Tutorenprogramm - Strömungsmechanik I

Hydrostatik - Musterlösung

1. Aufgabe

1. Die Auftriebskraft eines Körpers entspricht dem Gewicht des von ihm verdrängten Fluids. $F_A = \varrho_f g V_k$, wobei F_A die Auftriebskraft, ϱ_f die Dichte des den Körper umgebenden Fluids, g die Erdbeschleunigung, und V_k das Volumen des Körpers bezeichnen.
2. Annahme konstanter Dichte.
3. Druckintegral: $\vec{F} = \int\limits_{A_K} p(z)\vec{n}_A dA$ oder $F_A = -\int\limits_{A_K} p(z) n_{z,A} dA$

   Anteile der Flächen normal zur $x-$ und $y-$Richtung heben sich gegenseitig auf. Es verbleibt

   $F_A = -F_z = bt\ p(z_0 + h/2) - bt\ p(z_0 - h/2))$

   Allgemein: $p(z) = p_a + \int\limits_0^z \varrho(\tilde{z}) g d\tilde{z}$.

   Damit: $F_A = bt\ g\left(\varrho_0 h + \frac{k}{2}\left((z_0 + \frac{h}{2})^2 - (z_0 - \frac{h}{2})^2\right)\right)$.

   $F_A = bth\ g(\varrho_0 + z_0 k)$.

4. Mit Teil 3.:

   $\overline{\varrho} g V_k = V_k\ g(\varrho_0 + z_0 k)$

   $\rightarrow \overline{\varrho} = \varrho_0 + z_0 k$

Quelle: Herbst 2008

2. Aufgabe

a) Kräftegleichgewicht: Auftrieb = Gewichtskraft

$$mg = \rho_W g V_U + \rho_W g V_0$$

$$V_0 = \frac{m - V_U \rho_W}{\rho_W}$$

b)

$$p(H) = p_a + \rho_W g H$$

$$p_a V_0 = mRT = p(H) V_1$$

$$V_1 = p_a V_0 / p(H) = \frac{p_a(m - V_U \rho_W)}{\rho_W(p_a + \rho_W g H)}$$

c)Bedingung fÃijr positiven Auftrieb: $V_{1,neu} \geq V_0$:

$$\Delta V = V_0 - V_1 = V_0 \left(1 - \frac{p_a}{p_a + \rho_W g H}\right) = V_0 \frac{\rho_w g H}{p_a + \rho_w g H}$$

$$\Delta m = \Delta V \rho_L(z = H)$$

Ideales Gasgesetz: $p = \rho R T$

$$\frac{p_a}{\rho_L(z=0)} = \frac{(p_a + \rho_W g H)}{\rho_L(z = H)}$$

$$\rho_L(z = H) = \rho_L(z = 0) \frac{p_a + \rho_W g H}{p_a}$$

$$\Delta m = V_0 \frac{\rho_w g H}{p_a + \rho_w g H} \rho_L(z = 0) \frac{p_a + \rho_W g H}{p_a}$$

$$\Delta m = (m - V_U \rho_W) \frac{\rho_L(z = 0) g H}{p_a}$$

Quelle: Frühjahr 2

3. Aufgabe

1. A = Auftriebskraft; G = Schwerkraft; S = Seilkraft
   Kräftegleichgewicht: $A = G + S$

$$\rho_W V_0 g = mg + S \Leftrightarrow \vec{S} = \frac{1}{3}\pi R_0^2 h_0 g \rho_W - mg$$

2. Masse der Luft bleibt konstant: $m_L R T_L = const$

$$\Rightarrow p_a V_0 = P_W V_H = (p_a + \rho_W g H) V_H \quad \text{(mit } h_0 << H\text{)}$$

$$\Rightarrow V_H = \frac{p_a}{p_a + \rho_W g H} V_0 \quad \text{mit } A = \rho_W g V_H$$

$$S = A - G = \left[\frac{p_a}{p_a + \rho_W g H}\rho_W V_0 - m\right] g = \left[\frac{p_a}{p_a + \rho_W g H}\frac{1}{3}\pi R_0^2 h_0 \rho_W - m\right] g$$

3. V_L ist der Kegel in der Luft mit h_1 und R_1
   V_0 ist der Gesamtkegel mit h_0 und R_0

$$A = G \Rightarrow \rho_W V_W g = mg$$

Es ist

$$V_W = V_0 - V_L = \frac{1}{3}\pi\left[R_0^2 h_0 - R_1^2 h_1\right] \quad (*)$$

Strahlensatz:

$$\frac{h_1}{R_1} = \frac{h_0}{R_0}$$

Damit folgt:

$$V_W = \frac{1}{3}\pi R_0^2 h_0 \left[1 - \left(\frac{h_1}{h_0}\right)^3\right]$$

$(*)$ einsetzen:

$$\frac{1}{3}\pi R_0^2 h_0 \left[1 - \left(\frac{h_1}{h_0}\right)^3\right] = \frac{m}{\rho_W} \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{h_1}{h_0}\right)^3 = \frac{3}{\pi R_0^2 h_0}\frac{m}{\rho_W}$$

$$\Leftrightarrow h_1 = \sqrt[3]{h_0^3 - \frac{3h_0^2}{\pi R_0^2}\frac{m}{\rho_W}}$$

Quelle: Frühjahr 2017

4. Aufgabe

1. Kräftegleichgewicht am Würfel:

$$F = F_A - F_G$$

$$F = p_a a^2 + \rho_1 g\left(t+a\right)a^2 - \rho_1 g t\left(a^2 - \pi\frac{d^2}{4}\right) - \rho_K g a^3 - p_a a^2$$

$$F = \rho_1 g a^3 + \rho_1 g t \pi\frac{d^2}{4} - \rho_K g a^3 \quad \left[\frac{kg\cdot m}{s^2}\right] = [N]$$

2. Kräftegleichgewicht: $\sum F = 0 \Rightarrow F_G = F_A$

$$\rho_K g a^3 = \rho_1 g\left(t+a\right)a^2 - \rho_1 g t\left(a^2 - \pi\frac{d^2}{4}\right) - \rho_2 g h \pi\frac{d^2}{4}$$

$$\Rightarrow \rho_K a^3 = \rho_1 a^3 + \rho_1 t \pi\frac{d^2}{4} - \rho_2 h \pi\frac{d^2}{4}$$

$$V = \frac{\pi d^2}{4}h$$

$$\Rightarrow V = \frac{a^3(\rho_1 - \rho_K) + \rho_1 t \pi\frac{d^2}{4}}{\rho_2} \quad [m^3]$$

3. Aus b) mit $\rho_1 = \rho_2$: Volumen von Flüssigkeit 1 für schwebenden Körper:

$V^* = a^3\frac{\rho_1 - \rho_K}{\rho_1} + t^*\pi\frac{d^2}{4}$

Volumenbilanz: $\Delta V = 2V - V^*$

Wasserpegel im Glas: $t^* = t + \frac{\Delta V}{\pi(\frac{D^2}{4} - \frac{d^2}{4})}$

Massenbilanz in Wasserpegelgleichung: $t^* = t + \frac{8V - 4V^*}{\pi(D^2 - d^2)}$

t^* in Lösung aus b) einsetzen und nach V^* auflösen:

$$\Rightarrow V^* = \frac{a^3 + t\pi\frac{d^2}{4} + \frac{2Vd^2}{D^2 - d^2} - \frac{\rho_k a^3}{\rho_1}}{1 + \frac{d^2}{D^2 - d^2}}$$

$$\Delta V = 2V - \frac{a^3 + t\pi\frac{d^2}{4} + \frac{2Vd^2}{D^2 - d^2} - \frac{\rho_k a^3}{\rho_1}}{1 + \frac{d^2}{D^2 - d^2}} \quad [m^3]$$

Quelle: Herbst 2013