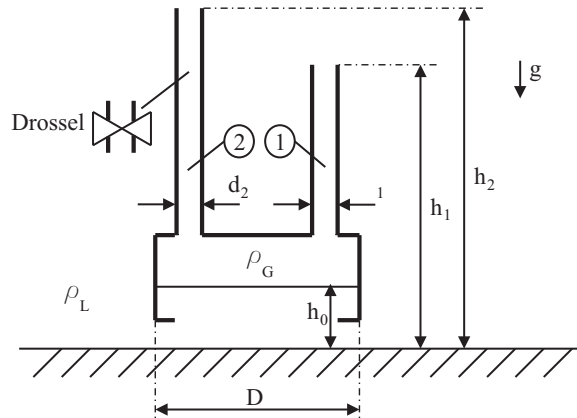


Tutorenprogramm - Strömungsmechanik I

Kontinuitäts- und Bernoulligleichung - Detaillierte Musterlösung

1. Aufgabe



a) $\frac{d_1}{d_2} = ?$

Da die Volumenströme in den beiden Schornsteinen gleich sind, gilt:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \dot{V}_2 \Leftrightarrow v_1 \frac{\pi}{4} d_1^2 = v_2 \frac{\pi}{4} d_2^2 \\ \Rightarrow \frac{d_1^2}{d_2^2} &= \frac{v_2}{v_1} \Rightarrow \frac{d_1}{d_2} = \sqrt{\frac{v_2}{v_1}} \end{aligned}$$

Die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 können mit Hilfe der Bernoulligleichung im Abgas bestimmt werden.

Bernoulli von 0 (Stoffgrenze auf Höhe h_0) bis 1 (Auslass auf Höhe h_1) im Ofen:

$$p_0 + \rho_G g h_0 + \frac{\rho_G}{2} v_0^2 = p_1 + \rho_G g h_1 + \frac{\rho_G}{2} v_1^2$$

Da es sich um einen großen Industrieofen handelt ($D \gg d_{1,2}$) ist der Term $\frac{\rho_G}{2} v_0^2$ vernachlässigbar. Daraus folgt:

$$\Rightarrow p_0 + \rho_G g h_0 = p_1 + \rho_G g h_1 + \frac{\rho_G}{2} v_1^2$$

Analog dazu: Bernoulli von 0 bis 2 im Ofen:

$$p_0 + \rho_G g h_0 = p_2 + \rho_G g h_2 + \frac{\rho_G}{2} v_2^2$$

Die Drücke werden mittels HGG außerhalb des Rohres berechnet. Hierbei ist zu beachten, dass der statische Druck mit der Höhe abnimmt.

$$p_0 = p_a - \rho_L g h_0$$

$$p_1 = p_a - \rho_L g h_1$$

$$p_2 = p_a - \rho_L g h_2$$

Eingesetzt in die Bernoulligleichungen folgt:

Für 0 bis 1:

$$\begin{aligned} -\rho_L g h_0 + \rho_G g h_0 &= -\rho_L g h_1 + \rho_G g h_1 + \frac{\rho_G}{2} v_1^2 \\ \Rightarrow v_1^2 &= 2 \frac{\rho_L}{\rho_G} g (h_1 - h_0) + 2g(h_0 - h_1) \end{aligned}$$

Für 0 bis 2:

$$\begin{aligned} -\rho_L g h_0 + \rho_G g h_0 &= -\rho_L g h_2 + \rho_G g h_2 + \frac{\rho_G}{2} v_2^2 \\ \Rightarrow v_2^2 &= 2 \frac{\rho_L}{\rho_G} g (h_2 - h_0) + 2g(h_0 - h_2) \end{aligned}$$

In die Kontinuitätsgleichung eingesetzt ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{d_1^4}{d_2^4} &= \frac{v_2^2}{v_1^2} = \frac{2 \frac{\rho_L}{\rho_G} g (h_2 - h_0) + 2g(h_0 - h_2)}{2 \frac{\rho_L}{\rho_G} g (h_1 - h_0) + 2g(h_0 - h_1)} \\ \Rightarrow \frac{d_1^4}{d_2^4} &= \frac{(h_2 - h_0) \left(2 \frac{\rho_L}{\rho_G} g - 2g \right)}{(h_1 - h_0) \left(2 \frac{\rho_L}{\rho_G} g - 2g \right)} \\ \Rightarrow \frac{d_1}{d_2} &= \sqrt[4]{\frac{h_2 - h_0}{h_1 - h_0}} \end{aligned}$$

b) $\zeta_{Dr} = ?$

Aus a): $\frac{d_1}{d_2} = \sqrt{\frac{v_2}{v_1}}$. Das heißt mit $d_1 = d_2 \Rightarrow v_1 = v_2$.

Die Geschwindigkeit v_1 bzw. v_2 kann analog zu a) durch Bernoulli bestimmt werden:

$$\Rightarrow v_1^2 = v_2^2 = 2 \frac{\rho_L}{\rho_G} g (h_1 - h_0) + 2g(h_0 - h_1) \quad (\star)$$

Neuer Bernoulli von 0 nach 2 mit Berücksichtigen der Drossel im Schornstein mit Drosselverlustbeiwert ζ_{Dr} :

$$p_0 + \rho_G g h_0 + \cancel{\frac{\rho_G}{2} v_0^2} = p_2 + (1 + \zeta_{Dr}) \frac{\rho_G}{2} v_2^2 + \rho_G g h_2$$

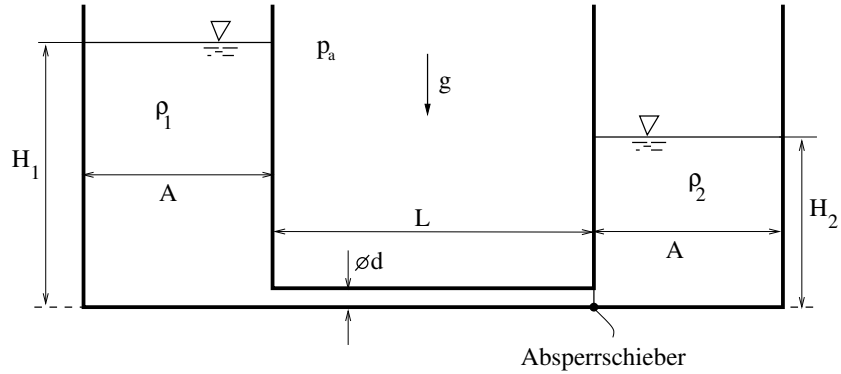
mit $p_0 = p_a - \rho_L g h_0$, $p_2 = p_a - \rho_L g h_2$ und v_2^2 aus $(\star)$:

$$p_a - \rho_L g h_0 + \rho_G g h_0 = p_a - \rho_L g h_2 + (1 + \zeta_{Dr}) \frac{\rho_G}{2} \left(2 \frac{\rho_L}{\rho_G} g (h_1 - h_0) + 2g(h_0 - h_1) \right) + \rho_G g h_2$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (\rho_L - \rho_G)g(h_2 - h_0) &= (1 + \zeta_{Dr})(\rho_L - \rho_G)g(h_1 - h_0) & | : (\rho_L - \rho_G)g(h_1 - h_0) \\ \Rightarrow 1 + \zeta_{Dr} &= \frac{h_2 - h_0}{h_1 - h_0} & | - 1 \\ \Rightarrow \zeta_{Dr} &= \frac{h_2 - h_0}{h_1 - h_0} - 1 & | 1 = \frac{h_1 - h_0}{h_1 - h_0} \\ \Rightarrow \zeta_{Dr} &= \frac{h_2 - h_1}{h_1 - h_0} \end{aligned}$$

Quelle: Herbst 2010

2. Aufgabe



a) $F_S = ?$

Die Kraft auf den Schieber F_S wird über die Druckdifferenz der Drücke, die von beiden Seiten wirken, und der Fläche der Schiebers bestimmt:

$$F_S = \Delta p_S A_S \quad \text{mit} \quad A_S = \pi \frac{d^2}{4}$$

wobei $\Delta p_S = p_{S,1} - p_{S,2}$.

$p_{S,1}$ und $p_{S,2}$ beschreiben die Drücke auf den Schieber von jeweils einer Seite und werden über den Bernoulli bestimmt:

$$p_a + \rho_1 g H_1 = p_{S,1}$$

$$p_a + \rho_2 g H_2 = p_{S,2}$$

Einsetzen:

$$\Rightarrow \Delta p_S = (p_a + \rho_1 g H_1) - (p_a + \rho_2 g H_2) = g(\rho_1 H_1 - \rho_2 H_2) \quad | \cdot A_S$$

$$\Rightarrow F_S = \Delta p_S \pi \frac{d^2}{4} = \pi \frac{d^2}{4} g(\rho_1 H_1 - \rho_2 H_2)$$

b) $h_1, h_2 = ?$

Da laut Aufgabenstellung $\rho_1 > \rho_2$ und $H_1 > H_2$ gilt, strömt beim Öffnen des Absperrschiebers die Flüssigkeit 1 vom linken in den rechten Behälter, bis ein Gleichgewichtszustand erreicht ist.

Das heißt der Bernoulli von der einen Flüssigkeitsoberfläche und zu der Grenze zwischen beide Flüssigkeiten beim Gleichgewichtszustand lautet:

$$p_a + \rho_1 g h_1 = p_a + \rho_1 g h_{1 \rightarrow 2} + \rho_2 g H_2$$

wobei h_b die Höhe der Wassersäule von Flüssigkeit 1 beschreibt, die in den zweiten Behälter eingedrungen ist.

Durch Vereinfachung erhält man eine Gleichung für h_1 :

$$\rho_1 h_1 = \rho_1 h_{1 \rightarrow 2} + \rho_2 H_2$$

| : ρ

$$\Rightarrow h_1 = h_{1 \rightarrow 2} + \frac{\rho_2}{\rho_1} H_2 \quad (\star)$$

Eine Gleichung für h_2 ergibt sich offensichtlich aus der Summe der beiden Höhen im zweiten Behälter:

$$\Rightarrow h_2 = h_{1 \rightarrow 2} + H_2 \quad (\star\star)$$

$h_{1 \rightarrow 2}$ ist die Differenz der Höhe der linken Flüssigkeitsäule vor und nach dem Öffnen des Absperrschiebers:

$$h_{1 \rightarrow 2} = H_1 - h_1$$

Die Gleichung in $(\star)$ eingesetzt, ergibt:

$$\begin{aligned} h_1 &= H_1 - h_1 + \frac{\rho_2}{\rho_1} H_2 & | & + h_1 \\ \Rightarrow 2h_1 &= H_1 + \frac{\rho_2}{\rho_1} H_2 & | & : 2 \\ \Rightarrow h_1 &= \frac{1}{2} \left(H_1 + \frac{\rho_2}{\rho_1} H_2 \right) \end{aligned}$$

Das heißt:

$$\Rightarrow h_{1 \rightarrow 2} = H_1 - \frac{1}{2} \left(H_1 + \frac{\rho_2}{\rho_1} H_2 \right) = \frac{1}{2} \left(H_1 - \frac{\rho_2}{\rho_1} H_2 \right)$$

Die Gleichung in $(\star\star)$ eingesetzt, ergibt:

$$\begin{aligned} h_2 &= \frac{1}{2} \left(H_1 - \frac{\rho_2}{\rho_1} H_2 \right) + H_2 \\ \Rightarrow h_2 &= \frac{1}{2} H_1 + \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) H_2 \end{aligned}$$

c) Instationärer Bernoulli von 1 nach 3:

$$p_a + \frac{\rho_1}{2} v_1^2 + \rho_1 g h_1 = p_3 + \frac{\rho_1}{2} v_3^2 + \rho_1 g h_{1 \rightarrow 2} + \rho_1 \int_1^3 \frac{\partial v}{\partial t} ds$$

Aufgrund des Hinweises, dass die lokale Beschleunigung nur im Rohr relevant ist und dass $d \ll L$ gilt, vereinfacht sich der instationäre Term zu:

$$\int_1^3 \frac{\partial v}{\partial t} ds = L \frac{dv_2}{dt}$$

Damit ergibt sich:

$$p_a + \frac{\rho_1}{2} v_1^2 + \rho_1 g h_1 = p_3 + \frac{\rho_1}{2} v_3^2 + \rho_1 g h_{1 \rightarrow 2} + \rho_1 L \frac{dv_2}{dt}$$

Der statische Druck p_3 kann mittels HGG bestimmt werden:

$$p_3 = p_a + \rho_2 g H_2$$

Aus Konti folgt, dass der Volumenstrom in beiden Behältern gleich ist:

$$\begin{aligned} A v_1 &= A v_3 \\ \Rightarrow v_1 &= v_3 \end{aligned}$$

Zwischen den Behältern und der Verbindung zwischen den Behältern gilt außerdem:

$$Av_1 = \pi \left(\frac{d}{2} \right)^2 v_2$$

$$\Rightarrow v_2 = v_1 \frac{4A}{\pi d^2}$$

Diese Beziehungen in der Bernoulligleichung einsetzen:

$$p_A + \cancel{\frac{\rho_1}{2} v_1^2} + \rho_1 g h_1 = p_A + \rho_2 g H_2 + \cancel{\frac{\rho_1}{2} v_1^2} + \rho_1 g h_{1 \rightarrow 2} + \rho_1 L \frac{4A}{\pi d^2} \frac{dv_1}{dt}$$

$$\Rightarrow \rho_1 g h_1 - \rho_2 g H_2 - \rho_1 g h_{1 \rightarrow 2} - \rho_1 L \frac{4A}{\pi d^2} \frac{dv_1}{dt} = 0 \quad | \quad h_{1 \rightarrow 2} = H_1 - h_1$$

$$\Rightarrow 2\rho_1 g h_1 - \rho_2 g H_2 - \rho_1 g H_1 - \rho_1 L \frac{4A}{\pi d^2} \frac{dv_1}{dt} = 0$$

Zuletzt wird die Geschwindigkeit v_1 definiert als die zeitliche Ableitung des Weges (in diesem Fall der Höhe h_1) mit dem Minus, da h_1 abnimmt, während v_1 zunehmen muss:

$$v_1 = -\frac{dh_1}{dt}$$

Eingesetzt ergibt das eine DGL in der Form $a \cdot \ddot{h}_1 + b \cdot \dot{h}_1 + c = 0$:

$$\Rightarrow \underbrace{\rho_1 L \frac{4A}{\pi d^2}}_a \frac{d^2 h_1}{dt^2} + \underbrace{2\rho_1 g h_1}_b - \underbrace{(\rho_2 g H_2 + \rho_1 g H_1)}_{c < 0} = 0$$

d) $\rho_1 = \rho_2$:

$$L \frac{4A}{\pi d^2} \frac{d^2 h_1}{dt^2} + 2g h_1 - (g H_2 + g H_1) = 0$$

Die DGL ist mittels des Hinweises $\left(h_1(t) = \frac{-c}{b} + C_1 \sin \left(\sqrt{\frac{b}{a}} t \right) + C_2 \cos \left(\sqrt{\frac{b}{a}} t \right) \right)$ lösbar, wobei:

$$\frac{-c}{b} = \frac{H_1 + H_2}{2} \quad \text{und} \quad \frac{b}{a} = \frac{g\pi d^2}{2AL}$$

C_1 und C_2 sind über Randbedingungen zu bestimmen:

1. Randbedingung: Bei $t = 0$ ist $h_1 = H_1$

$$\Rightarrow H_1 = \frac{H_1 + H_2}{2} + C_1 \underbrace{\sin \left(\sqrt{\frac{g\pi d^2}{2AL}} \cdot 0 \right)}_{=0} + C_2 \underbrace{\cos \left(\sqrt{\frac{g\pi d^2}{2AL}} \cdot 0 \right)}_{=1}$$

$$\Rightarrow C_2 = H_1 - \frac{H_1 + H_2}{2}$$

2. Randbedingung: Bei $t = 0$ ist $v_1 = -\frac{dh_1}{dt} = 0$

Dafür musst die Lösung der DGL einmal abgeleitet werden:

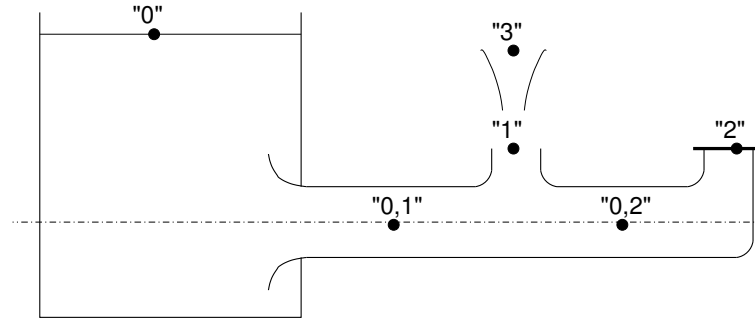
$$\begin{aligned}\Rightarrow \frac{dh_1}{dt} &= C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{g\pi d^2}{2AL}}t\right) - C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{g\pi d^2}{2AL}}t\right) \quad \Big| \frac{dh_1}{dt}(t=0) = 0 \\ \Rightarrow 0 &= C_1 \underbrace{\cos\left(\sqrt{\frac{g\pi d^2}{2AL}} \cdot 0\right)}_{=1} - C_2 \underbrace{\sin\left(\sqrt{\frac{g\pi d^2}{2AL}} \cdot 0\right)}_{=0} \\ \Rightarrow C_1 &= 0\end{aligned}$$

Mit dem Einsetzen von C_1 und C_2 :

$$h_1(t) = \frac{H_1 + H_2}{2} + \left(H_1 - \frac{H_1 + H_2}{2}\right) \cos\left(\sqrt{\frac{g\pi d^2}{2AL}}t\right)$$

Quelle: Frühjahr 2011

3. Aufgabe



a) $h_1 = ?$

Bernoulli von 0 bis 3 soll erstellt werden. Dabei ist zu beachten, dass die Zulaufleitung mit einem Rohrreibungsbeiwert λ verlustbehaftet ist:

$$p_a + \rho g H + \frac{\rho}{2} v_0^2 = p_a + \rho g (H_1 + h_1) + \frac{\rho}{2} v_3^2 + \frac{\rho}{2} v_{0,1}^2 \lambda \frac{L_1}{D}$$

Aufgrund des großen Behälters bei 0 ist $v_0 = 0$. Darauf ist $v_3 = 0$, da sich der Fluid an der Stelle seine maximale Höhe erreicht $\Rightarrow \frac{dh_1}{dt} = v_3 = 0$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow p_a + \rho g H &= p_a + \rho g (H_1 + h_1) + \frac{\rho}{2} v_{0,1}^2 \lambda \frac{L_1}{D} & | : \rho g \\ \Rightarrow h_1 &= H - H_1 - \frac{\lambda L_1}{2gD} v_{0,1}^2 & (*) \end{aligned}$$

$v_{0,1}$ kann über Bernoulli von 0 bis 1 bestimmt werden:

$$p_a + \rho g H = p_a + \rho g H_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 + \frac{\rho}{2} v_{0,1}^2 \lambda \frac{L_1}{D}$$

Mit Konti kann man v_1 und $v_{0,1}$ in Verhältnis bringen:

$$\begin{aligned} A_1 v_1 &= A_{0,1} v_{0,1} \\ \Rightarrow v_1 &= \frac{A_{0,1}}{A_1} & | A_1 = \frac{\pi}{4} D^2, A_{0,1} = \frac{\pi}{4} \left(\frac{D}{2} \right)^2 \\ \Rightarrow v_1 &= v_{0,1} \frac{\frac{\pi}{4} D^2}{\frac{\pi}{4} \left(\frac{D}{2} \right)^2} = 4 v_{0,1} \end{aligned}$$

Das im Bernoulli von 0 bis 1 eingesetzt:

$$\begin{aligned} p_a + \rho g H &= p_a + \rho g H_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 + \frac{\rho}{2} (4 v_{0,1})^2 \lambda \frac{L_1}{D} \\ \Rightarrow \rho g H &= \rho g H_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 \left(16 + \lambda \frac{L_1}{D} \right) \\ \Rightarrow v_{0,1}^2 &= \frac{2g(H - H_1)}{16 + \lambda \frac{L_1}{D}} \end{aligned}$$

Jetzt kann man den Ausdruck in (*) einsetzen:

$$h_1 = H - H_1 - \frac{\lambda L_1}{2gD} \frac{2g(H - H_1)}{16 + \lambda \frac{L_1}{D}}$$

$$\Rightarrow h_1 = (H - H_1) \left(1 - \frac{\lambda L_1}{16D + \lambda L_1} \right) = \frac{H - H_1}{1 + \frac{\lambda L_1}{16D}}$$

b) $v_{1,b} = ?$

Analog zu a) stellt man hier ein Bernoulli von 0 bis 1. Allerdings wird v_1 mit $v_{1,b}$ ersetzt:

$$\begin{aligned} p_A + \rho g H &= p_A + \rho g H_1 + \frac{\rho}{2} v_{1,b}^2 + \frac{\rho}{2} v_{0,1}^2 \lambda \frac{L_1}{D} \\ \Rightarrow \rho g H &= \rho g H_1 + \frac{\rho}{2} v_{1,b}^2 + \frac{\rho}{2} v_{0,1}^2 \lambda \frac{L_1}{D} \end{aligned} \quad (*)$$

An der Stelle stellt man eine zweite Bernoulligleichung von 0 bis 2:

$$\begin{aligned} p_A + \rho g H &= p_A + \rho g H_1 + \frac{\rho}{2} v_2^2 + \frac{\rho}{2} v_{0,1}^2 \lambda \frac{L_1}{D} + \frac{\rho}{2} v_{0,2}^2 \lambda \frac{L_2}{D} & | \text{Konti: } v_{0,2} = \frac{v_2}{4} \\ \Rightarrow \rho g H &= \rho g H_1 + \frac{\rho}{2} v_2^2 + \frac{\rho}{2} v_{0,1}^2 \lambda \frac{L_1}{D} + \frac{\rho}{2} \left(\frac{v_2}{4} \right)^2 \lambda \frac{L_2}{D} \\ \Rightarrow \rho g H &= \rho g H_1 + \frac{\rho}{2} v_2^2 \left(1 + \frac{\lambda L_2}{16D} \right) + \frac{\rho}{2} v_{0,1}^2 \lambda \frac{L_1}{D} \end{aligned} \quad (**)$$

(*) - (**) ergibt:

$$\begin{aligned} v_{1,b}^2 - v_2^2 \left(1 + \frac{\lambda L_2}{16D} \right) &= 0 \\ \Rightarrow v_2 &= v_{1,b} \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{\lambda L_2}{16D}}} \end{aligned}$$

Da die Strömung in der Zulaufsleitung sich in zwei Auslässe aufteilt, unterscheidet sich hier Konti von a):

$$\begin{aligned} A_{0,1} v_{0,1} &= A_{1,b} v_{1,b} + A_2 v_2 & | \ A_{1,b} = \frac{\pi}{4} D^2, \ A_{0,1} = A_2 = \frac{\pi}{4} \left(\frac{D}{2} \right)^2 \\ v_{0,1} \frac{\pi}{4} D^2 &= v_{1,b} \frac{\pi}{4} \left(\frac{D}{2} \right)^2 + v_2 \frac{\pi}{4} \left(\frac{D}{2} \right)^2 \\ \Rightarrow v_{0,1} &= \frac{v_{1,b} + v_2}{4} \\ \Rightarrow v_{0,1} &= v_{1,b} \left(1 + \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{\lambda L_2}{16D}}} \right) \end{aligned}$$

$v_{0,1}$ in (*) eingesetzt:

$$\begin{aligned} \rho g (H - H_1) &= \frac{\rho}{2} v_{1,b}^2 \left(1 + \frac{\lambda L_1}{16D} \left(1 + \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{\lambda L_2}{16D}}} \right)^2 \right) \\ \Rightarrow v_{1,b} &= \sqrt{\frac{2g(H - H_1)}{1 + \frac{\lambda L_1}{16D} \left(1 + \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{\lambda L_2}{16D}}} \right)^2}} \end{aligned}$$

c) $k_1, k_2 = ?$

Instationärer Bernoulli von 0 bis 2:

$$p_a + \rho g H = p_a + \rho g H_1 + \frac{\rho}{2} v_2^2 + \frac{\rho}{2} v_{0,1}^2 \lambda \frac{L_1}{D} + \frac{\rho}{2} v_{0,2}^2 \lambda \frac{L_2}{D} + \rho \int_0^2 \frac{\partial v}{\partial t} ds$$

Der instationäre Term wird in zwei Teile aufgeteilt, da die Geschwindigkeit nicht über der Strecke konstant bleibt:

$$\int_0^2 \frac{\partial v}{\partial t} ds = \int_0^{L_1} \frac{\partial v_{0,1}}{\partial t} ds + \int_0^{L_2} \frac{\partial v_{0,2}}{\partial t} ds$$

Mit dem Hinweis ($D \ll L_1, L_2$), kann man annehmen $\frac{\partial(\cdot)}{\partial t} = \frac{d(\cdot)}{dt}$:

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{\partial v}{\partial t} ds &= \int_0^{L_1} \frac{dv_{0,1}}{dt} ds + \int_0^{L_2} \frac{dv_{0,2}}{dt} ds \\ \Rightarrow \int_0^2 \frac{\partial v}{\partial t} ds &= L_1 \frac{dv_{0,1}}{dt} + L_2 \frac{dv_{0,2}}{dt} \end{aligned}$$

Jetzt lautet die Bernoulligleichung:

$$\Rightarrow \rho g H = \rho g H_1 + \frac{\rho}{2} v_2^2 + \frac{\rho}{2} v_{0,1}^2 \lambda \frac{L_1}{D} + \frac{\rho}{2} v_{0,2}^2 \lambda \frac{L_2}{D} + \rho L_1 \frac{dv_{0,1}}{dt} + \rho L_2 \frac{dv_{0,2}}{dt} \quad (\star \star \star)$$

Analog dazu Bernoulli von 0 bis 1:

$$\rho g H = \rho g H_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 + \frac{\rho}{2} v_{0,1}^2 \lambda \frac{L_1}{D} + \rho L_1 \frac{dv_{0,1}}{dt} \quad (\star \star \star \star)$$

$(\star \star \star) - (\star \star \star \star)$:

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{2} (v_2^2 - v_1^2) + \frac{\rho}{2} v_{0,2}^2 \lambda \frac{L_2}{D} + \rho L_2 \frac{dv_{0,2}}{dt} &= 0 & | \text{Konti: } v_{0,2} = \frac{v_2}{4} \\ \Rightarrow \frac{\rho}{2} (v_2^2 - v_1^2) + \frac{\rho}{2} \left(\frac{v_2}{4}\right)^2 \lambda \frac{L_2}{D} + \rho \frac{L_2}{4} \frac{dv_2}{dt} &= 0 & | : \rho \\ \Rightarrow \frac{L_2}{4} \frac{dv_2}{dt} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\lambda L_2}{16D}\right) v_2^2 - \frac{1}{2} v_1^2 &= 0 & | : \frac{L_2}{4} \\ \rightarrow \frac{dv_2}{dt} + \underbrace{\frac{2}{L_2} \left(1 + \lambda \frac{L_2}{16D}\right)}_{=k_2} v_2^2 - \underbrace{\frac{2}{L_2} v_1^2}_{=k_1} &= 0 \end{aligned}$$

Das heißt schließlich:

$$k_1 = \frac{2}{L_2} \left(1 + \lambda \frac{L_2}{16D}\right) \quad \text{und} \quad k_2 = -\frac{2}{L_2}$$

Quelle: Herbst 2009

4. Aufgabe

a) $p_i = ?$

Bernoulli von 0 bis 3:

$$p_i + \rho g H = p_3 + \frac{\rho}{2} v_3^2 + \Delta p^-$$

Wobei Δp^- , der Druckverlust ist, der durch Rohrreibung, Ventil und Sieb entsteht:

$$\Delta p_V = \frac{\rho}{2} v_3^2 \lambda \frac{L}{d} + \frac{\rho}{2} v_1^2 \left(\zeta_S + \zeta_V + \lambda \frac{2L}{D} \right)$$

mit $p_3 = p_a + \rho g h$ aus der hydrostatische Grundgleichung:

$$\begin{aligned} \Rightarrow p_i + \rho g H &= p_a + \rho g h + \frac{\rho}{2} v_3^2 \left(1 + \lambda \frac{L}{d} \right) + \frac{\rho}{2} v_1^2 \left(\zeta_S + \zeta_V + \lambda \frac{2L}{D} \right) \\ \Rightarrow p_i &= p_a - \rho g (H - h) + \frac{\rho}{2} v_3^2 \left(1 + \lambda \frac{L}{d} \right) + \frac{\rho}{2} v_1^2 \left(\zeta_S + \zeta_V + \lambda \frac{2L}{D} \right) \end{aligned} \quad (\star)$$

Da $\dot{V} = \text{const.}$ gegeben ist, können alle Geschwindigkeiten mittel der Kontinuitätsgleichung bestimmt werden:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= v_3 A_3 = v_1 A_1 \\ \Rightarrow v_3 &= \frac{\dot{V}}{A_3} \quad \text{und} \quad v_1 = \frac{\dot{V}}{A_1} & | \quad A_3 = \frac{\pi d^2}{4}, \quad A_1 = \frac{\pi D^2}{4} \\ \Rightarrow v_3 &= \frac{4\dot{V}}{\pi d^2} \quad \text{und} \quad v_1 = \frac{4\dot{V}}{\pi D^2} \end{aligned}$$

v_3 und v_1 in $(\star)$ eingesetzt:

$$\begin{aligned} \Rightarrow p_i &= p_a - \rho g (H - h) + \frac{\rho}{2} \left(\frac{16V^2}{\pi^2 d^4} \right) \left(1 + \lambda \frac{L}{d} \right) + \frac{\rho}{2} \left(\frac{16V^2}{\pi^2 D^4} \right) \left(\zeta_S + \zeta_V + \lambda \frac{2L}{D} \right) \\ \Rightarrow p_i &= p_a - \rho g (H - h) + \frac{8\rho V^2}{\pi^2 d^4} \left(1 + \lambda \frac{L}{d} + \frac{d^4}{D^4} \left(\zeta_S + \zeta_V + \lambda \frac{2L}{D} \right) \right) \end{aligned}$$

b) $\Delta T = ?$

Instationärer Bernoulli von 0 bis 4 ohne Verluste:

$$p_i + \rho g (H + L) = p_a + \frac{\rho}{2} v_4^2 + \rho \int_0^L \frac{\partial v}{\partial t} ds$$

Der instationäre Term wird in zwei Teile aufgeteilt, da die Geschwindigkeit aufgrund der Querschnittsänderung nicht überall gleich ist, nicht konstant bleibt:

$$\int_0^L \frac{\partial v}{\partial t} ds = \int_0^{2L} \frac{\partial v_1}{\partial t} ds + \int_0^L \frac{\partial v_4}{\partial t} ds \quad (\star)$$

Mit dem Hinweis ($L \gg D$), kann man annehmen $\frac{\partial(\cdot)}{\partial t} = \frac{d(\cdot)}{dt}$:

$$\begin{aligned} \int_0^L \frac{\partial v}{\partial t} ds &= \int_0^{2L} \frac{dv_1}{dt} ds + \int_0^L \frac{dv_4}{dt} ds \\ \Rightarrow \int_0^L \frac{\partial v}{\partial t} ds &= 2L \frac{dv_1}{dt} + L \frac{dv_4}{dt} \end{aligned}$$

Zur Bestimmung der Geschwindigkeit v_1 wird die Kontinuitätsgleichung benutzt:

$$\begin{aligned} v_1 A_1 &= v_4 A_4 \\ \Rightarrow v_1 &= v_4 \frac{A_4}{A_1} & | \quad A_1 = \frac{\pi D^2}{4}, \quad A_4 = \frac{\pi d^2}{4} \\ \Rightarrow v_1 &= v_4 \frac{d^2}{D^2} \end{aligned}$$

v_1 und $\int_0^4 \frac{\partial v}{\partial t} ds$ in $(\star)$ eingesetzt:

$$\begin{aligned} \Rightarrow p_i + \rho g(H + L) &= p_a + \frac{\rho}{2} v_4^2 + \rho \frac{dv_4}{dt} \frac{d^2}{D^2} 2L + \rho \frac{dv_4}{dt} L \\ \Rightarrow 2 \frac{p_i - p_a}{\rho} + 2g(H + L) &= v_4^2 + \frac{dv_4}{dt} L \left(2 \frac{d^2}{D^2} + 1 \right) \end{aligned} \quad (\star\star)$$

Stationärer Bernoulli von 0 bis 4 mit Endgeschwindigkeit $v_{4,\text{end}}$ (Torricelli):

$$\begin{aligned} p_i + \rho g(H + L) &= p_a + \frac{\rho}{2} v_{4,\text{end}}^2 \\ \Rightarrow v_{4,\text{end}} &= \sqrt{2 \frac{p_i - p_a}{\rho} + 2g(H + L)} \end{aligned}$$

Zu beobachten ist, dass $v_{4,\text{end}} = \sqrt{\text{Linke Seite von } (\star\star)}$. Das eingesetzt:

$$\begin{aligned} \Rightarrow v_{4,\text{end}}^2 &= v_4^2 + \frac{dv_4}{dt} 2L \left(2 \frac{d^2}{D^2} + 1 \right) \\ \Rightarrow \frac{v_{4,\text{end}}^2 - v_4^2}{2L \left(2 \frac{d^2}{D^2} + 1 \right)} &= \frac{dv_4}{dt} \end{aligned}$$

Trennung der Variablen und Setzen der Integralgrenzen:

$$\int_0^{\Delta T} dt = 2L \left(2 \frac{d^2}{D^2} + 1 \right) \int_0^{0,9v_{4,\text{end}}} \frac{dv_4}{v_{4,\text{end}}^2 - v_4^2}$$

Mit Hinweis: $a^2 = v_{4,\text{end}}^2$ und $a = v_{4,\text{end}} > |v_4|$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Delta T &= \frac{2L \left(2 \frac{d^2}{D^2} + 1 \right)}{2v_{4,\text{end}}} \left(\ln \left(\underbrace{\frac{v_{4,\text{end}} + 0,9v_{4,\text{end}}}{v_{4,\text{end}} - 0,9v_{4,\text{end}}}}_{=19} \right) - \ln \left(\underbrace{\frac{v_{4,\text{end}}}{v_{4,\text{end}}}}_{=1} \right) \right) \\ \Rightarrow \Delta T &= \frac{2L \left(2 \frac{d^2}{D^2} + 1 \right)}{2v_{4,\text{end}}} \ln(19) \\ \Rightarrow \Delta T &= \frac{2L \left(2 \frac{d^2}{D^2} + 1 \right)}{2\sqrt{2 \frac{p_i - p_a}{\rho} + 2g(H + L)}} \ln(19) \end{aligned}$$

Quelle: Herbst 2013