Tutorenprogramm - Strömungsmechanik I

Kontinuitäts- und Bernoulligleichung - Detaillierte Musterlösung

1. Aufgabe

a) $\frac{F}{T} = ?$

Keine Kraft in y-Richtung. Aber in x-Richtung, deshalb wird ein Impulssatz in x-Richtung gestellt:

$$\frac{\mathrm{d}I_x}{\mathrm{d}t} = \int_{KF} \rho v_x (\vec{v} \cdot \vec{n}) \, \mathrm{d}A = F_x$$

Hinweis: Die Kraft F_x wird konventionell definiert als die Kraft, die von der externen Umgebung auf das Fluid wirkt.

Nur der Eingangswasserstrahl mit der Geschwindigkeit v hat einen Beitrag in x-Richtung:

$$F_x = \rho(-v)\cos(\alpha)(-v)BT = \rho v^2 \cos(\alpha)BT$$

Die gesuchte Kraft ist die Kraft vom Strahl auf die Platte, also die Gegenkraft von $F_x \Rightarrow F = -F_x$:

$$\Rightarrow F = -\rho v^2 \cos(\alpha)BT \qquad \Big| : T$$
$$\Rightarrow \frac{F}{T} = -\rho v^2 \cos(\alpha)B$$

b) B_1, $B_2 = ?$

Die erste Gleichung für die beiden Unbekannten erhält man mit einem Impulssatz in y-Richtung, da die Größen B_1 und B_2 nur in y-Richtung auftauchen:

$$\frac{\mathrm{d}I_y}{\mathrm{d}t} = \rho(-v)\sin(\alpha)(-v)BT + \rho(-v_1)(+1)(-v_1)B_1T + \rho v_2(-1)v_2B_2T = 0 \qquad \Big| : \rho T$$
$$\Rightarrow v^2 \sin(\alpha)B + v_1^2 B_1 - v_2^2 B_2 = 0$$

Die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 kann man mit zwei Bernoulligleichungen bestimmen. dabei ist zu beachten, dass die Erdanziehungkraft entlang der Stromlinie kein Einfluss hat und somit kein geodätischer Druck entsteht:

$$0 \to 1: \qquad p_\mathrm{a} + \frac{\rho}{2}v^2 = p_\mathrm{a} + \frac{\rho}{2}v_1^2 \qquad \Rightarrow v_1 = v$$
$$0 \to 2: \qquad p_\mathrm{a} + \frac{\rho}{2}v^2 = p_\mathrm{a} + \frac{\rho}{2}v_2^2 \qquad \Rightarrow v_2 = v$$

Eingesetzt:

$$\Rightarrow v^2 \sin(\alpha)B + v^2 B_1 - v^2 B_2 = 0 \qquad \Big| : v^2$$
$$\Rightarrow \sin(\alpha)B + B_1 - B_2 = 0 \qquad (1)$$

Eine zweite Gleichung für die beiden Unbekannten erhält man aus der Kontinuitätsgleichung:

$$vBT = v_1B_1T + v_2B_2T \qquad \Big| v_1 = v_2 = v$$
$$\Rightarrow B = B_1 + B_2 \qquad (2)$$

Beide Gleichungen nach B_2 umstellen und gleichsetzen:

$$\begin{aligned}
(1):\quad && B_2 &= \sin(\alpha)B + B_1 \\
(2):\quad && B_2 &= B - B_1 \\
&& \Rightarrow \sin(\alpha)B + B_1 &= B - B_1 \\
&& \Rightarrow B_1 &= \frac{B}{2}\left(1 - \sin(\alpha)\right)
\end{aligned}$$

In (2) eingesetzt:

$$\begin{aligned}
B_2 &= B - \frac{B}{2}\left(1 - \sin(\alpha)\right) \\
\Rightarrow B_2 &= \frac{B}{2}\left(1 + \sin(\alpha)\right)
\end{aligned}$$

c) $\frac{F}{T} = ?$

Impulssatz in x-Richtung für die bewegte Kontrollfläche:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}I_x}{\mathrm{d}t} = \int_{KF} \rho v_{\mathrm{rel},x}(\vec{v}_{\mathrm{rel}} \cdot \vec{n})\,\mathrm{d}A &= F_x \\
\Rightarrow \rho(-v_{\mathrm{rel}})(-v_{\mathrm{rel}})BT &= F_x \\
\Rightarrow \rho v_{\mathrm{rel}}^2 BT &= F_x
\end{aligned}$$

Mit der relativen Geschwindigkeit v_{rel}, die sich aus der Absolutgeschwindigkeit v und der Relativgeschwindigkeit v_F zusammensetzt:

$$v_{rel} = v - v_F, \tag{0.1}$$

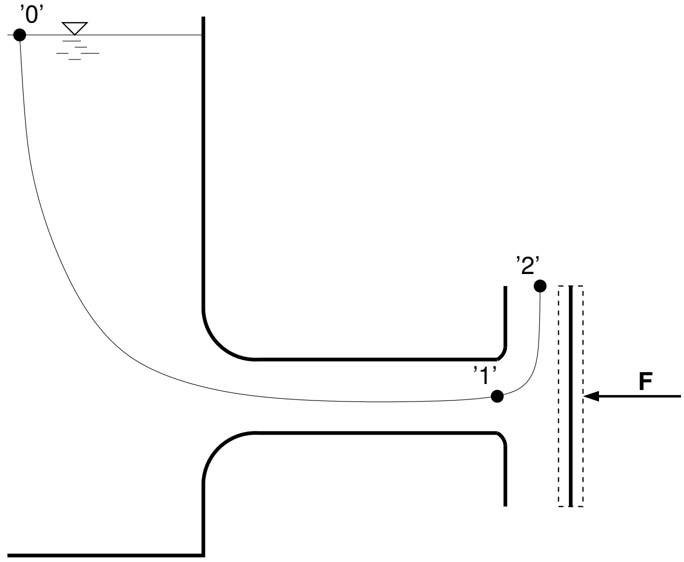
da die Geschwindigkeiten in die gleiche Richtung weisen.

Eingesetzt ergibt das:

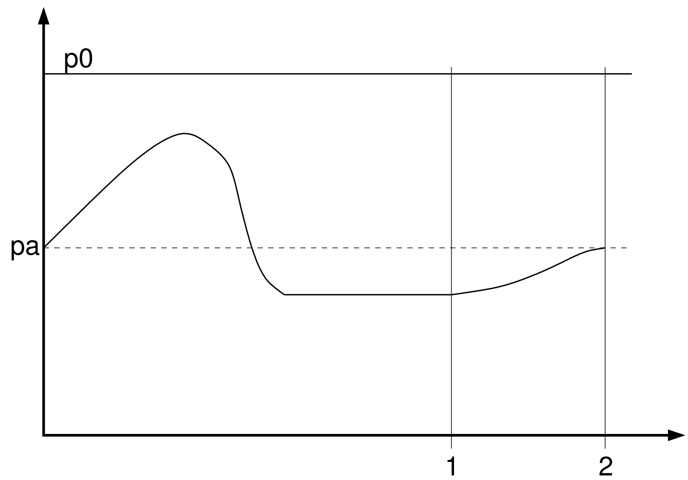
$$\begin{aligned}
\frac{F_x}{T} &= \rho\left(v - v_F\right)^2 B \qquad \Big|\,\text{aus a): } \frac{F}{T} = -\frac{F_x}{T} \\
\Rightarrow \frac{F}{T} &= -\rho(v - v_F)^2 B
\end{aligned}$$

Quelle: Frühjahr 2007

2. Aufgabe



a) Druckverlauf (mehrere Möglichkeiten):



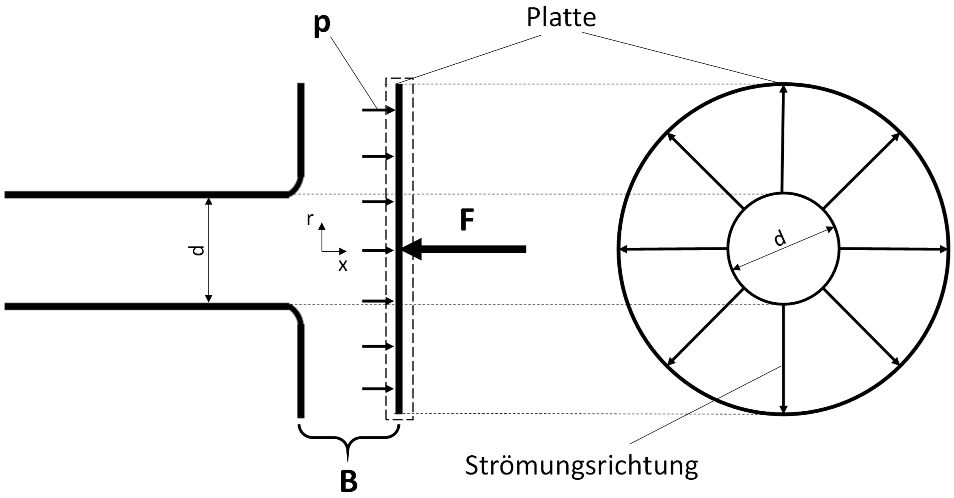
- „Aus einem großen Reservoir... “ → Fluidgeschwindigkeit an der Behälteroberfläche und im Behälter ist vernachlässigbar klein. Der kinetische Druck bis zur Eintrittsöffnung des Rohres wird nicht berücksichtigt.
- „...strömt Wasser verlustfrei durch eine Rohrleitung... “ → keine Reibung zwischen Fluid und Rohr ($p_{Verlust,Rohr} = \frac{\rho}{2}v^2\lambda\frac{L}{D} = 0$)
- „...gut gerundete Austrittsöffnung... “ → keine Strömungsablösung am Austritt

  ($p_{Verlust,Austritt} = \frac{\rho}{2}v^2\zeta = 0$)
- sofern in der AS nichts weiteres genannt wird (auch die Hinweise beachten!), wird an den restlichen Stellen/ Bereichen von einem verlustfreien Fluid ausgegangen
- daraus erschließt sich, dass das gesamte System verlustfrei ist → $p_0 = konstant$

Erläuterung des statischen Druckverlaufs:

- allgemein gilt: die Bernoullikonstante gilt nur entlang einer Stromlinie: ($p_0 = p_{\mathrm{stat}} + p_{\mathrm{kin}} + p_{\mathrm{geo}} = \text{konstant}$)
- das Nullniveau für den geodätischen Druck kann an einer beliebigen Stelle festgelegt werden (hier: auf der Höhe des Rohres)
- auf der Oberfläche des Resevoirs herrscht nur der Außendruck und der geodätische Druck ($p_0 = p_{\mathrm{a}} + \rho g H = \text{konstant}$)
- die Bewegung des Fluidteilchens in Richtung der Eintrittsöffnung verursacht eine Verringerung des geodätischen Drucks, sodass der statische Druck linear ansteigt
- **kurz vor Rohreintritt** wird das Fluidteilchen in das Rohr eingesogen, sodass an dieser Stelle die Geschwindigkeit bzw. der kinetische Druck nicht mehr vernachlässigt werden darf ($\frac{\rho}{2}v^2 > 0; \rho g H \approx 0$) $\rightarrow p_{\mathrm{stat}}$ sinkt quadratisch (hierbei ist nicht die Tiefe der graphischen Absenkung entscheidend, sondern dass überhaupt eine Absenkung des statischen Druckes erkennbar ist)
- entlang des Rohres ändert sich sowohl die Höhe als auch die Geschwindigkeit nicht (Konti!) ($p_{\mathrm{stat}} = \text{konstant}$)
- von „1“ nach „2“ ist die Zunahme des geodätische Drucks vernachlässigbar (s. Hinweis: $D << H$), der kinetische Druck nimmt ab (hierbei ist zu erwähnen, dass keine Information bezüglich des Abstandes zwischen Rohr und Platte vorhanden ist) und somit der statische Druck zu. Da das Fluid erneut in die Atmosphäre gelangt, beträgt der statische Druck p_{a}!

b) Impulssatz in x-Richtung um die Platte:



$$\int_0^{\frac{D}{2}} p(r) 2\pi r \mathrm{d}r = -F - p_{\mathrm{a}} \pi \frac{D^2}{4}$$

Der Druck p ist in dieser Aufgabe abhängig vom Radius r und muss in einen inneren Bereich (1) $r \in \left[0; \frac{d}{2}\right]$ und einen äußeren Bereich (2) $r \in \left[\frac{d}{2}; \frac{D}{2}\right]$ unterteilt werden:

$$\int_0^{\frac{d}{2}} p_1(r) 2\pi r \; dr + \int_{\frac{d}{2}}^{\frac{D}{2}} p_2(r) 2\pi r \; dr = -F - p_{\mathrm{a}} \pi \frac{D^2}{4}$$

$p_1(r)$ wird mit dem Hinweis aus der Aufgabenstellung bestimmt:

$$p_1(r) = p_0 - \frac{r}{d}\rho\left(v\left(r = \frac{d}{2}\right)\right)^2$$

wobei p_0 der totaler Druck ist:

$$p_0 = p_{1,\text{tot}} = p_\text{a} + \rho g H$$

Die Geschwindigkeit $v(r)$ kann man mit Konti bestimmen:

$$v(r) 2\pi r B = v_2 2\pi \frac{D}{2} B$$

da die Durchtrittsfläche der Strömung der Mantelfläche eines Zylinders entspricht.

v_2 kann mit Bernoulli von 0 bis 2 bestimmt werden:

$$\begin{aligned} p_\text{a} + \rho g H &= p_\text{a} + \underbrace{\rho g \frac{D}{2}}_{=0,\,\text{da}\,D \ll H} + \frac{\rho}{2}{v_2}^2 \\ \Rightarrow v_2 &= \sqrt{2gH} \end{aligned}$$

Eingesetzt:

$$\begin{aligned} v(r) 2\pi r B &= \sqrt{2gH} 2\pi \frac{D}{2} B \\ \Rightarrow v(r) &= \sqrt{2gH}\frac{D}{2r} \end{aligned}$$

$v(r)$ eingesetzt in $p_1(r)$:

$$\begin{aligned} \Rightarrow p_1(r) &= p_\text{a} + \rho g H - \frac{r}{d}\rho\left(\sqrt{2gH}\frac{D}{2\frac{d}{2}}\right)^2 \\ \Rightarrow p_1(r) &= p_\text{a} + \rho g H\left(1 - \frac{2D^2}{d^3} r\right) \end{aligned}$$

$p_2(r)$ ist aus Bernoulli von r zu 2 zu bestimmen. Es wird der geodätische Term vernachlässigt, da $D \ll H$:

$$\begin{aligned} p_2(r) + \frac{\rho}{2}v^2(r) &= p_\text{a} + \frac{\rho}{2}{v_2}^2 \\ p_2(r) &= p_\text{a} + \frac{\rho}{2}\left({v_2}^2 - v^2(r)\right) \\ p_2(r) &= p_\text{a} + \rho g H\left(1 - \frac{D^2}{4r^2}\right) \end{aligned}$$

Die beiden Druckverläufe in dem Impulssatz einsetzen:

$$\int_0^{\frac{d}{2}} \left(p_\text{a} + \rho g H\left(1 - \frac{2D^2}{d^3} r\right)\right) 2\pi r\, dr + \int_{\frac{d}{2}}^{\frac{D}{2}} \left(p_\text{a} + \rho g H\left(1 - \frac{D^2}{4r^2}\right)\right) 2\pi r\, dr = -F - p_\text{a}\pi\frac{D^2}{4}$$

$$\Rightarrow p_\text{a}\pi\frac{d^2}{4} + \rho g H\pi\left(\frac{d^2}{4} - \frac{D^2}{6}\right) + p_\text{a}\pi\frac{D^2}{4} - p_\text{a}\pi\frac{d^2}{4} + \rho g H\pi\left(\frac{D^2}{4} - \frac{d^2}{4} - \frac{D^2}{2}\ln\left(\frac{D}{d}\right)\right) = -F - p_\text{a}\pi\frac{D^2}{4}$$

$$\Rightarrow -\rho g H\pi\frac{D^2}{6} + \rho g H\pi\frac{D^2}{4} - \frac{D^2}{2}\ln\left(\frac{D}{d}\right) = -F$$

Das ergibt dann am Ende die Kraft:

$$\Rightarrow F = \rho g H \pi \frac{D^2}{2} \left(\ln \left(\frac{D}{d} \right) - \frac{1}{6} \right)$$

Quelle: Frühjahr 2009

3. Aufgabe

a) $A_2 = ?$

A_2 is mit Konti direkt herleitbar:

$$u_2 A_2 = u_\mathrm{P} A_\mathrm{P}$$
$$\Rightarrow A_2 = \frac{u_\mathrm{P}}{u_2} A_\mathrm{P}$$

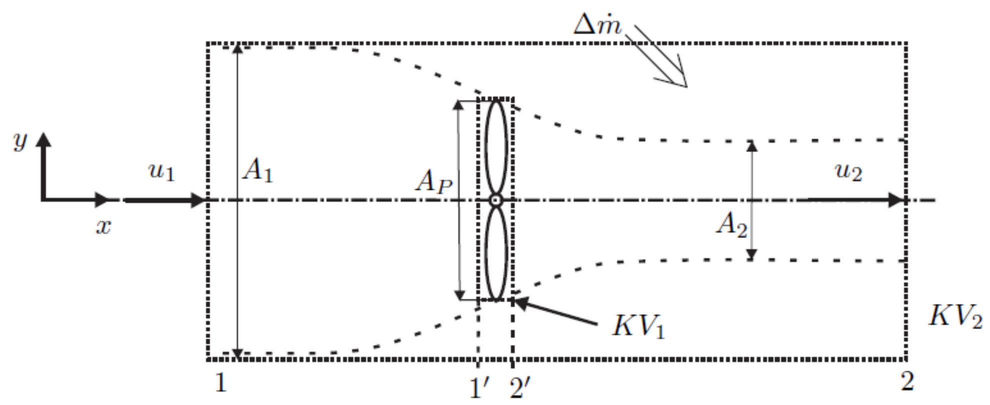
Geschwindigkeit in Propellerebene u_P nach der vereinfachten Propellerthoerie:

$$u_\mathrm{P} = \frac{u_1 + u_2}{2}$$

Das eingesetzt:

$$\Rightarrow A_2 = \frac{u_1 + u_2}{2u_2} A_\mathrm{P}$$

b) $F_\mathrm{P} = ?$



Impulserhaltungssatz in x-Richtung über Kontrollvolumen 1 (KV_1):

$$\frac{\mathrm{d}I_x}{\mathrm{d}t} = \int_{KF} \rho v_x (\vec{v} \cdot \vec{n})\,\mathrm{d}A = \sum F_x$$
$$\int_{A_\mathrm{P}} \rho u_{1'}(u_{1'} \cdot (-1))\,\mathrm{d}A + \int_{A_\mathrm{P}} \rho u_{2'}(u_{2'} \cdot (+1))\,\mathrm{d}A = \sum F_x$$
$$\Rightarrow -\rho u_{1'}^2 A_\mathrm{P} + \rho u_{2'}^2 A_\mathrm{P} = \sum F_x$$

Die Summe der Kräfte auf der rechten Seite besteht aus zwei Druckkräfte und die externe Kraft die vom Propeller auf die Strömung wirkt:

$$\sum F_x = F_\mathrm{Druck} + F_\mathrm{P}$$
$$\Rightarrow \sum F_x = -\int_A p\vec{n}\,\mathrm{d}A + F_\mathrm{P}$$
$$\Rightarrow \sum F_x = \left(-\int_{A_\mathrm{P}} p_{1'}\vec{n}\,\mathrm{d}A - \int_{A_\mathrm{P}} p_{2'}\vec{n}\,\mathrm{d}A\right) + F_\mathrm{P}$$
$$\Rightarrow \sum F_x = (-p_{1'} \cdot (-1)A_\mathrm{P} - p_{2'} \cdot (+1)A_\mathrm{P}) + F_\mathrm{P}$$
$$\Rightarrow \sum F_x = (p_{1'} - p_{2'})A_\mathrm{P} + F_\mathrm{P}$$

Das eingesetzt:

$$\Rightarrow -\rho u_{1'}^2 A_\mathrm{P} + \rho u_{2'}^2 A_\mathrm{P} = (p_{1'} - p_{2'}) A_\mathrm{P} + F_\mathrm{P}$$

Die Geschwindigkeiten $u_{1'}$ und $u_{2'}$ können mit Konti ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} u_{1'} A_\mathrm{P} &= u_{2'} A_\mathrm{P} \\ \Rightarrow u_{1'} &= u_{2'} \end{aligned}$$

Eingesetzt:

$$\begin{aligned} \Rightarrow -\rho u_{2'}^2 A_\mathrm{P} + \rho u_{2'}^2 A_\mathrm{P} &= (p_{1'} - p_{2'}) A_\mathrm{P} + F_\mathrm{P} \\ \Rightarrow F_\mathrm{P} &= (p_{2'} - p_{1'}) A_\mathrm{P} \end{aligned}$$

Die Drücke $p_{1'}$ und $p_{2'}$ können mit Bernoulli bestimmt werden:

$$\begin{aligned} 1 \to 1' : &\qquad p_\mathrm{a} + \frac{\rho}{2} u_1^2 = p_{1'} + \frac{\rho}{2} u_{1'}^2 \\ 2' \to 2 : &\qquad p_{2'} + \frac{\rho}{2} u_{2'}^2 = p_\mathrm{a} + \frac{\rho}{2} u_2^2 \end{aligned}$$

Umgestellt:

$$\begin{aligned} \Rightarrow p_{1'} &= p_\mathrm{a} + \frac{\rho}{2}(u_1^2 - u_{1'}^2) \\ \Rightarrow p_{2'} &= p_\mathrm{a} + \frac{\rho}{2}(u_2^2 - u_{2'}^2) \end{aligned}$$

Eingesetzt in die Kraftgleichung:

$$\begin{aligned} \Rightarrow F_\mathrm{P} &= \left(p_\mathrm{a} + \frac{\rho}{2}(u_2^2 - u_{2'}^2) - \left(p_\mathrm{a} + \frac{\rho}{2}(u_1^2 - u_{1'}^2)\right)\right) A_\mathrm{P} \\ \Rightarrow F_\mathrm{P} &= \frac{\rho}{2}(u_2^2 - u_{2'}^2 - u_1^2 + u_{1'}^2) A_\mathrm{P} && \Big| \, u_{1'} = u_{2'} \\ \Rightarrow F_\mathrm{P} &= \frac{\rho}{2}(u_2^2 - u_1^2) A_\mathrm{P} \end{aligned}$$

<u>Alternativer Lösungsweg</u>:

Impulserhaltungssatz in x-Richtung über Kontrollvolumen 2 (KV_2):

$$\begin{aligned} -\Delta\dot{m} u_1 - \rho u_1^2 A_1 + \rho u_2^2 A_2 + \rho u_1^2 (A_1 - A_2) &= F_\mathrm{P} \\ \Rightarrow -\Delta\dot{m} u_1 + \rho A_2 (u_2^2 - u_1^2) &= F_\mathrm{P} \end{aligned}$$

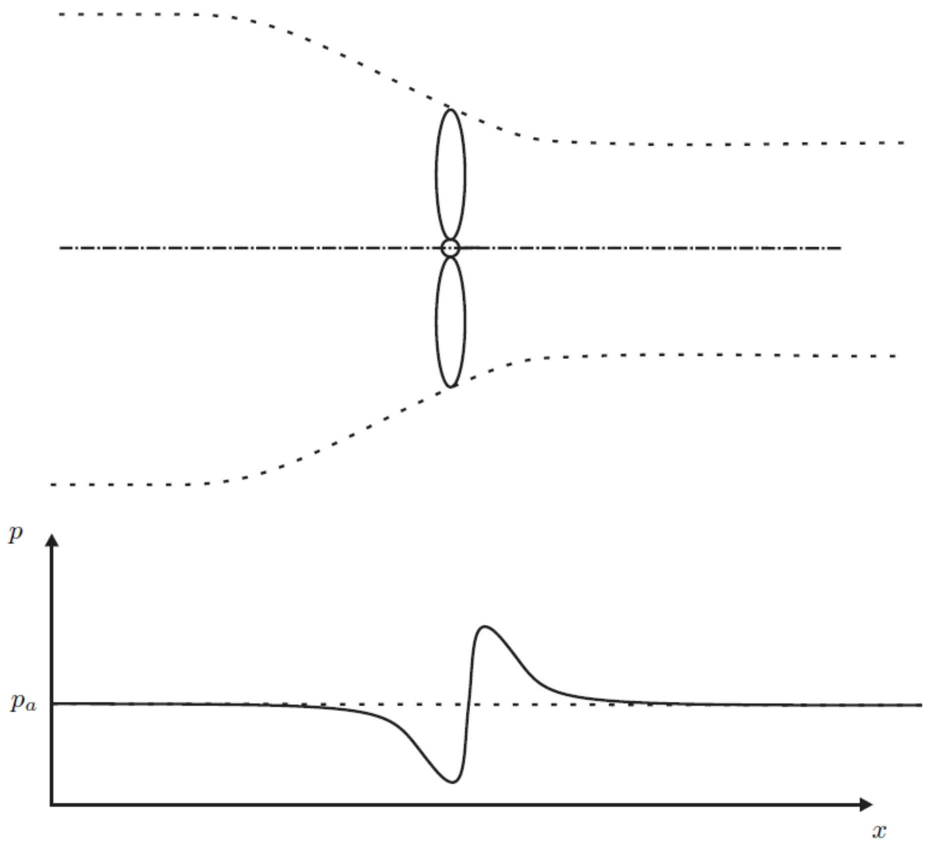
Konti:

$$\begin{aligned} \Delta\dot{m} + \rho u_1 A_1 &= \rho u_2 A_2 + \rho u_1 (A_1 - A_2) \\ \Rightarrow \Delta\dot{m} &= \rho u_2 A_2 - \rho u_1 A_2 = \rho A_2 (u_2 - u_1) \end{aligned}$$

Eingesetzt:

$$\begin{aligned} \Rightarrow F_\mathrm{P} &= -\rho A_2 (u_2 u_1 - u_1^2) + \rho A_2 (u_2^2 - u_1^2) = \rho A_2 (u_2^2 - u_2 u_1) && \Big| \, \text{aus a) } A_2 = \frac{u_1 + u_2}{2u_2} A_\mathrm{P} \\ \Rightarrow F_\mathrm{P} &= \rho A_\mathrm{P} \frac{u_1 + u_2}{2u_2} (u_2^2 - u_2 u_1) \\ \Rightarrow F_\mathrm{P} &= \frac{\rho}{2} A_\mathrm{P} (u_1 + u_2)(u_2 - u_1) \\ \Rightarrow F_\mathrm{P} &= \frac{\rho}{2} A_\mathrm{P} (u_2^2 - u_1^2) \end{aligned}$$

c) Druckverlauf:



Quelle: Herbst 2013

4. Aufgabe

a) $p_\infty = ?$

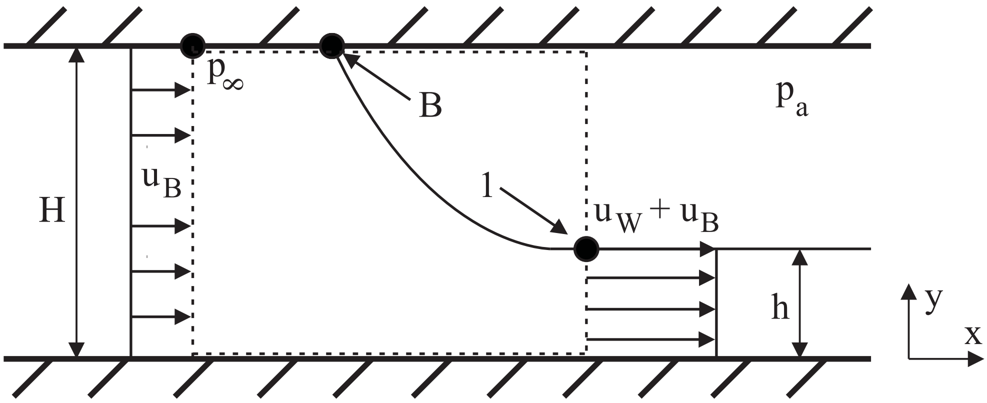
Da sich Punkt B mit der Geschwindigkeit u_{B} bewegt, ist er zeitlich nicht fest. Daher liegt ein instationärer Bernoulli vor.

Aus diesem Grund wird ein mitbewegtes Kontrollvolumen mit der Geschwindigkeit u_{B} gewählt. Dadurch erscheint Punkt B im Raum als ruhend, und auch der Punkt ∞ kann als ruhend betrachtet werden, da er unendlich weit entfernt liegt $\Rightarrow$ die Strömung ist stationär.

Bernoulli von B bis ∞:

$$p_{\mathrm{B}} = p_\infty + \frac{\rho}{2}u_{\mathrm{B}}^2 \quad \big| \, p_{\mathrm{B}} = p_{\mathrm{a}}$$
$$\Rightarrow p_\infty = p_{\mathrm{a}} - \frac{\rho}{2}u_{\mathrm{B}}^2$$

b) $h = ?$



Impulssatz in x-Richtung mit u_{B} mitbewegtes Kontrollvolumen:

$$\frac{\mathrm{d}I_x}{\mathrm{d}t} = \int_{KF} \rho v_x (\vec{v}\cdot\vec{n})\,\mathrm{d}A = \sum F_x$$
$$\rho \int_{A_\infty} u_{\mathrm{B}}(u_{\mathrm{B}}\cdot(-1))\,\mathrm{d}A + \rho\int_{A_1}(u_{\mathrm{W}}+u_{\mathrm{B}})\left((u_{\mathrm{W}}+u_{\mathrm{B}})\cdot(+1)\right)\,\mathrm{d}A = \sum F_x$$
$$\Rightarrow -\rho u_{\mathrm{B}}^2 TH + \rho(u_{\mathrm{W}}+u_{\mathrm{B}})^2 Th = \sum F_x$$

Die Summe der Kräfte auf der rechten Seite besteht aus der Druckkraft auf die Grenzen des Kontrollvolumens. Der Druck auf der rechten Seite muss in zwei Bereiche unterteilt werden, da die KF-Grenze von Luft und Wasser umgeben ist:

$$\sum F_x = -\int_A p\vec{n}\,\mathrm{d}A$$
$$\Rightarrow \sum F_x = \underbrace{T\int_0^H p_H(y)\mathrm{d}y}_{\text{Linke Seite}} - \left(\underbrace{p_{\mathrm{a}}(H-h)T + T\int_0^h p_h(y)\mathrm{d}y}_{\text{Rechte Seite}}\right)$$

$p_H(y)$ und $p_h(y)$ können mit der hydrostatischen Druckverteilung bestimmt werden, da sich der Druck unter Wasser mit der Tiefe ändert:

$$\begin{aligned} p_H(y) &= p_\infty + \rho g(H-y) \\ p_h(y) &= p_\mathrm{a} + \rho g(h-y) \end{aligned}$$

Eingesetzt:

$$\begin{aligned} \sum F_x &= T\int_0^H (p_\infty + \rho g(H-y))\,\mathrm{d}y - \left(p_\mathrm{a}(H-h)T + T\int_0^h (p_\mathrm{a} + \rho g(h-y))\,\mathrm{d}y\right) \\ \Rightarrow \sum F_x &= p_\infty HT + \rho g T\left(Hy - \frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^H - \left(p_\mathrm{a}(H-h)T + p_\mathrm{a}hT + \rho g T\left(hy - \frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^h\right) \\ \Rightarrow \sum F_x &= p_\infty HT + \rho g T\frac{H^2}{2} - \left(p_\mathrm{a}(H-h)T + p_\mathrm{a}hT + \rho g T\frac{h^2}{2}\right) \\ \Rightarrow \sum F_x &= \frac{\rho}{2} g T\left(H^2 - h^2\right) + TH(p_\infty - p_\mathrm{a}) \end{aligned}$$

Eingesetzt in den Impulssatz:

$$\begin{aligned} \Rightarrow -\rho u_\mathrm{B}^2 TH + \rho(u_\mathrm{W} + u_\mathrm{B})^2 Th &= \frac{\rho}{2} g T\left(H^2 - h^2\right) + TH(p_\infty - p_\mathrm{a}) \qquad \Big| : T \\ \Rightarrow -\rho u_\mathrm{B}^2 H + \rho(u_\mathrm{W} + u_\mathrm{B})^2 h &= \frac{\rho}{2} g\left(H^2 - h^2\right) + H(p_\infty - p_\mathrm{a}) \qquad \Big| \text{aus a) } p_\infty = p_\mathrm{a} - \frac{\rho}{2}u_\mathrm{B}^2 \\ \Rightarrow -\rho u_\mathrm{B}^2 H + \rho(u_\mathrm{W} + u_\mathrm{B})^2 h &= \frac{\rho}{2} g\left(H^2 - h^2\right) - \frac{\rho}{2}u_\mathrm{B}^2 H \qquad \Big| : \rho \\ \Rightarrow -u_\mathrm{B}^2 H + (u_\mathrm{W} + u_\mathrm{B})^2 h &= \frac{1}{2} g\left(H^2 - h^2\right) - \frac{1}{2}u_\mathrm{B}^2 H \\ \Rightarrow -\frac{1}{2}u_\mathrm{B}^2 H + (u_\mathrm{W} + u_\mathrm{B})^2 h &= \frac{1}{2} g(H^2 - h^2) \end{aligned}$$

Um $(u_\mathrm{W} + u_\mathrm{B})^2$ zu bestimmen, wird Bernoulli von 1 nach B verwendet:

$$\begin{aligned} p_\mathrm{a} + \rho g H &= p_\mathrm{a} + \rho g h + \frac{\rho}{2}(u_\mathrm{W} + u_\mathrm{B})^2 \\ \Rightarrow (u_\mathrm{W} + u_\mathrm{B})^2 &= 2g(H-h) \end{aligned}$$

Und u_B wird mit Konti ausgedrückt:

$$\begin{aligned} u_\mathrm{B} TH &= (u_\mathrm{W} + u_\mathrm{B})Th \\ \Rightarrow u_\mathrm{B} &= (u_\mathrm{W} + u_\mathrm{B})\frac{h}{H} \end{aligned}$$

Eingesetzt:

$$\begin{aligned} \Rightarrow -\frac{1}{2}2g(H-h)\left(\frac{h}{H}\right)^2 H + 2g(H-h)h &= \frac{1}{2}g(H+h)(H-h) \qquad \Big| : g(H-h) \\ \Rightarrow -\frac{h^2}{H} + 2h &= \frac{1}{2}H + \frac{1}{2}h \\ \Rightarrow h^2 - \frac{3}{2}Hh + \frac{1}{2}H^2 &= 0 \end{aligned}$$

Mit der p-q-Formel ist die Lösung:

$$\Rightarrow h_{1,2} = \frac{\frac{3}{2}H}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\frac{3}{2}H}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}H^2}$$
$$\Rightarrow h_{1,2} = \frac{3}{4}H \pm \sqrt{\frac{9}{16}H^2 - \frac{8}{16}H^2}$$
$$\Rightarrow h_{1,2} = \frac{3}{4}H \pm \frac{1}{4}H$$
$$\Rightarrow h_1 = H \quad \text{und} \quad h_2 = \frac{1}{2}H$$

Da h kleiner als H sein muss, ist die Lösung:

$$\Rightarrow h = \frac{1}{2}H$$