

1. Aufgabe

- a) Grenzschichtannahmen $u \gg v$ und $\frac{\partial}{\partial x} \ll \frac{\partial}{\partial y}$
 Größenordnung konvektiver Term = diffusiver Term:

$$\frac{u_\infty^2}{L} \sim \nu \frac{u_\infty}{\delta^2} \Rightarrow \delta \sim \sqrt{\frac{\nu L}{u_\infty}} = \frac{L}{\sqrt{Re}} \quad \text{mit} \quad Re = \frac{u_\infty L}{\nu}$$

Auf Referenzgrößen bezogene dimensionslose Größen:

$$\bar{x} = \frac{x}{L}, \quad \bar{u} = \frac{u}{u_\infty}, \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_\infty}, \quad \bar{T} = \frac{T}{T_\infty}, \quad \bar{p} = \frac{p}{p_{ref}}$$

$$\bar{y} = \frac{y}{\delta} = \frac{y}{L/\sqrt{Re}}, \quad \bar{v} = \frac{v}{u_\infty/\sqrt{Re}}$$

Energiegleichung in dimensionsloser Form:

$$\rho_\infty c_p \frac{u_\infty T_\infty}{L} \bar{\rho} \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} \right) = \frac{u_\infty p_{ref}}{L} \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} \right) + \lambda \frac{T_\infty}{L^2} \left(\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} + Re \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} \right)$$

$$+ \eta \frac{u_\infty^2}{L^2} \left[2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{Re}} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \sqrt{Re} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) \right]$$

Mit $\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} = 0$ und $\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} = 0$ für die ebene Platte und Multiplikation mit $L/(\rho_\infty c_p u_\infty T_\infty)$:

$$\bar{\rho} \left(\underbrace{\bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}}}_{\mathcal{O}(1)} + \underbrace{\bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}}}_{\mathcal{O}(1)} \right) = \lambda \frac{1}{c_p \eta} \underbrace{\frac{1}{Re}}_{\mathcal{O}(\delta^2)} \left(\underbrace{\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2}}_{\mathcal{O}(1)} + \underbrace{Re \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2}}_{\mathcal{O}(\frac{1}{\delta^2})} \right)$$

$$+ \frac{u_\infty^2}{c_p T_\infty} \underbrace{\frac{1}{Re}}_{\mathcal{O}(\delta^2)} \left[\underbrace{2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \right)^2}_{\mathcal{O}(1)} + \underbrace{2 \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right)^2}_{\mathcal{O}(1)} + \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{Re}} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \sqrt{Re} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right)^2}_{\mathcal{O}(\delta)} - \frac{2}{3} \left(\underbrace{\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}}}_{\mathcal{O}(1)} + \underbrace{\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}}}_{\mathcal{O}(1)} \right) \right]$$

Grenzschicht: Größenordnungsabschätzung mit $Re \gg 1$ ($\delta \ll 1$), alle Terme mit $\mathcal{O} < 1$ fallen weg:

$$\bar{\rho} \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} \right) = \lambda \frac{1}{c_p \eta} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} + \frac{u_\infty^2}{c_p T_\infty} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right)^2$$

b) Aus a) ergeben sich folgende Kennzahlen:

$$K_1 = \frac{\lambda}{c_p \eta} \quad K_2 = \frac{u_\infty^2}{c_p T_\infty}$$

c)

$$K_1 = \frac{\lambda}{c_p \eta} = \frac{1}{Pr}$$
$$K_2 = \frac{u_\infty^2}{c_p T_\infty} = \frac{u_\infty^2 (\gamma - 1)}{\gamma R T_\infty} = M_\infty^2 (\gamma - 1)$$

Quelle: Frühjahr 2017

2. Aufgabe

a) Integration der gegebenen Gleichung in y -Richtung:

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\eta} \frac{dp}{dx} y + C_1 \quad \Rightarrow \quad u(x, y) = \frac{1}{\eta} \frac{dp}{dx} \frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2$$

Randbedingungen:

$$u(y = 0) = u_\infty \quad \Rightarrow \quad C_2 = u_\infty$$

$$u(y = h(x)) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = -\frac{1}{h(x)} \left(\frac{1}{\eta} \frac{dp}{dx} \frac{h^2(x)}{2} + u_\infty \right)$$

$$\Rightarrow u(x, y) = \frac{1}{2\eta} \frac{dp}{dx} (y^2 - h(x)y) + u_\infty \left(1 - \frac{y}{h(x)} \right)$$

Volumenstrom $\dot{V}$ durch den Spalt: $\dot{V} = B \int_0^h u(x, y) dy$

$$\Rightarrow \dot{V} = B \left[\frac{1}{2\eta} \frac{dp}{dx} \left(\frac{1}{3} y^3 - \frac{h(x)}{2} y^2 \right) + u_\infty \left(y - \frac{y^2}{2h(x)} \right) \right]_0^h$$

$$\Leftrightarrow \dot{V} = \frac{B u_\infty h(x)}{2} - \frac{B h^3(x)}{12\eta} \frac{dp}{dx}$$

b) die Gleichung für $\dot{V}$ aus Teil a) nach $\frac{dp}{dx}$ umgestellt liefert:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{6\eta u_\infty}{h^2(x)} - \frac{12\eta \dot{V}_{max}}{B h^3(x)}$$

da der Volumenstrom konstant ist, liefert die Integration:

$$\Rightarrow \int_{p_1}^{p_2} dp = p_2 - p_1 = \Delta p = 6\eta u_\infty \int_0^L \frac{dx}{h^2(x)} - \frac{12\eta \dot{V}_{max}}{B} \int_0^L \frac{dx}{h^3(x)}$$

mit $h(x) = h_1 - \frac{h_1 - h_2}{L} x$

$$\Rightarrow \Delta p = 6\eta u_\infty \frac{\frac{L}{h_1 - h_2}}{h_1 - \frac{h_1 - h_2}{L} x} \Big|_0^L - \frac{12\eta \dot{V}_{max}}{B} \frac{\frac{1}{2} \frac{L}{h_1 - h_2}}{\left(h_1 - \frac{h_1 - h_2}{L} x \right)^2} \Big|_0^L$$

$$\Leftrightarrow \Delta p = 6\eta u_\infty \frac{L}{h_1 - h_2} \left(\frac{1}{h_2} - \frac{1}{h_1} \right) - \frac{12\eta \dot{V}_{max}}{B} \frac{1}{2} \frac{L}{h_1 - h_2} \left(\frac{1}{h_2^2} - \frac{1}{h_1^2} \right)$$

$$\Leftrightarrow \Delta p = 6\eta u_\infty \frac{L}{h_1 h_2} - \frac{12\eta \dot{V}_{max}}{B} \frac{L(h_1 + h_2)}{2 h_1^2 h_2^2}$$

$$\Leftrightarrow \Delta p = \frac{6\eta L}{h_1 h_2} \left(u_\infty - \frac{\dot{V}_{max}(h_1 + h_2)}{B h_1 h_2} \right)$$

3. Aufgabe (13 Punkte)

- a) Mit $u_\infty = U_\infty \cos(\alpha)$, $v_\infty = U_\infty \sin(\alpha)$ sowie der Quellenergiebigkeit $E_Q > 0$ und Senkenenergiebigkeit $E_S < 0$ folgt

$$F(z) = U_\infty [\cos(\alpha) - i \sin(\alpha)] z + \frac{E_Q}{2\pi} \ln(z + L) + \frac{E_S}{2\pi} \ln(z - L)$$

- b) Über die Definition der konjugiert komplexen Geschwindigkeit folgt

$$\bar{w} = u - iv = \frac{dF}{dz} = U_\infty [\cos(\alpha) - i \sin(\alpha)] + \frac{E_Q}{2\pi} \frac{1}{z + L} + \frac{E_S}{2\pi} \frac{1}{z - L}$$

Durch Erweiterung mittels des konjugiert komplexen Nenner

$$\frac{1}{z \pm L} = \frac{1}{(x \pm L) + iy} = \frac{1}{(x \pm L) + iy} \frac{(x \pm L) - iy}{(x \pm L) - iy} = \frac{(x \pm L) - iy}{(x \pm L)^2 + y^2}$$

kann der Ausdruck vereinfacht und nach Real- und Imaginärteil sortiert werden

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dz} &= \underbrace{\left[U_\infty \cos(\alpha) + \frac{E_Q}{2\pi} \frac{x + L}{(x + L)^2 + y^2} + \frac{E_S}{2\pi} \frac{x - L}{(x - L)^2 + y^2} \right]}_{=u(x,y)} \\ &\quad - i \underbrace{\left[U_\infty \sin(\alpha) + \frac{E_Q}{2\pi} \frac{y}{(x + L)^2 + y^2} + \frac{E_S}{2\pi} \frac{y}{(x - L)^2 + y^2} \right]}_{=v(x,y)} \end{aligned}$$

- c) Für $\alpha = 0$ folgt aus $v(x_s, y_s) = 0$ bzw. aus Gründen der Symmetrie, dass die Staupunkte auf $y_s = 0$ liegen sowie der Betrag der Ergiebigkeiten gleich sein muss, d.h., $|E_Q| = |E_S| =: E$, wobei $E_Q = E$ und $E_S = -E$. Mit $u(x_s = -2L, y_s = 0) = 0$ bestimmt sich E zu

$$\begin{aligned} u(x_s = -2L, y_s = 0, \alpha = 0) &= U_\infty + \frac{E}{2\pi} \frac{-L}{(-L)^2} - \frac{E}{2\pi} \frac{-3L}{(-3L)^2} = 0 \\ \Rightarrow 0 &= U_\infty 2\pi L + E \left(-1 + \frac{1}{3} \right) \\ \Rightarrow E &= 3\pi U_\infty L \end{aligned}$$

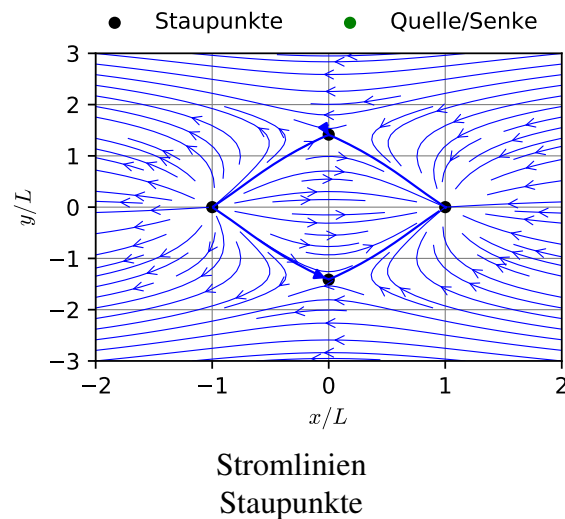
- d) Mit $\alpha = \pi$: $\sin(\alpha) = 0$, $\cos(\alpha) = -1$ und $E = E_Q = -E_S$ folgt

$$\begin{aligned} v(x, y) &= \frac{E}{2\pi} y \left[\frac{1}{(x + L)^2 + y^2} - \frac{1}{(x - L)^2 + y^2} \right] \stackrel{!}{=} 0 \\ y = 0 \quad \vee \quad &\left[\frac{1}{(x + L)^2 + y^2} - \frac{1}{(x - L)^2 + y^2} \right] = 0 \\ &\Rightarrow [(x - L)^2 + y^2] - [(x + L)^2 + y^2] = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \end{aligned}$$

Überprüfung der Nullstellen für die u Komponente

$$\begin{aligned}
 u(x, y) &= -U_\infty + \frac{E}{2\pi} \left[\frac{x+L}{(x+L)^2 + y^2} - \frac{x-L}{(x-L)^2 + y^2} \right] \\
 u(x=0, y) &= -U_\infty + \frac{E}{2\pi} \left[\frac{L}{(L)^2 + y^2} - \frac{-L}{(-L)^2 + y^2} \right] \stackrel{!}{=} 0 \\
 \Rightarrow 0 &= -U_\infty + \frac{E}{\pi} \frac{L}{L^2 + y^2} \Rightarrow y^2 = \frac{EL}{\pi U_\infty} - L^2 \stackrel{c)}{=} 2L^2 \\
 \Rightarrow (x_{sp}, y_{sp})_{1,2} &= (0, \pm\sqrt{2}L) \\
 u(x, y=0) &= -U_\infty + \frac{E}{2\pi} \left[\frac{x+L}{(x+L)^2 + y^2} - \frac{x-L}{(x-L)^2 + y^2} \right] \stackrel{!}{=} 0 \\
 \Rightarrow 0 &= -U_\infty + \frac{E}{2\pi} \left[\frac{x+L}{(x+L)^2} - \frac{x-L}{(x-L)^2} \right] = -U_\infty + \frac{E}{2\pi} \left[\frac{(x-L) - (x+L)}{(x+L)(x-L)} \right] \\
 &= -U_\infty + \frac{E}{\pi} \left[\frac{-L}{x^2 - L^2} \right] \rightarrow x^2 = L^2 - \frac{EL}{\pi U_\infty} \stackrel{c)}{=} -2L^2 \\
 \Rightarrow x &= \pm\sqrt{-2L^2} \rightarrow \text{Physikalisch bedeutungslos, da imaginär}
 \end{aligned}$$

Die zwei Staupunkte sind somit $(x_{sp}, y_{sp})_{1,2} = (0, \pm\sqrt{2}L)$.



Quelle: Frühjahr 2023