Tutorenprogramm - Strömungsmechanik II

Ähnlichkeitstheorie - Musterlösung

1. Aufgabe

Variablen des Systems: $\eta, \rho, H, D, F_W, f, u_\infty$ mit

$\eta \doteq \left[\frac{kg}{m\,s}\right]$, $\rho \doteq \left[\frac{kg}{m^3}\right]$, $H \doteq [m]$, $D \doteq [m]$,

$F_W \doteq \left[\frac{kg\,m}{s^2}\right]$, $f \doteq \left[\frac{1}{s}\right]$, $u_\infty \doteq \left[\frac{m}{s}\right]$,

$\Rightarrow$ sieben Einflußgrössen, drei Grunddimensionen $\rightarrow$ vier Kennzahlen
wähle drei wiederkehrende Variablen, z.B.: ρ, u_∞, D

$K_1 = \eta \cdot u_\infty^{\alpha_1} \cdot \rho^{\beta_1} \cdot D^{\gamma_1}$

$kg : 1 + 0 + \beta_1 + 0 = 0 \Rightarrow \beta_1 = -1$

$m : -1 + \alpha_1 - 3\beta_1 + \gamma_1 = 0 \Rightarrow \gamma_1 = -1$

$s : -1 - \alpha_1 + 0 + 0 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = -1$

$\Rightarrow K_1 = \frac{\eta}{\rho u_\infty D} = \frac{1}{Re}$

$K_2 = F_W \cdot u_\infty^{\alpha_2} \cdot \rho^{\beta_2} \cdot D^{\gamma_2}$

$kg : 1 + 0 + \beta_2 + 0 = 0 \Rightarrow \beta_2 = -1$

$m : 1 + \alpha_2 - 3\beta_2 + \gamma_2 = 0 \Rightarrow \gamma_2 = -2$

$s : -2 - \alpha_2 + 0 + 0 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = -2$

$\Rightarrow K_2 = \frac{F_W}{\rho u_\infty^2 D^2} = \bar{c}_w$

$K_3 = H \cdot u_\infty^{\alpha_3} \cdot \rho^{\beta_3} \cdot D^{\gamma_3}$

$kg : 0 + 0 + \beta_3 + 0 = 0 \Rightarrow \beta_3 = 0$

$m : 1 + \alpha_3 + 0 + \gamma_1 = 0 \Rightarrow \gamma_3 = -1$

$s : 0 - \alpha_3 + 0 + 0 = 0 \Rightarrow \alpha_3 = 0$

$K_3 = \frac{H}{D} = \text{geometr.}$

$K_4 = f \cdot u_\infty^{\alpha_4} \cdot \rho^{\beta_4} \cdot D^{\gamma_4}$

$kg : 0 + 0 + \beta_4 + 0 = 0 \Rightarrow \beta_4 = 0$

$m : 0 + \alpha_4 - 3\beta_4 + \gamma_4 = 0 \Rightarrow \gamma_4 = 1$

$s : -1 - \alpha_4 + 0 + 0 = 0 \Rightarrow \alpha_4 = -1$

$\Rightarrow K_4 = \frac{fD}{u_\infty} = Sr$

Alternativ: Variablen des Systems: $\eta, \rho, H, D, F_W, f, u_\infty, T, R$ mit zusätzlich (zu oben) $T \doteq [K]$, $R \doteq \left[\frac{m^2}{s^2 K}\right]$

$\Rightarrow$ neun Einflußgrössen, vier Grunddimensionen $\rightarrow$ fünf Kennzahlen
wähle vier wiederkehrende Variablen, z.B.: ρ, u_∞, D, T

Die ersten vier Kennzahlen sind unverändert zu oben ($[K]$ kommt nur in T und R vor), also nur noch zusätzliche Kennzahl K_5 bestimmen:

$K_5 = R \cdot u_\infty^{\alpha_5} \cdot \rho^{\beta_5} \cdot D^{\gamma_5} \cdot T^{\delta_5}$

$kg : 0 + 0 + \beta_5 + 0 + 0 = 0 \Rightarrow \beta_5 = 0$

$m : 2 + \alpha_5 - 3\beta_5 + \gamma_5 + 0 = 0 \Rightarrow \gamma_5 = 0$

$s : -2 - \alpha_5 + 0 + 0 + 0 = 0 \Rightarrow \alpha_5 = -2$

$T : -1 + 0 + 0 + 0 + \delta_5 = 0 \Rightarrow \delta_5 = 1$

$\Rightarrow K_5 = \frac{RT}{u_\infty^2} = \frac{\gamma RT}{\gamma u_\infty^2} = \frac{1}{\gamma M^2}$

Quelle: Frühjahr 2012

2. Aufgabe

1. Physikalische Einflussgrößen: $\rho\left[\frac{kg}{m^3}\right], \eta\left[\frac{kg}{ms}\right], \Delta p\left[\frac{kg}{ms^2}\right], h\,[m], V_W\left[\frac{m}{s}\right]$

   Anzahl der Grunddimensionen: $3 \rightarrow$ [kg], [m], [sec]

   Es müssen $5-3=2$ Kennzahlen bestimmt werden.

   Wiederkehrende Variablen: $\rho\left[\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\right], h\,[\mathrm{m}], V_W\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]$

$$\begin{aligned}
\Pi_1 &= \eta\rho^\alpha h^\beta v^\gamma \\
0 &= \left[\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{ms}}\right]^1\left[\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\right]^\alpha[\mathrm{m}]^\beta\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]^\gamma \\
[\mathrm{kg}]:0 &= 1+\alpha \quad\Leftrightarrow \alpha=-1 \\
[\mathrm{m}]:0 &= -1-3\alpha+\beta+\gamma \Rightarrow 0=2+\beta+\gamma \\
[\mathrm{sec}]:0 &= -1-\gamma \Leftrightarrow \gamma=-1 \\
&\Rightarrow \beta=-1 \\
\Pi_1 &= \frac{\eta}{\rho V_W h}=\frac{1}{\mathrm{Re}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pi_2 &= \Delta p\rho^\alpha h^\beta v^\gamma \\
0 &= \left[\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}^2\mathrm{m}^1}\right]^1\left[\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\right]^\alpha[\mathrm{m}]^\beta\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]^\gamma \\
[\mathrm{kg}]:0 &= 1+\alpha \quad\Leftrightarrow \alpha=-1 \\
[\mathrm{m}]:0 &= -1-3\alpha+\beta+\gamma \Rightarrow 0=2+\beta+\gamma \\
[\mathrm{sec}]:0 &= -2-\gamma \leftrightarrow \gamma=-2 \\
&\Rightarrow \beta=0 \\
\Pi_2 &= \frac{\Delta p}{\rho V_W^2}=\mathrm{Eu}
\end{aligned}$$

2. Konti: $\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}+\rho\nabla\cdot\vec{v}=0$

   $\rho=$ konst. $\rightarrow \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}=0$

   zweidimensionale Strömung $\rightarrow w=0, \quad \frac{\partial}{\partial z}=0$

   Konti: $\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$

   in x-Richtung ausgebildete Strömung $\rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}=0$

   Konti: $\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y}=0 \Leftrightarrow v=konst.$ mit $v=v(y)$, da $\frac{\partial v}{\partial x}=0$ und $\frac{\partial v}{\partial t}=0$
   Randbedingung: $v(y=0)=v(y=h)=V_W$
   $\Rightarrow v(y)=V_W=konst.$

3. Impulserhaltung: $\rho\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\rho\vec{g}-\nabla p+\nabla\cdot\tau$

   ohne Volumenkräfte, inkompressibel: $\Rightarrow \rho\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=-\nabla p+\eta\nabla^2\vec{v}$

2D $\rightarrow w = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z} = 0$

betrachte x-Komponente: $\Rightarrow \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$

stationär: $\rightarrow \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$ ausgebildet in x-Richtung: $\rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$

$\Rightarrow \rho v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

mit den Ergebnissen aus b): $v = V_W = konst. \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$

$\Rightarrow \rho V_W\frac{\partial u}{\partial y} = K + \eta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

Quelle: Frühjar 2015

3. Aufgabe

1. Die Prandtlzahl ist dann von Bedeutung, wenn die Wärmeübertragung in einer Strömung eine Rolle spielt.

2. 5 Einflußgrößen $(\Delta p, D, \omega, \rho, \dot{V})$, 3 Grunddimensionen (kg, m, s) $\Rightarrow$ 2 Kennzahlen
Wähle D, ρ und ω als sich wiederholende Variable.

$$
\begin{aligned}
&K_1 = \Delta p D^\alpha \omega^\beta \rho^\gamma\\
&1 = \left(\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{ms}^2}\right)(\mathrm{m})^\alpha \left(\mathrm{s}^{-1}\right)^\beta \left(\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\right)^\gamma\\
&\mathrm{kg} \quad : \qquad 0 = 1 + \gamma \quad \Rightarrow \quad \gamma = -1\\
&\mathrm{s} \quad : \qquad 0 = -2 - \beta \quad \Rightarrow \quad \beta = -2\\
&\mathrm{m} \quad : \qquad 0 = -1 + \alpha - 3\gamma \quad \Rightarrow \quad \alpha = -2\\
&\Rightarrow \quad K_1 = \frac{\Delta p}{D^2 \rho \omega^2} \quad \Rightarrow \quad K_1 = \frac{\Delta p}{\rho v^2} = Eu \quad \text{mit} \quad v = D\omega
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&K_2 = \dot{V} D^\alpha \omega^\beta \rho^\gamma\\
&1 = \left(\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}\right)(\mathrm{m})^\alpha \left(\mathrm{s}^{-1}\right)^\beta \left(\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\right)^\gamma\\
&\mathrm{kg} \quad : \qquad 0 = \gamma\\
&\mathrm{s} \quad : \qquad 0 = -1 - \beta \quad \Rightarrow \quad \beta = -1\\
&\mathrm{m} \quad : \qquad 0 = 3 + \alpha - 3\gamma \quad \Rightarrow \quad \alpha = -3\\
&\Rightarrow \quad K_2 = \frac{\dot{V}}{D^3 \omega} \quad \Rightarrow \quad K_2 = \frac{\bar{u}}{D\omega} = \frac{1}{Sr} \quad \text{mit} \quad \bar{u} = \frac{\dot{V}}{D^2}, \quad f = \omega
\end{aligned}
$$

3. Die Kennzahlen (Re, M) des Modells müssen gleich den Kennzahlen des Flugzeugs sein.

   Die Geschwindigkeit im Windkanal beträgt bei M_F:

$$
\begin{aligned}
\frac{u_K}{c_K} &= M_K = M_F\\
u_K = M_F \cdot c_K &= M_F \cdot \sqrt{\gamma R T_K}
\end{aligned}
$$

   Die dynamische Viskosität im Windkanal beträgt bei M_F:

$$\eta_K = \eta_0 \cdot (T_K / T_0)^a \cdot b$$

   Bei einer vorgegebenen Reynolds Zahl ergibt sich die charakteristische Länge L zu:

$$Re_F = \frac{\rho_K u_K L}{\eta_K} \quad \Rightarrow \quad L = \frac{\eta_K Re_F}{\rho_K u_K} \Rightarrow L = \frac{\eta_0 \cdot \left(\frac{T_K}{T_0}\right)^a b Re_F}{\rho_K M_F \sqrt{\gamma R T_K}}$$

4. Eine mögliche Maßnahme ist die Verringerung der Temperatur, wodurch die Reynolds Zahl bei konstanter Länge L ansteigt bzw. bei konstanter Reynolds Zahl die Länge L kleiner wird.

$$Re = \frac{\rho M \sqrt{\gamma R T} L}{\eta_0 \cdot \left(\frac{T}{T_0}\right)^a b} \rightarrow Re \sim L \cdot T^{(0.5-a)}$$

Quelle: Herbst 2013

4. Aufgabe

1.
   - Energieerhaltungsgleichung für kompressible Strömungen unter Vernachlässigung von Reibungseffekten.
   - Gültig für ein ideales Gas mit konstanter spezifischer Wärmekapazität und Temperaturleitfähigkeit.

2. Dimensionslose Größen:

$$\bar{\varrho} = \frac{\varrho}{\varrho_\infty}, \bar{T} = \frac{T - T_\infty}{T_p - T_\infty} = \frac{T - T_\infty}{\Delta T}, \bar{t} = \frac{t}{\Delta t}, \bar{p} = \frac{p}{\Delta p}, \bar{v} = \frac{v}{u_\infty}, \bar{\nabla} = \nabla L.$$

$$\begin{aligned}
\varrho_\infty c_V \bar{\varrho}\left(\frac{\Delta T}{\Delta t}\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} + \frac{u_\infty}{L}\Delta T \vec{\bar{v}} \cdot \bar{\nabla}\bar{T}\right) &= \frac{\lambda}{L^2}\Delta T \bar{\nabla}^2 \bar{T} - \frac{\Delta p u_\infty}{L}\bar{p}(\bar{\nabla} \cdot \vec{\bar{v}}) \\
\frac{\varrho_\infty u_\infty c_V \Delta T}{L}\left(\frac{L}{u_\infty \Delta t}\bar{\varrho}\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} + \bar{\varrho}\vec{\bar{v}} \cdot \bar{\nabla}\bar{T}\right) &= \frac{\lambda}{L^2}\Delta T \bar{\nabla}^2 \bar{T} - \frac{\Delta p u_\infty}{L}\bar{p}(\bar{\nabla} \cdot \vec{\bar{v}}) \\
\underbrace{\frac{L}{u_\infty \Delta t}}_{K_1}\bar{\varrho}\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} + \bar{\varrho}\vec{\bar{v}} \cdot \bar{\nabla}\bar{T} &= \underbrace{\frac{\lambda}{\varrho_\infty u_\infty L c_V}}_{K_2}\bar{\nabla}^2 \bar{T} - \underbrace{\frac{\Delta p}{\varrho_\infty c_V \Delta T}}_{K_3}\bar{p}(\bar{\nabla} \cdot \vec{\bar{v}})
\end{aligned}$$

3. inkompressible Strömung: $\nabla \cdot \vec{v} = 0$, stationäre Strömung: $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$

$$\longrightarrow \varrho c_V \left(u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y}\right) = \lambda\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)$$

   Einführen dimensionsloser Größen:

$$\bar{x} = \frac{x}{L}, \bar{y} = \frac{y}{\delta}, \bar{u} = \frac{u}{u_\infty}, \bar{v} = \frac{v}{\frac{\delta u_\infty}{L}}, \bar{T} = \frac{T - T_\infty}{\Delta T},$$

$$\begin{aligned}
\varrho c_V \left(\frac{u_\infty \Delta T}{L}\bar{u}\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \frac{\delta}{L}\frac{u_\infty}{\delta}\Delta T \bar{v}\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}}\right) &= \lambda\left(\frac{\Delta T}{L^2}\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\Delta T}{\delta^2}\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2}\right) \\
\bar{u}\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} &= \frac{\lambda L}{\varrho u_\infty \delta^2 c_V}\left(\underbrace{\frac{\delta^2}{L^2}}_{\approx 0}\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2}\right) \\
\bar{u}\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} &= \frac{\lambda L}{\varrho u_\infty \delta^2 c_V}\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2}
\end{aligned}$$

Quelle: Frühjahr 2008