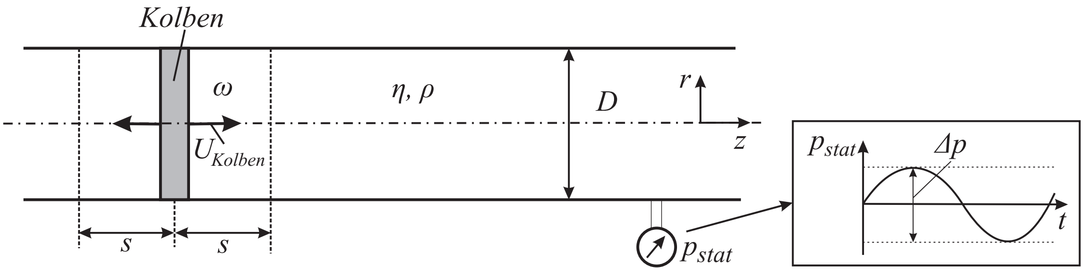
Tutorenprogramm - Strömungsmechanik II

Ähnlichkeitstheorie - Musterlösung

3. Aufgabe - Buckingham'sches Π - Theorem



1. Bei welchen Strömungen ist die Prandtl-Zahl von Bedeutung?

Prandt'l - Zahl: $Pr = \frac{\eta c_p}{\lambda} \quad \widehat{=} \quad \frac{\text{Reibungswärme}}{\text{Wärmeleitfähigkeit}}$

Die Prandt'l - Zahl ist dann von Bedeutung, wenn die Wärmeübertragung in einer Strömung eine Rolle spielt.

2. Ermitteln der Kennzahlen

Vorgehen:

1. Auflisten alled für das Problem relevanter Variablen K
2. Aufstellen der Variablen in ihren Einheiten: Anzahl der Einheiten r
3. Anzahl der Kennzahlen: $m = K - r$
4. Auswahl der wiederkehrenden Variablen (WV) (Anzahl der WV = Anzahl der Grunddimenionen r)

5. Berechnen der Kennzahlen mit Buckingham'schen Π-Theorem

Regeln zur Auswahl der wiederkehrenden Variablen:

- alle Einheiten müssen vorkommen
- Variablen müssen linear unabhängig sein
- die zu untersuchende Variable sollte nicht als WV gewählt werden

Hier:

1. relevante Kennzahlen: $\Delta p, D, \omega, \rho, \dot{V} \rightarrow K = 5$
2. $\Delta p = \left[\frac{N}{m^2} = \frac{kg \cdot m}{m^2 \cdot s^2} = \frac{kg}{ms^2}\right]; D = [m]; \omega = \left[\frac{1}{s}\right]; \rho = \left[\frac{kg}{m^3}\right]; \dot{V} = \left[\frac{m^3}{s}\right] \rightarrow 3$ Grunddimensionen: kg,m,s $\rightarrow r = 3 \rightarrow$ wähle 3 WV
3. Anzahl der Kennzahlen: $m = K - r = 5 - 3 = 2$
4. Auswahl der WV (Tipp: das set ρ, η und eine geometrische Größe, z.b. D, sind häufig eine gute Wahl)

   $\rightarrow D$,ρ, es fehlt noch eine Größe, die die Dimension $[s]$ beinhaltet $\rightarrow$ wähle ω

   die Wahl von Δp als WV bietet sich nicht an, da der Einfluss der Parameter auf Δp untersucht werden soll $\rightarrow \Delta p$ ist die zu untersuchende Variable

   $\rightarrow$ set der wiederkehrenden Variablen: $\rho, D, \omega \rightarrow \rho^\alpha, D^\beta, \omega^\gamma$

   Einzigartige Variablen: $\Delta p, \dot{V}$

5. Berechnung der Kennzahlen

$$\Pi_1 = \Delta p \cdot \rho^\alpha \cdot D^\beta \cdot \omega^\gamma$$

$$1 = \left(\frac{kg}{ms^2}\right) \cdot \left(\frac{kg}{m^3}\right)^\alpha \cdot (m)^\beta \cdot \left(\frac{1}{s}\right)^\gamma$$

$\downarrow$ Koeffizientenvergleich der Dimensionen

kg: $0 = -1 + \alpha + 0\beta + 0\gamma \rightarrow \alpha = -1$

m: $0 = -1 - 3\alpha + \beta + 0\gamma \rightarrow \beta = 1 + 3\alpha = 1 - 3 = -2$

s: $0 = -2 + 0\alpha + 0\beta - \gamma \rightarrow \gamma = -2$

$$\Pi_1 = \Delta p \cdot \rho^{-1} \cdot D^{-2} \cdot \omega^{-2} \qquad \text{mit } [D^2 \cdot \omega^2] = \left(\frac{m}{s}\right)^2 \mathrel{\widehat{=}} u^2$$

$$\underline{\underline{\Pi_1 = \frac{\Delta p}{\rho u^2} \quad \widehat{=} \quad \text{Euler-Zahl}}}$$

$$\Pi_2 = \dot{V} \cdot \rho^{\alpha} \cdot D^{\beta} \cdot \omega^{\gamma}$$

$$1 = \left(\frac{m^3}{s}\right) \cdot \left(\frac{kg}{m^3}\right)^{\alpha} \cdot (m)^{\beta} \cdot \left(\frac{1}{s}\right)^{\gamma}$$

$\downarrow$ Koeffizientenvergleich der Dimensionen

kg: $0 = 0 + \alpha + 0\beta + 0\gamma \rightarrow \alpha = 0$

m: $0 = 3 - 3\alpha + \beta + 0\gamma \rightarrow \beta = -3$

s: $0 = -1 + 0\alpha + 0\beta - \gamma \rightarrow \gamma = -1$

$$\Pi_2 = \dot{V} \cdot \rho^0 \cdot D^{-3} \cdot \omega^{-1} \qquad \text{mit } \left[\frac{\dot{V}}{D^2}\right] = \left(\frac{m^3}{s \cdot m^2}\right) = \left[\frac{m}{s}\right] \mathrel{\widehat{=}} u, [\omega] = \left[\frac{1}{s}\right] \mathrel{\widehat{=}} f$$

$$\underline{\underline{\Pi_2 = \frac{u \cdot f}{D} \quad \widehat{=} \quad \text{Strouhal-Zahl}}}$$

3. Bestimmung der Modelllänge L durch Reynolds- und Machähnlichkeit

Ähnlichkeit is gegeben, wenn $\Pi_{Modell} = \Pi_{Realausführung} \rightarrow \Pi_F \stackrel{!}{=} \Pi_K$
(index F: Flugzeug (Realausführung), index K: Windkanal (Modell))

(1) $M_F = \frac{u_F}{\sqrt{\gamma R T_F}} \stackrel{!}{=} M_K = \frac{u_K}{\sqrt{\gamma R T_K}}$

(2) $Re_F = \frac{\rho_F u_F L_F}{\eta_F} \stackrel{!}{=} Re_K = \frac{\rho_K u_K L_K}{\eta_K}$

Aus (2) folgt: $L_K = L = \frac{Re_F \eta_K}{\rho_K u_K} \rightarrow$ unbekannte: η_K, u_K

- $\eta_K = \eta_0 \left(\frac{T_K}{T_0}\right)^a b$
- u_K aus Machähnlichkeit (1): $u_K = M_F \sqrt{\gamma R T_K}$

$$\rightarrow \underline{\underline{L = \frac{Re_F \eta_0 \left(\frac{T_K}{T_0}\right)^a b}{\rho_K M_F \sqrt{\gamma R T_K}}}}$$

4. Maßnahmen, um bei gleichen Kennzahlen die Abmessung L zu verringern

$$L = \frac{Re_F \eta_0 b}{\rho_K M_F \sqrt{\gamma R} \, (T_0)^a} \cdot T_K^{a-\frac{1}{2}} \quad \text{mit } a \in [0.5{,}1] \rightarrow L \sim T_K^{a-\frac{1}{2}}$$

Eine Verringerung der statischen Temperatur in der Windkanalströmung führt zu einer Verrringerung der nötigen Modellabmessungen.