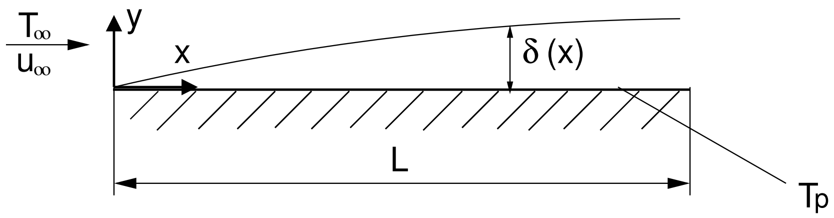
Tutorenprogramm - Strömungsmechanik II

Ähnlichkeitstheorie - Musterlösung

4. Aufgabe - Methode der DGL

Die Temperaturverteilung in der Strömung ist gegeben durch:



$$\rho c_V \frac{dT}{dt} = \lambda \nabla^2 T - p\left(\nabla \cdot \vec{v}\right) \qquad \text{mit} \qquad \frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla T$$

$$\rho c_V \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla T\right) = \lambda \nabla^2 T - p\left(\nabla \cdot \vec{v}\right)$$

1. Eigenschaften und Gültigkeit der DGL

- Energieerhaltungsgleichung
- Gleichung enthält keine Terme mit $\eta \rightarrow$ Reibungsfrei
- ideales Gas mit $c_V = konst$ und $\lambda = konst$, (da $c_V \neq c_V(T)$ und λ nicht differentiell auftritt)
- Strömung ist kompressibel

2. Ermittlung der Kennzahlen mit der Methode der DGL

Vorgehen:

1. Entdimensionierung aller Variablen
2. Einsetzten der dimensionslosen Variablen in DGL
3. Reduktion der Kennzahlen durch geschicktes ausklammern
4. Vorfaktoren der entdimensionierten DGL entsprechen den Kennzahlen des Problems

1. Entdimensionieren aller Variablen → Variablen: ρ,$T, t, p, \nabla, \vec{v}$

$$\overline{\rho} = \frac{\rho}{\rho_\infty}, \overline{T} = \frac{T - T_\infty}{\Delta T}, \overline{t} = \frac{t}{\Delta t}, \overline{p} = \frac{p}{\Delta p}, \overline{\nabla} = \nabla L, \overline{\vec{v}} = \frac{\vec{v}}{u_\infty}$$

(zur Entdimensionierung von $\vec{v}$ wird u_∞ benutzt, da dies der charakteristischen Geschwindgkeit der Strömung entspricht)
$\rightarrow \quad \rho = \overline{\rho}\rho_\infty \quad T = \overline{T}\Delta T + T_\infty \quad t = \overline{t}\Delta t \quad p = \overline{p}\Delta p \quad \vec{v} = \overline{\vec{v}}u_\infty \quad \nabla = \frac{\overline{\nabla}}{L}$

2. Einsetzten in DGL

$$\rho_\infty c_V \overline{\rho} \left(\frac{\partial(\overline{T}\Delta T + T_\infty)}{\partial(\overline{t}\Delta t)} + \frac{u_\infty}{L} \left(\overline{\vec{v}} \cdot \overline{\nabla}(\overline{T}\Delta T + T_\infty) \right) \right) = \frac{\lambda}{L^2} \overline{\nabla}^2 (\overline{T}\Delta T + T_\infty) - \overline{p}\Delta p \frac{u_\infty}{L} \left(\overline{\nabla} \cdot \overline{\vec{v}} \right)$$

mit

- $\partial(\overline{T}\Delta T + T_\infty) = \partial(\overline{T}\Delta T) + \cancelto{0}{\partial T_\infty} \xrightarrow{\text{Produktregel}} \Delta T \partial \overline{T} + \overline{T} \cancelto{0}{\partial \Delta T} = \underline{\underline{\Delta T \partial \overline{T}}}$
- $\overline{\nabla}(\overline{T}\Delta T + T_\infty) = \begin{pmatrix} \frac{\partial(\overline{T}\Delta T + T_\infty)}{\partial x} \\ \frac{\partial(\overline{T}\Delta T + T_\infty)}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta T \frac{\partial \overline{T}}{\partial x} \\ \Delta T \frac{\partial \overline{T}}{\partial y} \end{pmatrix} = \Delta T \begin{pmatrix} \frac{\partial \overline{T}}{\partial x} \\ \frac{\partial \overline{T}}{\partial y} \end{pmatrix} = \underline{\underline{\Delta T \overline{\nabla} \overline{T}}}$
- $\overline{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial \overline{x}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \overline{y}^2}$
- $\overline{\nabla}^2(\overline{T}\Delta T + T_\infty) = \frac{\partial^2(\overline{T}\Delta T + T_\infty)}{\partial \overline{x}^2} + \frac{\partial^2(\overline{T}\Delta T + T_\infty)}{\partial \overline{y}^2} = \Delta T \left(\frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial \overline{x}^2} + \frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial \overline{y}^2} \right) = \underline{\underline{\Delta T \overline{\nabla}^2 \overline{T}}}$

$$\rho_\infty c_V \overline{\rho} \left(\underbrace{\frac{\Delta T}{\Delta t}}_{(1)} \frac{\partial \overline{T}}{\partial \overline{t}} + \underbrace{\frac{u_\infty \Delta T}{L}}_{(2)} \left(\overline{\vec{v}} \cdot \overline{\nabla T} \right) \right) = \underbrace{\frac{\lambda \Delta T}{L^2}}_{(3)} \overline{\nabla}^2 \overline{T} - \underbrace{\frac{u_\infty \Delta p}{L}}_{(4)} \overline{p} \left(\overline{\nabla} \cdot \overline{\vec{v}} \right) \quad (1)$$

3. Reduktion der Anzahl der Kennzahlen durch geschicktes ausklammern

Die entdimensionierte DGL [1] enthält momentan 4 Vorfaktoren → 4 Kennzahlen. Die Methode der DGL liefert die max. nötige Anzahl an Kennzahlen zur Beschreibung des Problems. Hier kann die Anzahl an Vorfaktoren durch ausklammern noch um 1 reduziert werden, d.h. Faktor (1) oder (2) kann vor die Klammer gezogen werden. Es bietet sich an Faktor (2) auszuklammern, da (2) 3 Variablen und damit mehr Informationen enthält. Damit folgt:

$$\underbrace{\frac{\rho_\infty u_\infty c_V \Delta T}{L}}_{(1')}\overline{\rho}\left(\frac{L}{u_\infty \Delta t}\frac{\partial \overline{T}}{\partial \overline{t}} + \vec{\overline{v}}\cdot\overline{\nabla T}\right) = \frac{\lambda \Delta T}{L^2}\overline{\nabla}^2\overline{T} - \frac{u_\infty \Delta p}{L}\overline{p}\left(\overline{\nabla}\cdot\vec{\overline{v}}\right)$$

Jetzt muss (1') auf die rechte Seite multipliziert werden:

$$\overline{\rho}\left(\underbrace{\frac{L}{u_\infty \Delta t}}_{(1)}\frac{\partial \overline{T}}{\partial \overline{t}} + \vec{\overline{v}}\cdot\overline{\nabla T}\right) = \underbrace{\frac{\lambda}{\rho_\infty u_\infty c_V L}}_{(2)}\overline{\nabla}^2\overline{T} - \underbrace{\frac{\Delta p}{\rho_\infty u_\infty \Delta T}}_{(3)}\overline{p}\left(\overline{\nabla}\cdot\vec{\overline{v}}\right)$$

4. Damit ergeben sich die Kennzahlen des Problems zu:

$\Pi_1 = \frac{L}{u_\infty \Delta t}$

$\Pi_2 = \frac{\lambda}{\rho_\infty u_\infty c_V L}$

$\Pi_3 = \frac{\Delta p}{\rho_\infty u_\infty \Delta T}$

3. Vereinfachung der DGL Vereinfachungen:

- 2D
- stationär $\rightarrow \frac{\partial}{\partial t} = 0$
- inkompressibel $\rightarrow \rho = konst. \rightarrow^{ausKonti.} \nabla\cdot\vec{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$
- Grenzschichtströmung ($\delta << L$) $\rightarrow$ Grenzschichtannahmen benutzen: $\overline{y} = \frac{y}{\delta}, \overline{v} = \frac{v}{\frac{\delta u_\infty}{L}}$

$$\rho c_V\left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla T\right) = \lambda\nabla^2 T - p\left(\nabla\cdot\vec{v}\right)$$

$$\rho c_V\left(\cancelto{0}{\frac{\partial T}{\partial t}} + u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y}\right) = \lambda\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) - p\,\cancelto{0}{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)}$$

$$\rho c_V\left(u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y}\right) = \lambda\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)$$

Entdimensionieren der Variablen mit: $\overline{x} = \frac{x}{L}, \overline{y} = \frac{y}{\delta}, \overline{u} = \frac{u}{u_\infty}, \overline{v} = \frac{v}{\frac{\delta u_\infty}{L}}, \overline{T} = \frac{T - T_\infty}{\Delta T}$ Liefert:

$$\rho c_V \left(u_\infty \overline{u} \frac{\partial(\overline{T}\Delta T + T_\infty)}{\partial(\overline{x}L)} + \frac{\delta u_\infty}{L} \overline{v} \frac{\partial(\overline{T}\Delta T + T_\infty)}{\partial(\overline{y}\delta)} \right) = \lambda \left(\frac{\partial^2(\overline{T}\Delta T + T_\infty)}{\partial(\overline{x}L)^2} + \frac{\partial^2(\overline{T}\Delta T + T_\infty)}{\partial(\overline{y}\delta)^2} \right) =$$

$$\rho c_V \left(\frac{u_\infty \Delta T}{L} \overline{u} \frac{\partial \overline{T}}{\partial \overline{x}} + \frac{u_\infty \Delta T \delta}{L\delta} \overline{v} \frac{\partial \overline{T}}{\partial \overline{y}} \right) = \lambda \left(\frac{\Delta T}{L^2} \frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial \overline{x}^2} + \frac{\Delta T}{\delta^2} \frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial \overline{y}^2} \right) =$$

$$\rho c_V \frac{u_\infty}{L} \left(\overline{u} \frac{\partial \overline{T}}{\partial \overline{x}} + \overline{v} \frac{\partial \overline{T}}{\partial \overline{y}} \right) = \frac{\lambda}{\delta^2} \left(\underbrace{\frac{\delta^2}{L^2}}_{<<1} \frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial \overline{x}^2} + \frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial \overline{y}^2} \right) =$$

$$\underline{\underline{\overline{u} \frac{\partial \overline{T}}{\partial \overline{x}} + \overline{v} \frac{\partial \overline{T}}{\partial \overline{y}} = \frac{\lambda L}{\rho u_\infty \delta^2 c_V} \frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial \overline{y}^2}}}$$