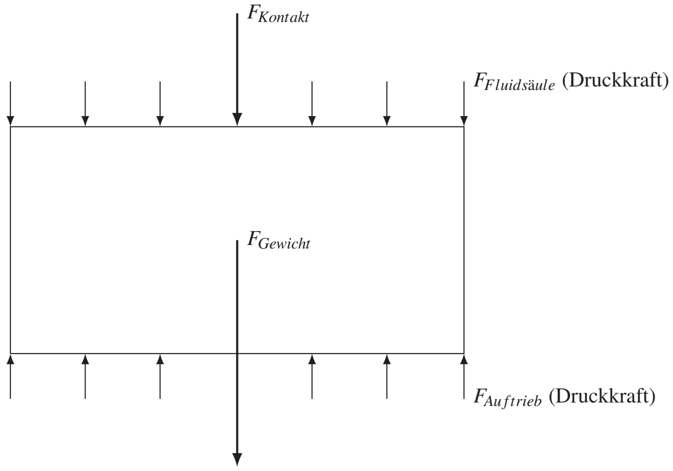
Hydrostatik

4. Aufgabe

1. Zunächst muss ein würfelförmiger Körper freigeschnitten werden. Dabei ist Archimedes nicht auf diesen Körper anwendbar, da dieser durch den Kontakt mit dem Rohr nicht vollständig vom Fluid benetzt ist.



Kräftegleichgewicht:

$$F_{Auftrieb} = F_{Gewicht} + F_{Kontakt} + F_{Fluidsäule}$$

$$p_a a^2 + \rho_1 g(t+a)a^2 = \rho_K g a^3 + F_{Kontakt} + p_a \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 + p_a\left(a^2 - \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2\right) + \rho_1 g\left(ta^2 - \pi t\left(\frac{d}{2}\right)^2\right)$$

$$F_{Kontakt} = \rho_1 g\left(a^3 + \pi t\left(\frac{d}{2}\right)^2\right) - \rho_K g a^3$$

2. ρ_2 im Rohr bewirkt einen Schwebezustand des Körpers wodurch die Kontaktkraft entfällt. Da $\rho_{Fluid} \neq const.$ gilt, ist Archimedes weiterhin nicht anwendbar.
Kräftegleichgewicht:

$$F_{Auftrieb} = F_{Gewicht} + F_{Fluidsäule}$$

$$p_a a^2 + \rho_1 g(t+a)a^2 = \rho_K g a^3 + p_a \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 + p_a\left(a^2 - \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2\right) + \rho_1 g\left(ta^2 - \pi t\left(\frac{d}{2}\right)^2\right) + \rho_2 g V$$

$$\rho_1 g(t+a)a^2 = \rho_K g a^3 + \rho_1 g\left(ta^2 - \pi t\left(\frac{d}{2}\right)^2\right) + \rho_2 g V$$

$$V = \frac{1}{\rho_2}\left(a^3(\rho_1 - \rho_K) + \rho_1 \pi t\left(\frac{d}{2}\right)^2\right)$$

3. Es gilt $\rho_2 = \rho_1$. Weiterhin ist das Volumen V aus **2.** gegeben.

Volumen vor Flüssigkeitseintritt:

$$V_{vor} = \left(\pi t \left(\frac{D}{2}\right)^2 - \pi t \left(\frac{d}{2}\right)^2\right) + \left(\pi a \left(\frac{D}{2}\right)^2 - a^3\right) + \pi h \left(\frac{D}{2}\right)^2$$

h ist die Höhe zwischen Körperunterseite und Glasboden. Für das Volumen nach Flüssigkeitseintritt gilt:

$$V_{nach} = \left(\pi t_{nach} \left(\frac{D}{2}\right)^2 - \pi t_{nach} \left(\frac{d}{2}\right)^2\right) + \left(\pi a \left(\frac{D}{2}\right)^2 - a^3\right) + \pi h \left(\frac{D}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \Delta V = V_{nach} - V_{vor} = \frac{\pi}{4}\left(D^2 - d^2\right)\left(t_{nach} - t\right)$$

Um t_{nach} zu bestimmen muss das Volumen im Rohr, bei welchem der Körper im Glas den Schwebezustand erreicht und keine weitere Flüssigkeit mehr austritt, berechnet werden.

$$F_{Auftrieb} = F_{Gewicht} + F_{Fluids\ddot{a}ule}$$

$$p_a a^2 + \rho_1 g(t_{nach} + a)a^2 = \rho_K g a^3 + p_a \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 + p_a \left(a^2 - \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2\right) + \rho_1 g t_{nach} \left(a^2 - \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2\right) + \rho_1 g V_{Rohr}$$

$$V_{Rohr} = -\frac{1}{\rho_1}\rho_K a^3 + a^3 + \pi \left(\frac{d}{s}\right)^2 t_{nach}$$

Mit V aus AS folgt:

$$2V - V_{Rohr} = \Delta V = \frac{\pi}{4}\left(D^2 - d^2\right)\left(t_{nach} - t\right)$$

V_{Rohr} einsetzen und nach t_{nach} umformen:

$$t_{nach} = \frac{4}{\pi D^2}\left(2V + \frac{1}{\rho_1}\rho_K a^3 - a^3 + \frac{\pi}{4}\left(D^2 - d^2\right) t\right)$$

Daraus folgt:

$$\Delta V = V_{nach} - V_{vor} = \frac{\pi}{4}\left(D^2 - d^2\right)\left(\frac{4}{\pi D^2}\left(2V + \frac{1}{\rho_1}\rho_K a^3 - a^3 + \frac{\pi}{4}\left(D^2 - d^2\right) t\right) - t\right)$$