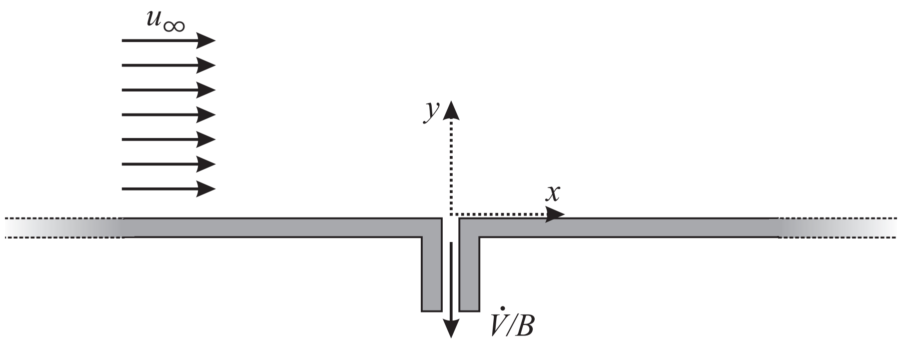
Tutorenprogramm - Strömungsmechanik II

Potentialströmungen

1. Aufgabe

Luft strömt über eine ebene Platte der Breite B mit einer konstanten Geschwindigkeit u_∞. Eine Pumpe entnimmt der Strömung aus einem schmalen Schlitz in der Platte den auf die Breite B bezogenen Volumenstrom $\dot{V}/B$. Die Strömung soll mit Hilfe der Potentialtheorie untersucht werden.



1. Mit welchen der angegebenen komplexen Potentialfunktionen kann die Strömung beschrieben werden? Geben Sie die resultierende komplexe Potentialfunktion an.
2. Bestimmen Sie die Lage des Staupunktes in kartesischen Koordinaten (x_s, y_s) und die zugehörige Staupunktstromlinie in Polarkoordinaten ($r = f(\varphi)$).
3. Bestimmen Sie die minimale Höhe h über der Platte, die ein Luftpartikel weit vor dem Schlitz haben muss, um nicht eingesaugt zu werden.
4. Skizzieren Sie sorgfältig das gesamte Strömungfeld über der Platte unter Angabe der Staupunkte und Staupunktstromlinien.

Gegeben:

u_∞, $\dot{V}/B$

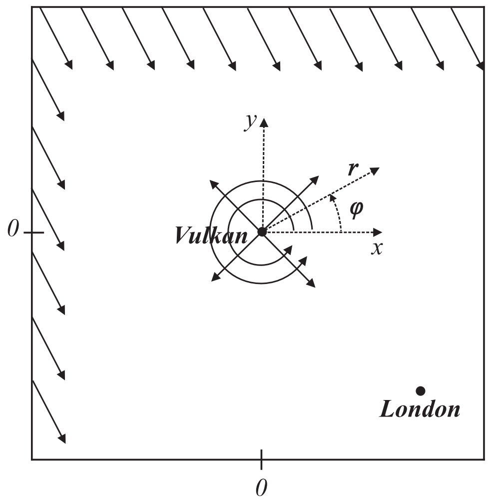
Elementarfunktionen:

Parallelströmung:	$F(z) = (u_\infty - iv_\infty)z$
Potentialwirbel:	$F(z) = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z$
Quelle/Senke :	$F(z) = \frac{E}{2\pi} \ln z$
Staupunktströmung:	$F(z) = az^2$
Dipol:	$F(z) = \frac{M}{2\pi z}$

Quelle: Herbst 2012

2. Aufgabe

Beim Ausbruch eines bekannten isländischen Vulkans werden große Mengen Asche in die Atmosphäre ausgestoßen. Das Zentrum eines Tiefdruckgebietes befindet sich während des Ausbruchs direkt über dem Vulkan und der Wind weht ungefähr aus nordwestlicher Richtung. Die Strömung in Höhe der entstehenden Aschewolke wird durch die folgende komplexe Potentialfunktion beschrieben:



$$F(z) = (u_\infty - iv_\infty)z + \frac{E}{2\pi}\ln z - \frac{\Gamma}{2\pi} i \ln z \quad \text{mit} \quad E > 0, \Gamma > 0$$

1. Ermitteln Sie die Geschwindigkeitskomponenten $v_r(r,\varphi)$ und $v_\varphi(r,\varphi)$ in Polarkoordinaten für das gesamte Strömungsfeld.
2. Bestimmen Sie die y-Komponente v_∞ des Windes in Abhängigkeit von u_∞, E und Γ so, dass die Strömung bei $\varphi = 45°$ einen Staupunkt besitzt. Geben Sie die Position dieses Staupunktes in Polarkoordinaten an.

Für die folgenden Aufgabenteile sei $v_\infty = u_\infty \frac{E+\Gamma}{E-\Gamma}$.

3. Berechnen Sie den Wert der Stromfunktion Ψ im Ursprung und für den in der Skizze mit *London* markierten Punkt an der Stelle $(r = 1, \varphi = -\frac{\pi}{4})$.
4. Wie können Sie unter der Annahme, dass sich die Aschewolke nicht mit der sauberen Umgebungsluft vermischt, entscheiden, ob sich London unter der Aschewolke befindet und somit Beeinträchtigungen im Flugverkehr zu erwarten sind? Erläutern Sie kurz Ihr Vorgehen (keine Rechnung!).
5. Skizzieren Sie unter Angabe der Konturstromlinie und der Staupunkte das Stromlinienbild der Strömung (ohne weitere Rechnung).

Gegeben:

u_∞, E, Γ

Hinweise:

- $v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \qquad v_\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \varphi} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \qquad z = x + iy = r \cdot e^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$

Winkeltabelle:

φ	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	π	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	2π
$\sin\varphi$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{-1}{\sqrt{2}}$	-1	$\frac{-1}{\sqrt{2}}$	0
$\cos\varphi$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{-1}{\sqrt{2}}$	-1	$\frac{-1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1

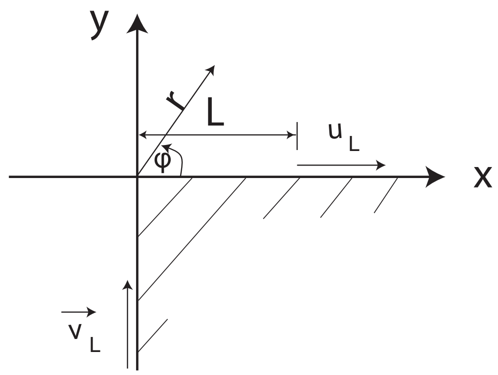
Quelle: Herbst 2010

3. Aufgabe

Die ebene inkompressible drehungsfreie Strömung um eine 90°-Ecke kann mit Hilfe der komplexen Strömungsfunktion

$$F(z) = \frac{a}{n} z^n$$

beschrieben werden.
Die Geschwindigkeit an der Wand an der Stelle r = L, $\varphi = 0°$ beträgt $|\vec{v_L}| = u_L > 0$.



1. Bestimmen Sie das Potential und die Stromfunktion für die angegebene komplexe Strömungsfunktion.
2. Bestimmen Sie die beiden kartesischen Geschwindigkeitskomponenten $u(r, \varphi)$ in x-Richtung und $v(r, \varphi)$ in y-Richtung in Abhängigkeit von r und φ.
3. Bestimmen Sie den Wert der Konstanten a und n.
4. Bestimmen Sie den Verlauf des Druckbeiwertes c_p auf der Wand und skizzieren Sie diesen. Benutzen Sie u_L als Referenzgeschwindigkeit.
5. Skizzieren Sie sorgfältig die Linien konstanten Drucks.
6. Skizzieren Sie sorgfältig (ohne weitere Rechnung) das drehungsfreie Stromlinienfeld, sowie das drehungsbehaftete, ebene Stromlinienfeld. (2 Skizzen)

Gegeben: u_L, L

Hinweis zu a) und b):

- In diesen Aufgabenteilen dürfen in der Lösung a und n als Konstanten stehen.

Quelle: Herbst 2013

4. Aufgabe

Gegeben sind die Erhaltungsgleichungen für eine zweidimensionale, inkompressible Strömung mit konstanter Viskosität η und der Dichte ρ:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ \rho \frac{du}{dt} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ \rho \frac{dv}{dt} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \end{aligned}$$

1. Leiten Sie für diese Strömung die Wirbeltransportgleichung her:

   $$\frac{d\omega_z}{dt} = \frac{\eta}{\rho} \left(\frac{\partial^2 \omega_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial y^2} \right) \quad .$$

2. Zeigen Sie, dass $\omega_z = 0$ eine Lösung der Transportgleichung in einer zweidimensionalen, inkompressiblen und reibungsfreien Strömung ist.

Hinweis:

- $\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y}$

Quelle: Herbst 2013