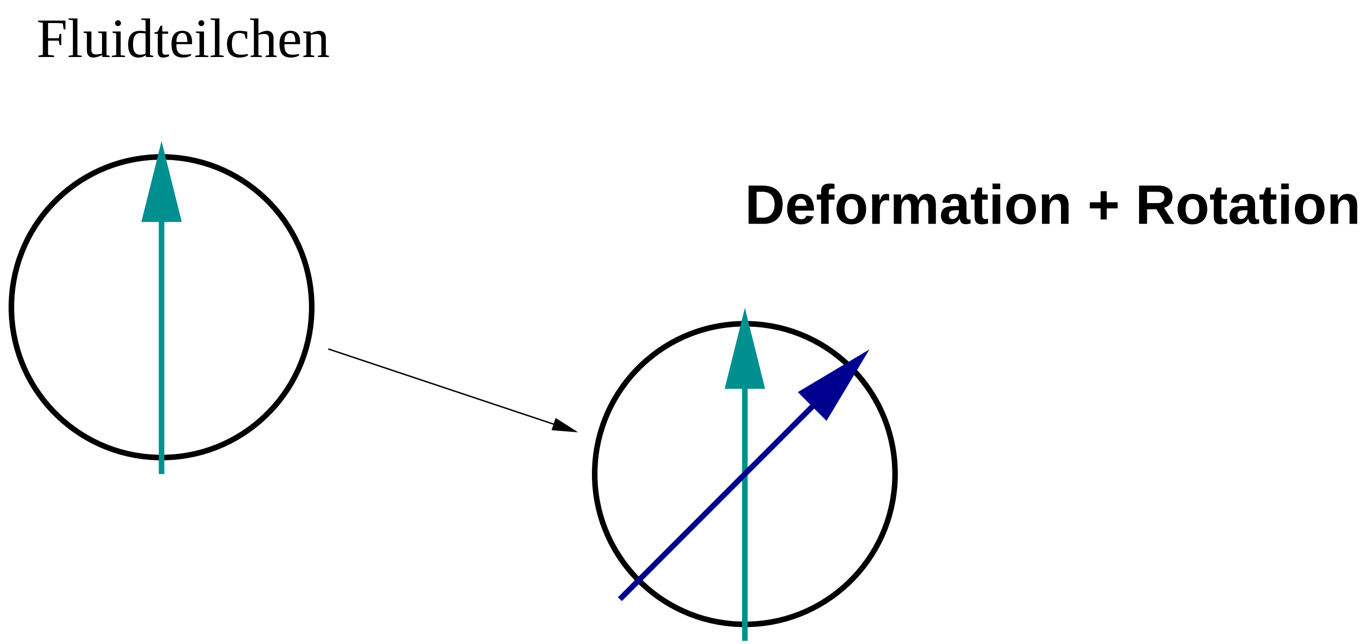
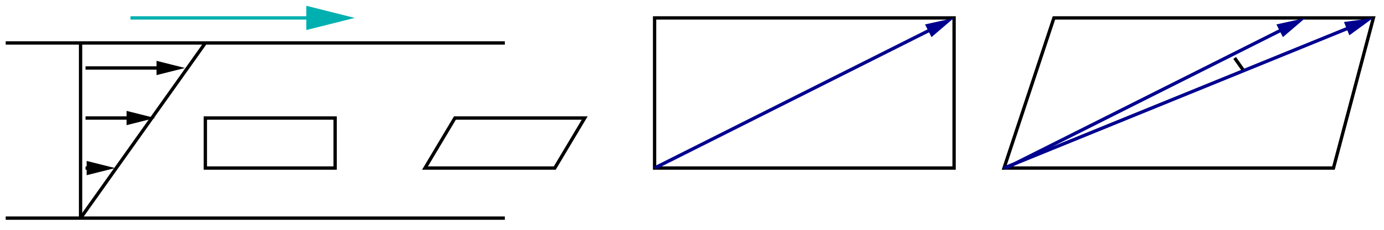
Wirbelströmungen

- I. A. sind Strömungen drehungsbehaftet
- Drehungsfreiheit → Vereinfachung der Navier-Stokes Gleichungen → analytische Lösung als Näherung für reale Strömungen

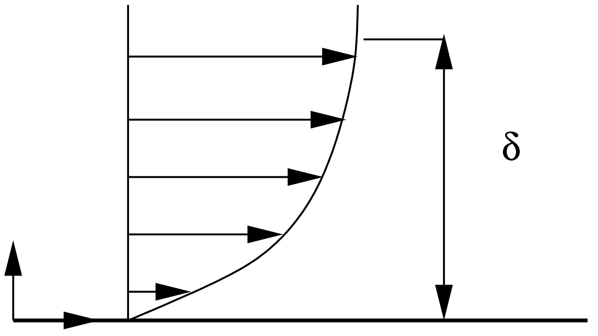


Drehung heißt, daß sich die Teilchen um die <u>eigene</u> Achse drehen

Beispiel: Couette-Strömung



- Rotation tritt in reibungsbehafteten Strömungen auf
- Schichtenstr., Rohrstr., Grenzschichtstr.



Anstieg der Geschwindigkeit von

$$u(x, y = 0) = 0$$
$$u(x, y \neq 0) \neq 0$$

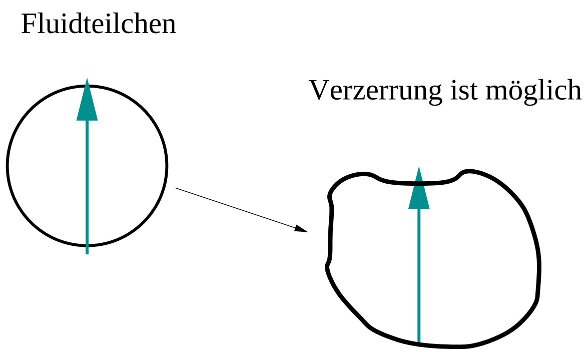
$$\frac{\partial u}{\partial y} \neq 0$$

für kleine Wandabstände ist die Strömung $\approx$ parallel zur Wand $\rightarrow$ $v = 0$

$$\rightarrow \omega = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \neq 0$$

bei reibungsbehafteten Strömungen ist z. B. in Wandnähe in der Regel $\vec{\omega} \neq 0$

- Drehungsfreie Strömungen (Potentialströmungen)



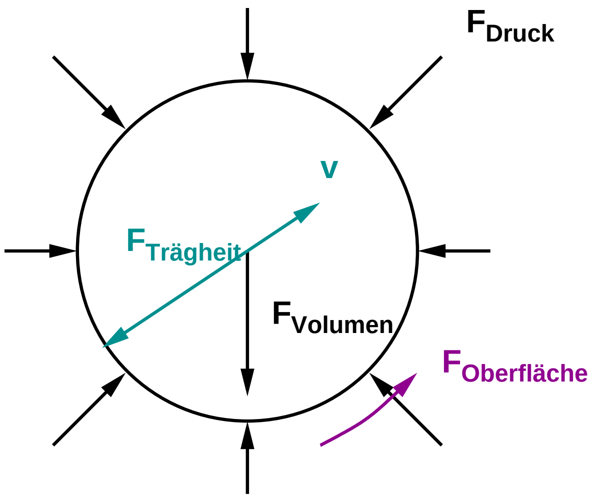
Drehungsfreiheit ist im Allgemeinen nur in reibungsfreien Strömungen möglich.

Wirbelströmungen

Erhaltungsgleichungen für reibungsfreie Strömungen

$$\frac{d\vec{I}}{dt} = \sum \vec{F}_a = \text{Druck- und Volumenkräfte}$$

Fluidelement in Form einer Kugel



- Reibungskräfte führen zur Drehung
- Die Kräfte in einer reibungsfreien Strömung gehen durch den Mittelpunkt

Wirbelströmungen

- in reibungsfreier Strömung (ohne Diskontinuität) kann keine Drehung erzeugt werden
- eine zu einem Zeitpunkt drehungsfreie Strömung bleibt drehungsfrei

<u>Wirbelvektor</u>

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\text{rot}\vec{v} = \frac{1}{2}(\nabla \times \vec{v}) \text{ mit } \vec{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

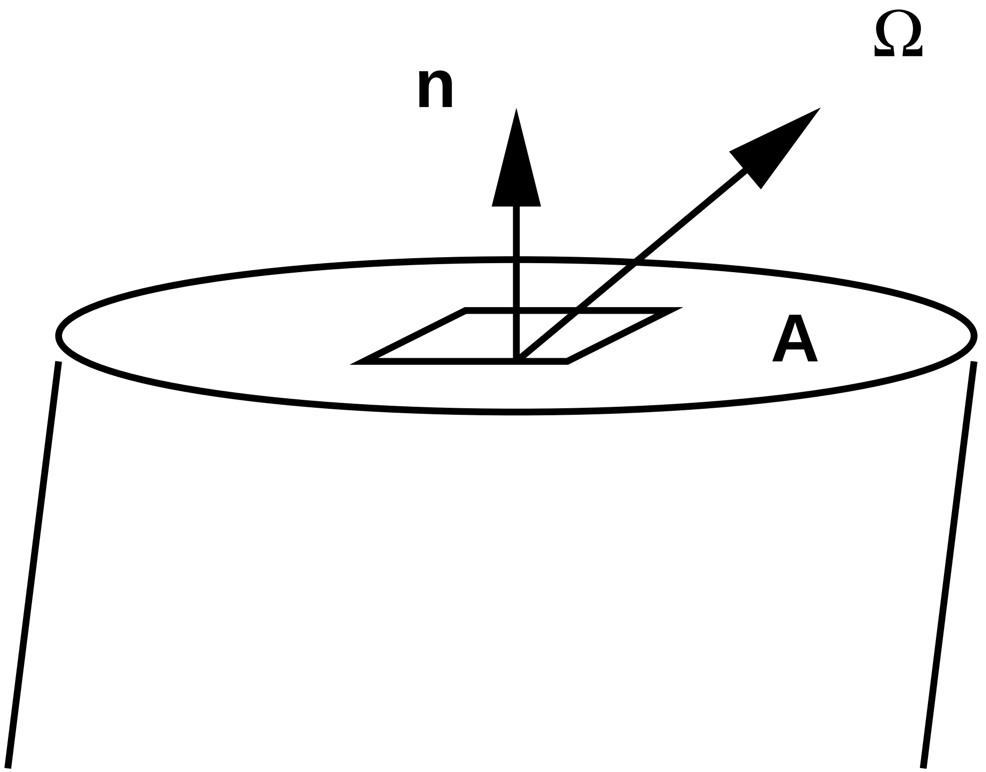
Wirbelströmungen

ebene 2d Strömung ($w = 0, \frac{\partial}{\partial z} = 0$)

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

Wirbelfluss Ω

Integral über den durch eine Fläche A tretenden Wirbelvektor (in Analogie zu dem Integral über den durch eine Fläche tretenden Geschwindigkeitsvektor = Volumenstrom)

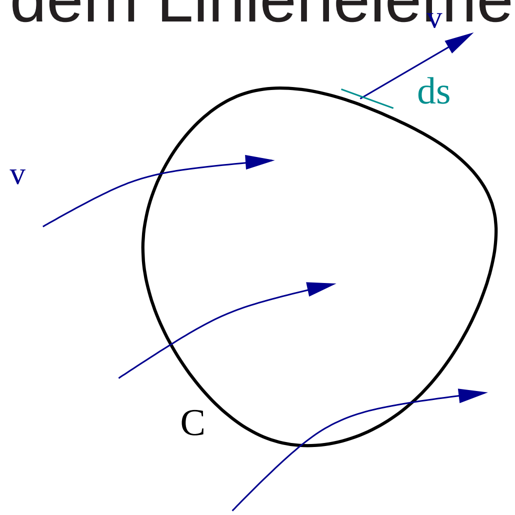


$$\Omega = \int_A \vec{\omega} \cdot \vec{n}\, dA$$

$$\dot{Q} = \int_A \vec{v} \cdot \vec{n}\, dA$$

Zirkulation Γ

Linienintegral über das Skalarprodukt aus Geschwindigkeit $\vec{v}$ und dem Linienelement $\vec{ds}$ längs einer geschlossenen Kurve C.



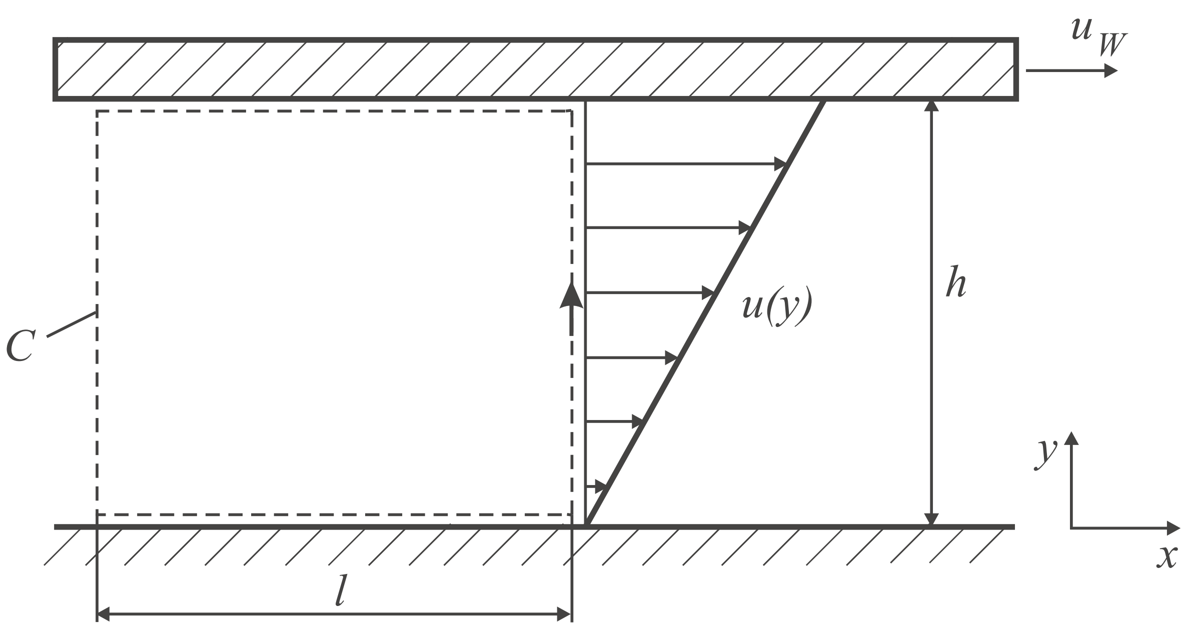
$$\Gamma = \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{s}$$

Zusammenhang (Satz von Stokes)

$$\Gamma = \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_A (\nabla \times \vec{v})\vec{n}\, dA = \int_A 2(\vec{\omega} \cdot \vec{n})\, dA = 2\Omega$$

Es wird die zweidimensionale Couette-Strömung ohne Druckgradient untersucht. Bestimmen Sie $\vec{\omega},\ \Gamma_C,\ \Omega$.

Gegeben: $u_W,\ h,\ l$



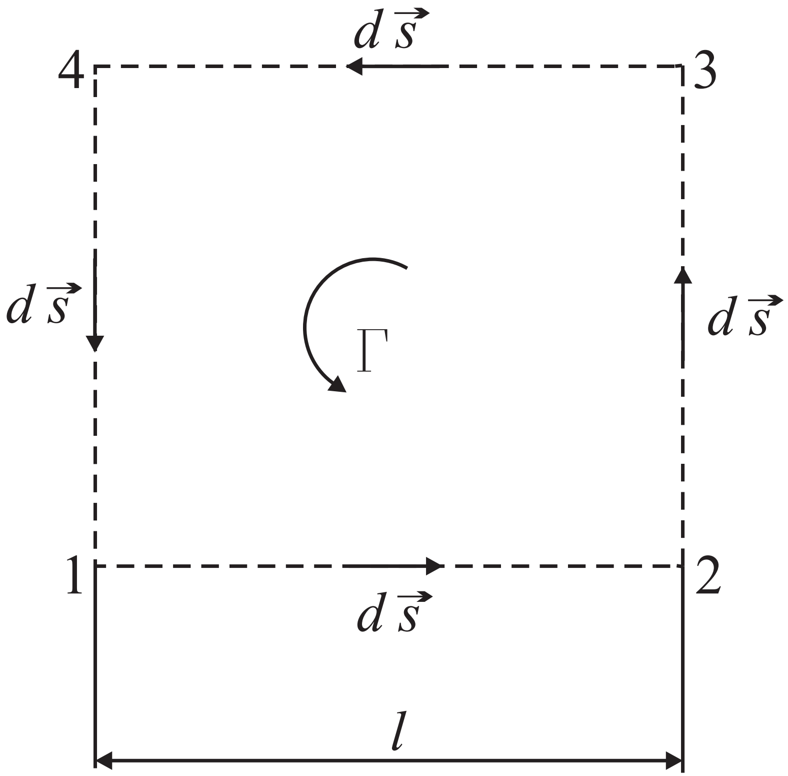
Couette Strömung $\Longrightarrow$ ohne Druckgradient

$$\Longrightarrow u(y) = u_W \frac{y}{h}$$

ebene Strömung

$$\Longrightarrow \vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_z \end{pmatrix} \qquad \omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{1}{2}\frac{u_W}{h}$$

$$\Longrightarrow \vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{-u_W}{2h} \end{pmatrix}$$



$$\Gamma_C = \oint\limits_C \vec{v}\, d\vec{s} = \int\limits_1^2 \vec{v}\, d\vec{s} + \int\limits_2^3 \vec{v}\, d\vec{s} + \int\limits_3^4 \vec{v}\, d\vec{s} + \int\limits_4^1 \vec{v}\, d\vec{s}$$

$$\int_1^2 \vec{v}\, d\vec{s} = 0, \qquad \text{da } u = v = 0$$

$$\int_2^3 \vec{v}\, d\vec{s} = 0, \qquad \text{da } \vec{v} \perp d\vec{s}$$

$$\int_3^4 \vec{v}\, d\vec{s} = \int_3^4 \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -dx \\ dy \end{pmatrix} = \int_3^4 -u_W dx = -u_W l$$

$$\int_4^1 \vec{v}\, d\vec{s} = 0, \qquad \text{da } \vec{v} \perp d\vec{s}$$

$$\Longrightarrow \Gamma = -u_W \cdot l$$

$$\Omega = \int_A \vec{\omega}\, \vec{n}\, dA = \omega_z \cdot A = \frac{-u_W}{2h} \cdot l \cdot h = -\frac{1}{2} u_W \cdot l = \frac{1}{2}\, \Gamma$$

Ein Wirbelsturm hat folgende Geschwindigkeitsverteilung:

$$v_\Theta(r) = \begin{cases} \omega\, r & r \leq r_0 \\ \dfrac{\omega\, r_0^2}{r} & r > r_0 \end{cases} \qquad v_r = 0$$

$$r_0 = 10\ m \qquad \omega = 10\ \frac{1}{s} \qquad H = 100\ m \qquad \rho = 1,25\ kg/m^3$$

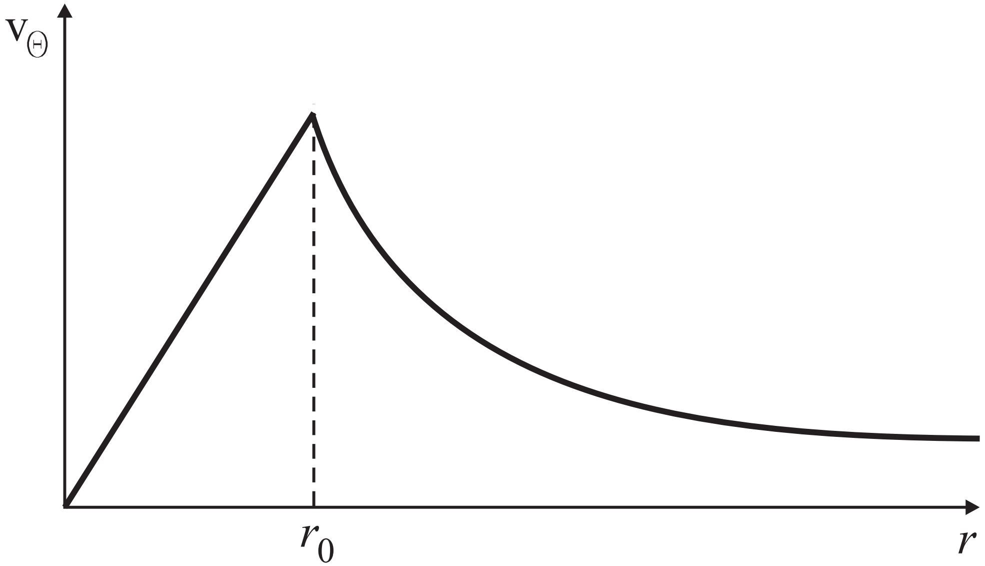
a) Skizzieren Sie $v_\Theta(r)$!

b) Bestimmen Sie die Zirkulation auf einem Kreis um den Ursprung für $r < r_0, r = r_0$ und $r > r_0$!

c) Zeigen Sie, dass für $r > r_0$ die Strömung drehungsfrei ist!

d) Wie gross ist die kinetische Energie innerhalb eines Zylinders mit dem Radius $R = 2\, r_0$ und Höhe H?

a)

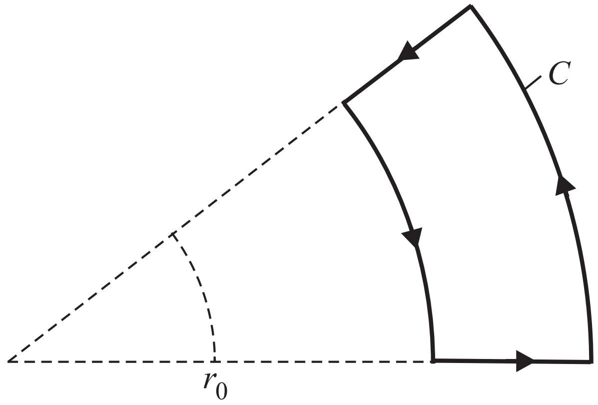


b)

$$\Gamma = \oint_C \vec{v}\cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} v_\Theta(r)\, r\, d\,\Theta = \begin{cases} 2\pi\,\omega\, r^2 & r \leq r_0 \\ 2\pi\,\omega\, r_0^2 & r > r_0 \end{cases}$$

c)

$$\Gamma = \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{s} = 0$$



$$\vec{\omega} = 0$$

d)

$$E = \int_0^{2r_0} \frac{\rho}{2} v_\Theta^2 \, H \, 2\pi \, r \, d\,r =$$

$$\pi \, \rho \, H \, \omega^2 \, r_0^4 \, (0,25 \, + \, \ln 2) = 3,7 \cdot 10^8 \, Nm$$