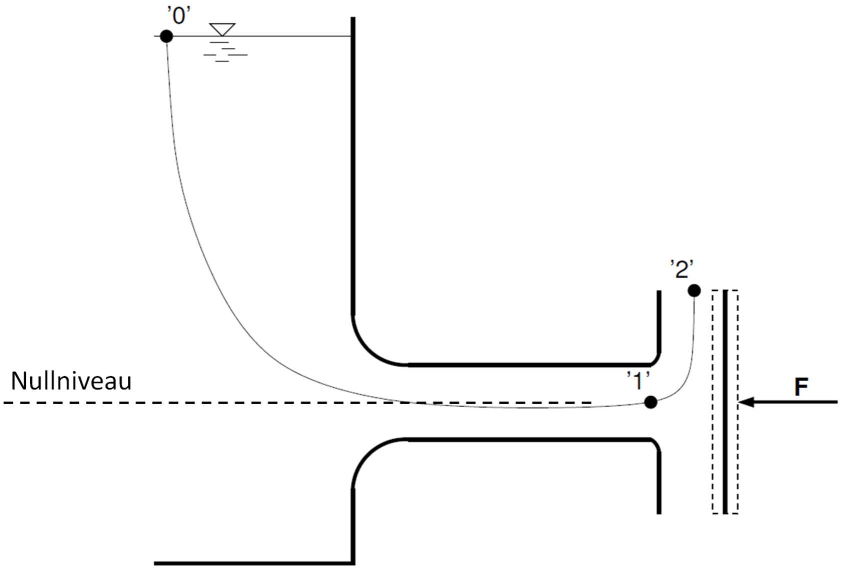
Impuls

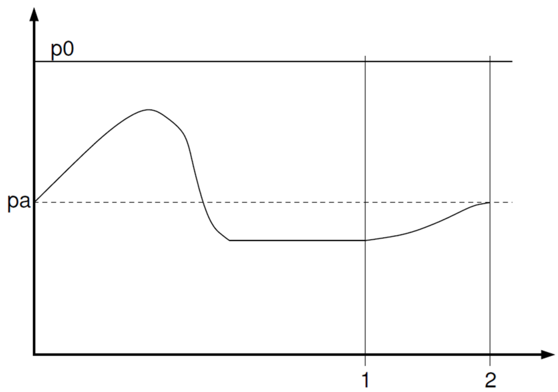
2. Aufgabe

1. Aufgabentext gut durchlesen!

- „Aus einem großen Reservoir... “ $\rightarrow$ Fluidgeschwindigkeit an der Behälteroberfläche und im Behälter ist vernachlässigbar klein. Der kinetische Druck bis zur Eintrittsöffnung des Rohres wird nicht berücksichtigt.
- „...strömt Wasser verlustfrei durch eine Rohrleitung... “ $\rightarrow$ keine Reibung zwischen Fluid und Rohr $\left(p_{Verlust,Rohr} = \frac{\rho}{2}v^2\lambda\frac{L}{D} = 0\right)$
- „...gut gerundete Austrittsöffnung... “ $\rightarrow$ keine Strömungsablösung am Austritt $\left(p_{Verlust,Austritt} = \frac{\rho}{2}v^2\zeta = 0\right)$
- sofern in der AS nichts weiteres genannt wird (auch die Hinweise beachten!), wird an den restlichen Stellen/ Bereichen von einem verlustfreien Fluid ausgegangen
- daraus erschließt sich, dass das gesamte System verlustfrei ist $\rightarrow p_0 = konstant$



Druckverlauf (mehrere Möglichkeiten):



Erläuterung des statischen Druckverlaufs:

- allgemein gilt: die Bernoullikonstante gilt nur entlang einer Stromlinie: $(\boldsymbol{p_0} = \boldsymbol{p_{statisch}} + p_{kinetisch} + p_{geodtisch} = konstant)$
- das Nullniveau für den geodätischen Druck kann an einer beliebigen Stelle festgelegt werden (hier: auf der Höhe des Rohres)
- auf der Oberfläche des Resevoirs herrscht nur der Außendruck und der geodätische Druck $(p_0 = p_a \rho g H = konstant)$
- die Bewegung des Fluidteilchens in Richtung der Eintrittsöffnung verursacht eine Verringerung des geodätischen Drucks, sodass der statische Druck linear ansteigt
- **kurz vor Rohreintritt** wird das Fluidteilchen in das Rohr eingesogen, sodass an dieser Stelle die Geschwindigkeit bzw. der kinetische Druck nicht mehr vernachlässigt werden darf $(\frac{\rho}{2}v^2 > 0; \rho g H \approx 0) \rightarrow p_{statisch}$ sinkt quadratisch (hierbei ist nicht die Tiefe der graphischen Absenkung entscheidend, sondern dass überhaupt eine Absenkung des statischen Druckes erkennbar ist)
- entlang des Rohres ändert sich sowohl die Höhe als auch die Geschwindigkeit nicht (Konti!) $(p_{statisch} = konstant)$
- von „1“ nach „2“ ist die Zunahme des geodätische Drucks vernachlässigbar (s. Hinweis: $D << H$), der kinetische Druck nimmt ab (hierbei ist zu erwähnen, dass keine Information bezüglich des Abstandes zwischen Rohr und Platte vorhanden ist) und somit der statische Druck zu. Da das Fluid erneut in die Atmosphäre gelangt, beträgt der statische Druck p_a!

2. Ansatz $p \cdot A = -F$ (Impuls um die Platte)
Das Problem ist, dass der Druck p vom Radius r abhängig und somit nicht über die gesamte Platte konstant ist. Für die Lösung muss der Druck p über die Kreisfläche integriert werden:

$$\int\int (pr) dr d\varphi = \int (2\pi p r) dr = -F$$

Der Druckverlauf wird auf den Innen- und Außenanteil der Platte aufgeteilt:

$$\begin{aligned} p_{innen}(r): &\quad 0 \leq r \leq \frac{d}{2} \\ p_{außen}(r): &\quad \frac{d}{2} \leq r \leq \frac{D}{2} \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung des Außendruckes lautet der endgültige Ansatz:

$$\int_0^{\frac{d}{2}} (p_{innen}(r) - p_a) 2\pi r dr + \int_{\frac{d}{2}}^{\frac{D}{2}} (p_{außen}(r) - p_a) 2\pi r dr = -F$$

Um den Druck auf den Außenanteil zu bestimmen wird Bernoulli angewendet (Höhenunterschied ist vernachlässigbar klein):

$$p_{außen}(r) + \frac{\rho}{2} v^2(r) = p_a + \frac{\rho}{2} v_D^2 = p_0$$

$$p_{außen}(r) = p_a + \frac{\rho}{2} v_D^2 - \frac{\rho}{2} v^2(r) \text{ für } \frac{d}{2} \leq r \leq \frac{D}{2}$$

Die Geschwindigkeiten können mittels einer Konti-Gleichung und einem Bernoulli von der Reservoiroberfläche bis zu 2 bestimmt werden:

$$v(r)2\pi rB = v_D 2\pi \frac{D}{2}B \qquad \rightarrow \qquad v(r) = v_D \frac{D}{2r}$$

$$p_a + \rho gH = p_a + \frac{\rho}{2}v_D^2 + \rho g\frac{D}{2} \qquad \rightarrow \qquad v_D = \sqrt{2gH}(D << H)$$

Alles eingesetzt ergibt:

$$2\pi\rho gH\left(\int_0^{\frac{d}{2}}\left(r - 2r^2\frac{D^2}{d^3}\right)dr + \int_{\frac{d}{2}}^{\frac{D}{2}}\left(r - \frac{D^2}{4r}\right)dr\right) = -F$$

$$F = \frac{\pi D^2}{2}\rho gH\left(ln\left(\frac{D}{d}\right) - \frac{1}{6}\right)$$