{2}$$

   mit Isentropenbeziehung:

$$\Rightarrow \frac{\rho_a}{\rho^*} = \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

$$\Rightarrow \dot{m} = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}\rho_a A^*\sqrt{\gamma RT_a}\cdot\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

   mit idealem Gasgesetz: $\rho_a = \frac{p_a}{RT_a}$

$$\Rightarrow \dot{m} = \frac{p_a}{RT_a}A^*\sqrt{\gamma RT_a}\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{1+\gamma}{2(\gamma-1)}}$$

3.

$$\Delta m = \dot{m}\Delta t = V_K(\rho(t) - \rho(t=0))$$

   vor dem Stoß: $p_1(t) = p_a\left(\frac{T_1}{T_a}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \frac{p_a}{\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_1^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}$

   hinter dem Stoß: $p_2(t) = p_1(t)\frac{p_2}{p_1} = \frac{p_a}{\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_1^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}\cdot\left(1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1}(M_1^2-1)\right)$

$$\Rightarrow \Delta t = \frac{V_K}{\dot{m}RT_K}(p(t) - p_K(t=0))$$

$$\Leftrightarrow \Delta t = \frac{V_KT_a}{T_Kp_aA^*\sqrt{\gamma RT_a}\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}}\cdot\left(p_a\frac{1+\frac{2\gamma}{\gamma+1}(M_1^2-1)}{\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_1^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}} - p_K(t=0)\right)$$

Quelle: Frühjahr 2014