Tutorenprogramm - Strömungsmechanik I

Impuls- und Impulsmomentensatz - Musterlösung

1. Aufgabe

1. Impulssatz in x-Richtung:
   $\frac{dI_x}{dt} = \varrho v^2 \cos\alpha B = F_x$
   Die gesuchte Kraft ist $F = -F_x$.

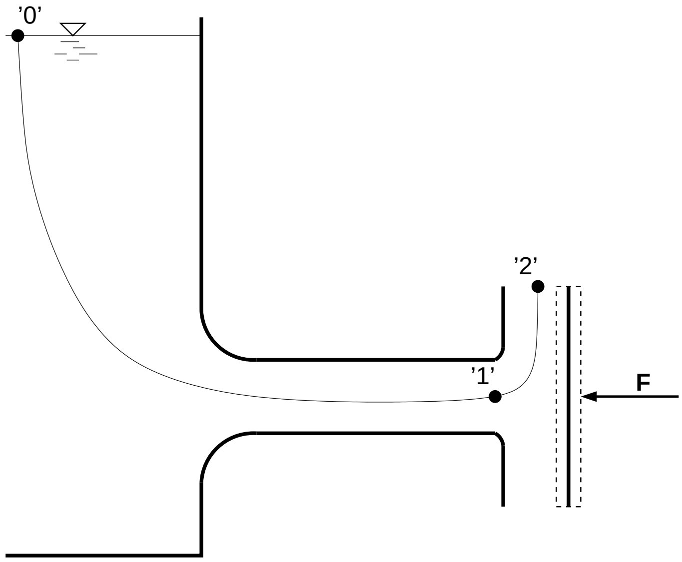
2. verlustfreie Umlenkung, Bernoulli von '0'-'1' und '0'-'2':
   $p_a + \frac{\varrho}{2} v^2 = p_a + \frac{\varrho}{2} v_1^2$
   $p_a + \frac{\varrho}{2} v^2 = p_a + \frac{\varrho}{2} v_2^2$
   $\rightarrow v_2 = v_1 = v$
   Konti:
   $\rightarrow vB = v_1 B_1 + v_2 B_2 \rightarrow B = B_1 + B_2$

   Impulssatz in y-Richtung KV 1:
   $\frac{dI_y}{dt} = \varrho v^2 \sin\alpha B + \varrho v_1^2 B_1 - \varrho v_2^2 B_2 = 0$
   $\rightarrow \quad v^2 \sin\alpha B + v^2 B_1 - v^2 (B - B_1) = 0$
   $\rightarrow \quad (\sin\alpha - 1) B + 2 B_1 = 0$
   $\rightarrow \quad B_1 = \frac{B}{2}(1 - \sin\alpha)$
   $\rightarrow \quad B_2 = \frac{B}{2}(1 + \sin\alpha)$

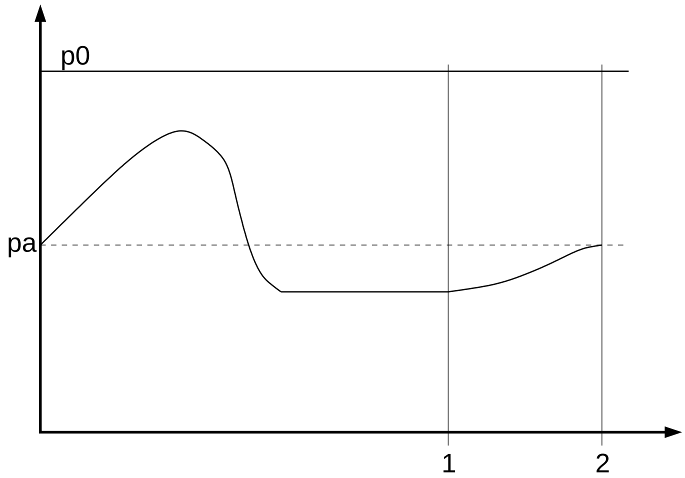
3. Impulssatz in x-Richtung für die bewegte Kontrollfläche:
   $\frac{dI_x}{dt} = \int \varrho v_a \, (\vec{v}_r \cdot \vec{n}) \, dA = F_x$
   $\varrho v_a v_r - \varrho v_F v_r \frac{B}{2} - \varrho v_F v_r \frac{B}{2} = F_x$
   $\rightarrow F_x = \varrho v (v - v_F) B - \varrho v_F (v - v_F) B$
   $= \varrho (v - v_F)^2 B.$
   Die gesuchte Kraft $F = -F_x$.
   $v_a =$ Absolutgeschw.
   $v_r =$ Relativgeschw.
   $v_r = v - v_F$

Quelle: Frühjahr 2007

2. Aufgabe



1. Druckverlauf (mehrere Möglichkeiten):



2. Bernoulli $0 \to 2$ $(D \ll H)$

   $p_a + \rho g H = p_a + \dfrac{\rho}{2}{v_2}^2 \quad \to \quad v_2 = \sqrt{2gH}$

   Konti: $\quad v(r) 2\pi r B = v_2 2\pi \dfrac{D}{2} B \quad \to \quad v(r) = \sqrt{2gH}\dfrac{D}{2r}$

   Bernoulli 'r' $\to$ 2: $\left(r \geq \dfrac{d}{2}\right)$

   $p(r) + \dfrac{\rho}{2}v^2(r) = p_a + \dfrac{\rho}{2}{v_2}^2 \quad \to \quad p\left(r\right) = p_a + \rho g H\left(1 - \dfrac{D^2}{4r^2}\right) \quad \dfrac{d}{2} \leq r \leq \dfrac{D}{2}$

   aus der Aufgabenstellung und mit $v(r = d/2) = \sqrt{2gH}D/d$:

   $p\left(r\right) = p_a + \rho g H\left(1 - \dfrac{2r}{d}\dfrac{D^2}{d^2}\right), \qquad 0 \leq r \leq \dfrac{d}{2}$

Impulssatz um die Platte (x-Richtung):

$$\int_0^{\frac{d}{2}} (p(r) - p_a)\, 2\pi r \; dr + \int_{\frac{d}{2}}^{\frac{D}{2}} (p(r) - p_a)\, 2\pi r \; dr = -F$$

$$\rightarrow \int_0^{\frac{d}{2}} 2\pi\rho g H \left(1 - \frac{2rD^2}{d^3}\right) r\, dr + \int_{\frac{d}{2}}^{\frac{D}{2}} 2\pi\rho g H \left(1 - \frac{D^2}{4r^2}\right) r \; dr = -F$$

$$\rightarrow -F = \frac{\pi}{2}\rho g H \left(\frac{d^2}{2} - \frac{D^2}{3}\right) + \frac{\pi}{2}\rho g H \left(\frac{D^2}{2} - \frac{d^2}{2} - D^2 \ln\frac{D}{d}\right) = \frac{\pi D^2}{2}\rho g H \left(\frac{1}{6} - \ln\frac{D}{d}\right)$$

$\rightarrow F = \dfrac{\pi D^2}{2}\rho g H \left(\ln\dfrac{D}{d} - \dfrac{1}{6}\right)$ d.h. für $\ln\frac{D}{d} > \frac{1}{6}$ wird die Platte angesaugt.

Quelle: Frühjahr 2009

3. Aufgabe

1. Kontinuitätsgleichung:

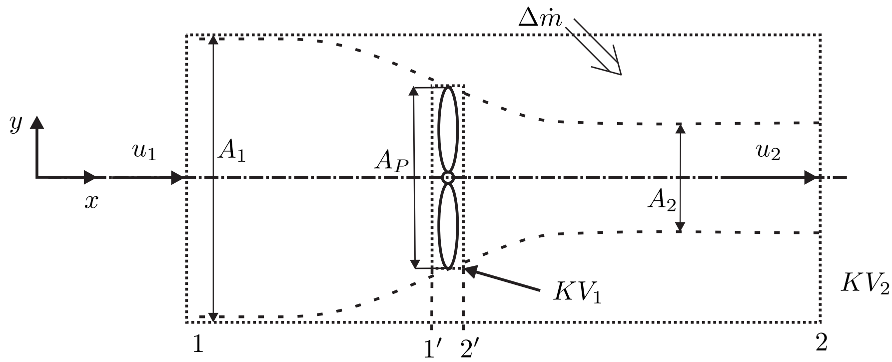
   $\rho u_1 A_1 = \rho u_2 A_2 = \rho u_P A_P$

   $\frac{A_P}{A_2} = \frac{u_2}{u_P}$

   Bedingung für Geschwindigkeit in Propellerebene:

   $u_P = \frac{u_1 + u_2}{2}$

   $A_2 = A_P \frac{u_1 + u_2}{2u_2} \qquad [m^2] \qquad (1)$



2. Impulserhaltungssatz in x-Richtung über Kotrollvolumen 1 (KV_1):

   $-\rho u_{1'}^2 A_P + \rho u_{2'}^2 A_P = (p_{1'} - p_{2'})A_P + F_P$

   $\Rightarrow (p_{2'} - p_{1'})A_P = F_P \qquad (2)$

   Bernoulli von 1 - 1':

   $p_a + \frac{\rho}{2}u_1^2 = p_{1'} + \frac{\rho}{2}u_{1'}^2 \qquad (3)$

   Bernoulli von 2' - 2:

   $p_{2'} + \frac{\rho}{2}u_{2'}^2 = p_a + \frac{\rho}{2}u_2^2 \qquad (4)$

   Gleichung (3) und (4) gleich setzen:

   $p_{1'} - p_{2'} = \frac{\rho}{2}(u_1^2 - u_2^2) \qquad (5)$

   (5) einsetzen in (2):

   $F_P = \frac{\rho}{2}(u_2^2 - u_1^2)A_P \qquad \left[\frac{kg}{m^3}\left(\frac{m^2}{s^2}\right)m^2 = N\right]$

   Alternativer Lösungsweg:

   Impulserhaltungssatz in x-Richtung über Kontrollvolumen 2 (KV_2):

   $-\Delta\dot{m}u_1 - \rho u_1^2 A_1 + \rho u_2^2 A_2 + \rho u_1^2(A_1 - A_2) = F_P$

   $-\Delta\dot{m}u_1 + \rho A_2(u_2^2 - u_1^2) = F_P \qquad (7)$

   Kontinuitätsgleichung:

   $\Delta\dot{m} + \rho u_1 A_1 = \rho u_2 A_2 + \rho u_1(A_1 - A_2)$

   $\Delta\dot{m} = \rho u_2 A_2 - \rho u_1 A_2 = \rho A_2(u_2 - u_1) \qquad (8)$

Gleichung (8) in (7) einsetzen:

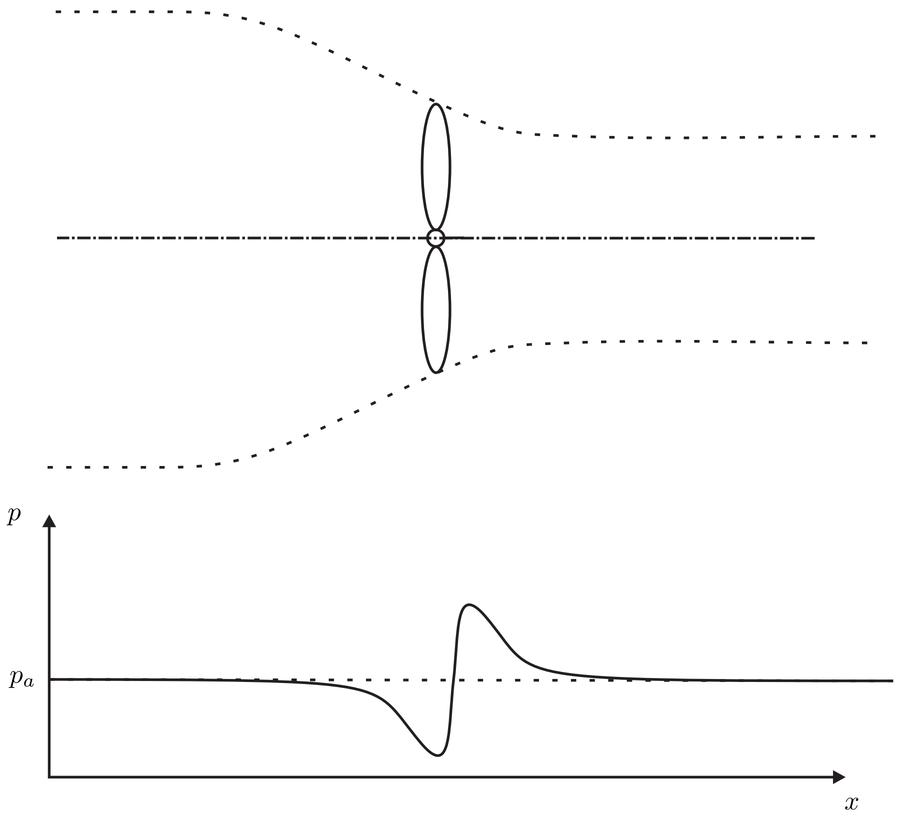
$-\rho A_2(u_2u_1 - u_1^2) + \rho A_2(u_2^2 - u_1^2) = F_P$

$$\Rightarrow F_P = \rho A_2(u_2^2 - u_2u_1) \tag{9}$$

Mit Gleichung (1): $F_P = \rho A_P \dfrac{u_1 + u_2}{2u_2}(u_2^2 - u_2u_1)$

$\Rightarrow F_P = \dfrac{\rho}{2} A_P(u_2^2 - u_1^2) \qquad \left[\dfrac{kg}{m^3}\left(\dfrac{m^2}{s^2}\right)m^2 = N\right]$

3. Druckverlauf:



Quelle: Herbst 2013

4. Aufgabe

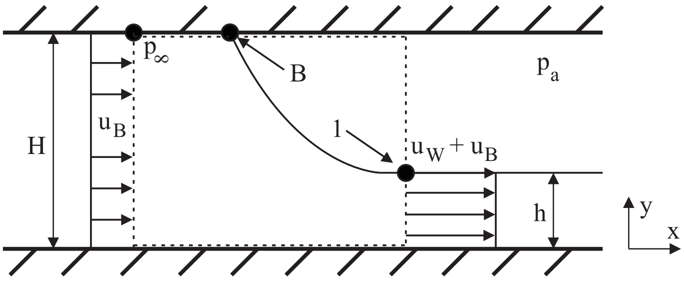
1. Absolutsystem: Strömung instationär

   Bezugssytem mit u_B bewegt: Strömung stationär

   Bernoulli $B \to \infty$: $\quad p_B = p_\infty + \frac{1}{2}\rho u_B^2; \quad p_B = p_a$

   $\Rightarrow p_\infty = p_a - \frac{1}{2}\rho u_B^2 \quad (1)$

2. Impulssatz: mit u_B mitbewegtes Kontrollvolmen



$$\int_A \rho\vec{v}(\vec{v}\cdot\vec{n})dA = \sum \vec{F}$$

$$-\rho u_B^2 H + \rho(u_W + u_B)^2 h = \int_0^H [p_\infty + \rho g(H-y)]dy - p_a(H-h) - \int_0^h [p_a + \rho g(h-y)]dy$$

$$-\rho u_B^2 H + \rho(u_W + u_B)^2 h = (p_\infty + \frac{1}{2}\rho g H)H - p_a(H-h) - (p_a + \frac{1}{2}\rho g h)h$$

$$-\rho u_B^2 H + \rho(u_W + u_B)^2 h = \frac{1}{2}\rho g(H^2 - h^2) + (p_\infty - p_a)H \quad (2)$$

Bernoulli $B \to 1$: $\quad p_a + \rho g H = p_a + \rho g h + \frac{1}{2}\rho(u_W + u_B)^2$

$\Rightarrow (u_W + u_B)^2 = 2g(H-h) \quad (3)$

Konti: $\quad u_B H = (u_W + u_B)h$

Quadrieren, mit (3) $\quad \Rightarrow u_B^2 H = 2gh^2\left(1 - \frac{h}{H}\right) \quad (4)$

(1), (3), (4) in (2):

$$-2\rho g h^2\left(1 - \frac{h}{H}\right) + 2\rho g h\,(H-h) = \frac{1}{2}\rho g(H^2 - h^2) - \rho g\frac{h^2}{H}(H-h)$$

$$\Rightarrow -2h^2(H-h) + 2hH(H-h) = \frac{1}{2}H(H^2 - h^2) - h^2(H-h)$$

$$\Rightarrow -2h^2 + 2hH = \frac{1}{2}H(H+h) - h^2$$

$$\Rightarrow h^2 - \frac{3}{2}Hh + \frac{1}{2}H^2 = 0 \quad \text{quadr. Gl. für h}$$

$$\Rightarrow h_{1/2} = \frac{3}{4}H \pm \sqrt{\frac{9}{16} - \frac{8}{16}}H$$

$$\Rightarrow h = \frac{1}{2}H \quad \text{(2. Lsg. h = H nicht sinnvoll)}$$

Quelle: Herbst 2017

3. Aufgabe