# Tutorenprogramm - Strömungsmechanik I

# Gemischte Aufgaben - Musterlösung

1. Aufgabe

1. $G = F_A$

$$G = \varrho_W (V_B + V_{L_1}) \cdot g$$

$$G = \varrho_W \left( \frac{G}{g \cdot \varrho_B} + V_{L_1} \right) \cdot g$$

$$V_{L_1} = \frac{G}{g} \left( \frac{1}{\varrho_W} - \frac{1}{\varrho_B} \right)$$

$$\varrho_{L_1} = \frac{p_1}{R \cdot T_W} = \frac{p_a + \varrho_W g (H + h)}{R \cdot T_W}$$

$$m_{L_1} = \varrho_{L_1} \cdot V_{L_1}$$

$$m_{L_1} = \frac{G}{g} \left( \frac{1}{\varrho_W} - \frac{1}{\varrho_B} \right) \cdot \frac{p_a + \varrho_W g (H + h)}{R \cdot T_W}$$

2. $G = F_A \quad \wedge \quad V_{L_1} = V_{L_2} = V_L$

$$G = \varrho_W (V_B + V_L) \cdot g$$

$$G = \varrho_W \left( \frac{G}{g \cdot \varrho_B} + A \cdot h \right) \cdot g$$

$$h = \frac{G}{g \cdot A} \left( \frac{1}{\varrho_W} - \frac{1}{\varrho_B} \right)$$

$$\varrho_{L_2} = \frac{p_a + \varrho_W g h}{R \cdot T_W}$$

$$m_{L_2} = \varrho_{L_2} \cdot A \cdot h = \frac{p_a + \varrho_w g h}{R T_W} \frac{G}{g} \left( \frac{1}{\varrho_W} - \frac{1}{\varrho_B} \right)$$

$$\Delta m = m_{L_1} - m_{L_2} = G \left( \frac{1}{\varrho_B} - \frac{1}{\varrho_W} \right) \frac{\varrho_W H}{R T_W}$$

*Quelle: Frühjahr 2010*

2. Aufgabe

1. stationärer Bernoulli: '0'-'1'
   $$p_a + \varrho g H_0 = p_1 + \frac{\varrho}{2} v_1^2 \left(1 + \lambda \frac{L_1}{D_R}\right) + \varrho g \frac{H_0}{2}$$
   mit $p_1 = p_a + \varrho g h$
   $$\rightarrow \varrho g h = \frac{1}{2} \varrho g H_0 - \frac{\varrho}{2} v_1^2 \left(1 + \lambda \frac{L_1}{D_R}\right)$$
   mit Konti: $\dot{V} = \frac{\pi D_R^2}{4} v_1 \quad \rightarrow \quad v_1 = \frac{4\dot{V}}{\pi D_R^2}$
   $$h = \frac{1}{2} H_0 - \frac{8\dot{V}^2}{g\pi^2 D_R^4} \left(1 + \lambda \frac{L_1}{D_R}\right)$$

2. Bernoulli von 'o'-'T':
   $$p_a + \varrho g (H_0 + H_T) = p_T + \frac{\varrho}{2} v_T^2 \left(1 + \lambda \frac{L_1 + L_2}{D_R} \frac{v_1^2}{v_T^2} + \lambda \frac{2L_3}{D_R}\right) + \Delta p_T$$
   mit $p_T = p_a + \varrho g H_T$ und Konti $\dot{V} = \frac{\pi D_R^2}{16} v_T \quad \rightarrow \quad v_T = \frac{16\dot{V}}{\pi D_R^2}$
   $$\Delta p_T = \varrho g H_0 - 128 \varrho \frac{\dot{V}^2}{\pi^2 D_R^4} \left(1 + \frac{1}{16} \lambda \frac{L_1 + L_2}{D_R} + 2\lambda \frac{L_3}{D_R}\right)$$
   Die Leistung der Turbine berechnet sich zu
   $$P_T = \Delta p_T \dot{V} = \dot{V} \left[\varrho g H_0 - 128 \varrho \frac{\dot{V}^2}{\pi^2 D_R^4} \left(1 + \frac{1}{16} \lambda \frac{L_1 + L_2}{D_R} + 2\lambda \frac{L_3}{D_R}\right)\right]$$

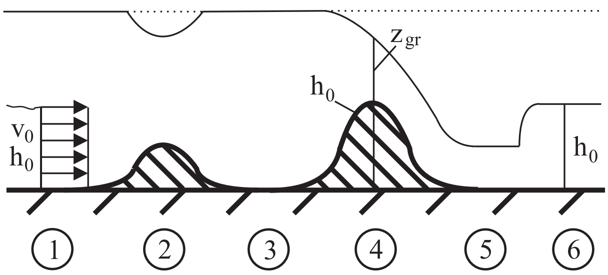
3. Die Leistung steigt, da bei größerem Austrittsquerschnitt und gleichem Volumenstrom eine geringere Geschwindigkeit und damit ein kleinerer Totaldruck hinter der Turbine herrscht. Somit steigt die Totaldruckdifferenz $\Delta p_T$ an der Turbine und die Leistung nimmt zu.

4. instationärer Bernoulli von 'o'-'a':
   $$p_a + \varrho g H_0 = p_1 + \frac{\varrho}{2} v_1(t)^2 + \varrho L_1 \frac{dv_1(t)}{dt} + \varrho g \frac{H_0}{2}$$
   mit $p_1 = p_a + \varrho g h(t)$
   $$\varrho g \frac{H_0}{2} = \varrho g h(t) + \frac{\varrho}{2} v_1(t)^2 + \varrho L_1 \frac{dv_1(t)}{dt}$$
   Kontinuität:
   $$\frac{dh}{dt} A_s = v_1 \frac{\pi D_R^2}{4} \quad \rightarrow \quad v_1 = \frac{dh}{dt} \frac{4A_s}{\pi D_R^2}$$
   $$\frac{H_0}{2} = h(t) + \frac{1}{2g} \left(\frac{4A_s}{\pi D_R^2}\right)^2 \left(\frac{dh}{dt}\right)^2 + \frac{L_1}{g} \frac{4A_s}{\pi D_R^2} \frac{d^2 h}{dt^2}$$
   $$\frac{d^2 h}{dt^2} + \frac{1}{2L_1} \frac{4A_s}{\pi D_R^2} \left(\frac{dh}{dt}\right)^2 + \frac{g}{L_1} \frac{\pi D_R^2}{4A_s} \left(h - \frac{H_0}{2}\right) = 0$$
   $$\frac{d^2 h}{dt^2} + a_1 \left(\frac{dh}{dt}\right)^2 + a_2 h - \frac{a_2}{2} H_0 = 0$$

*Quelle: Herbst 2007*

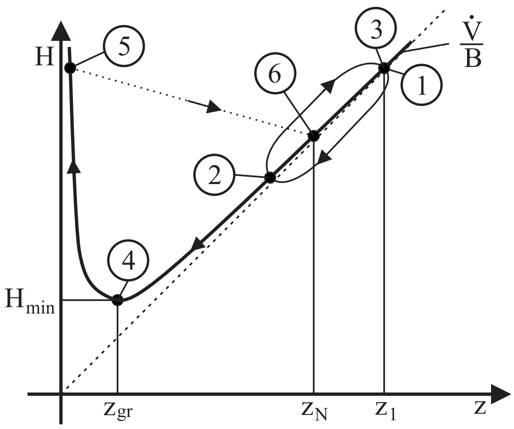
3. Aufgabe

1. Skizze




Aufstau bei konstantem

$$\frac{\dot{V}}{B} = v_0 h_0$$



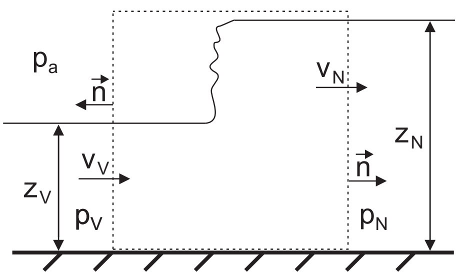

$$H_{ges} = H_{fluid} + y = konst$$

2. $H_V + y_V = H_4 + y_4$ mit $H_4 = H_{min}$ , $y_4 = h_0$ und $y_V = 0$

$$H_V = h_0 + z_{gr} + \frac{\dot{V}^2}{2g z_{gr}^2 B^2}$$

$$\Longrightarrow H_V = h_0 + \left(\frac{\dot{V}^2}{gB^2}\right)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{V}^2}{gB^2}\right)^{1-\frac{2}{3}} = h_0 + \frac{3}{2}\left(\frac{v_0^2 h_0^2}{g}\right)^{\frac{1}{3}}$$

3. Energieverlust




Konti: $v_N z_N = v_V z_V$

IES: Herleitung Skript S.126

$$\Longrightarrow \quad -\varrho v_V^2 z_V + \varrho v_N^2 z_N = \varrho g \left(\frac{z_V^2}{2} - \frac{z_N^2}{2}\right)$$

$$\Delta H = H_N - H_V = z_N - z_V + \frac{\dot{V}^2}{2gB^2}\left(\frac{1}{z_N^2} - \frac{1}{z_V^2}\right)$$

mit IES und Konti: $\dfrac{\dot{V}^2}{gB^2} = \dfrac{z_V z_N (z_V + z_N)}{2}$

$$\Longrightarrow \Delta H = z_N - z_V + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{z_N^2} - \frac{1}{z_V^2}\right) z_V z_N (z_V + z_N)$$

*Quelle: Frühjahr 2010*