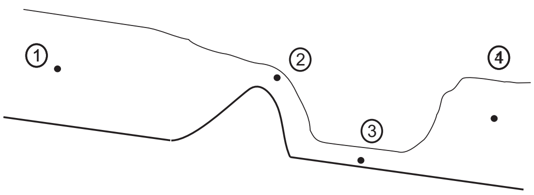
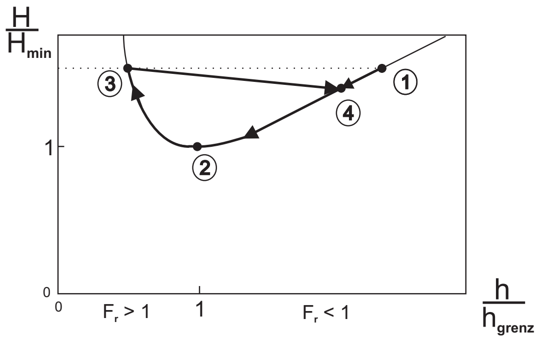
Tutorenprogramm - Strömungsmechanik I

Offene Gerinne - Musterlösung

1. Aufgabe



1. Zustandsänderungen:



2. Es gilt $H_1 = H_3$, da keine Energiehöhenverluste auftreten

$$H = z + \frac{v^2}{2g} \quad \text{mit} \quad v = \frac{\dot{V}}{Bz}$$

$$\rightarrow \quad H_3 = z_1 + \frac{\dot{V}^2}{2B^2{z_1}^2g}$$

$$H_1 = H_3 \quad \rightarrow \quad z_1 + \frac{{v_1}^2}{2g} = z_3 + \frac{v_3^2}{2g}$$

$$\rightarrow z_1 + \frac{\dot{V}^2}{2B^2{z_1}^2g} = z_3 + \frac{\dot{V}^2}{2B^2{z_3}^2g}$$

$$\rightarrow z_1 - z_3 = \frac{\dot{V}^2}{2B^2g}(\frac{1}{{z_3}^2} - \frac{1}{{z_1}^2})$$

$$\rightarrow z_1 - z_3 = \frac{\dot{V}^2}{2B^2g}(\frac{(z_1+z_3)(z_1-z_3)}{{z_1}^2{z_3}^2})$$

$$\rightarrow {z_1}^2{z_3}^2 = \frac{\dot{V}^2}{2B^2g}(z_1+z_3)$$

$$\rightarrow {z_3}^2 - \frac{\dot{V}^2}{2B^2{z_1}^2g}z_3 - \frac{\dot{V}^2}{2B^2z_1g} = 0$$

$$\rightarrow z_3 = \frac{\dot{V}^2}{4B^2{z_1}^2g} \pm \sqrt{\left(\frac{\dot{V}^2}{4B^2{z_1}^2g}\right)^2 + \frac{\dot{V}^2}{2B^2z_1g}} \quad \text{(nur pos. Höhen sind sinnvoll} \rightarrow +)$$

$$Fr_3 = \frac{v_3}{\sqrt{gz_3}} \quad \text{mit} \quad v_3 = \frac{\dot{V}}{Bz_3} \quad \rightarrow \quad Fr_3 = \frac{\dot{V}}{B\sqrt{g{z_3}^3}}$$

3. Wenn kein Wassersprung auftritt, muss die Energiehöhe konstant bleiben; mit Konti folgt $\rightarrow z_1 = z_4$

Quelle: Herbst 2009

2. Aufgabe

a) Definition des Volumenstroms:

$\dot{V} = u_1 B h_1$

Bernoulli von 1 nach 2: $p_a + \rho g h_1 + \frac{\rho}{2} u_1^2 = p_a + \rho g (h_2 + y_W) + \frac{\rho}{2} u_2^2$

Konti: $u_1 h_1 B = u_2 h_2 B \quad u_2 = u_1 \frac{h_1}{h_2}$

$h_1 = h_2 + y_W + \Delta h \quad \Leftrightarrow \quad h_2 = h_1 - y_W - \Delta h$

Einsetzen in Bernoulli Gleichung: $\rho g h_1 + \frac{\rho}{2} u_1^2 = \rho g (h_1 - \Delta h) + \frac{\rho}{2} u_1^2 \frac{h_1^2}{(h_1 - \Delta h - y_W)^2}$

$$u_1 = \sqrt{\frac{2g\Delta h}{\frac{h_1^2}{(h_1 - \Delta h - y_W)^2} - 1}}$$

$$\Rightarrow \dot{V} = \sqrt{\frac{2g\Delta h}{\frac{h_1^2}{(h_1 - \Delta h - y_W)^2} - 1}} B h_1 \qquad \left[\sqrt{\frac{m^2}{s^2}} m^2\right] = \left[\frac{m^3}{s}\right]$$

b) Grenzzustand bei $Fr_2 = 1$:

$Fr = \frac{u}{\sqrt{gh}}$

$\Rightarrow u_2 = \sqrt{g h_2}$

$$\dot{V} = \sqrt{g (h_1 - y_W - \Delta h)^3} B \qquad \left[\sqrt{\frac{m^4}{s^2}} m\right] = \left[\frac{m^3}{s}\right]$$

Quelle: Herbst 2013

3. Aufgabe

1. $Fr < 1$: Die Spiegelhöhe nach dem Wehr ist niedriger als die der Anströmung.
2. Bernoulli:

$$\rho g z + \rho g y + \frac{\rho}{2} v^2 = const$$

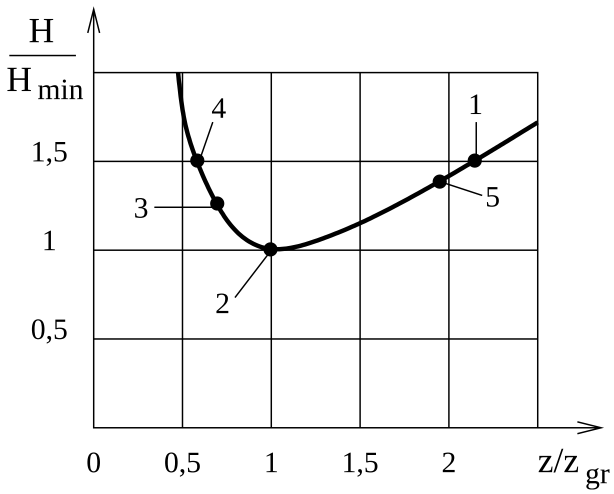
$$\Rightarrow z + \frac{v^2}{2g} + y = const \quad \text{mit} \quad H = z + \frac{v^2}{2g} \quad \text{und} \quad v = \frac{\dot{V}}{Bz}$$

$$\Rightarrow H = z + \frac{\dot{V}^2}{2gB^2z^2}$$

$$H_{min}: \frac{\partial H}{\partial z} = 0 \Rightarrow z_{gr} = \sqrt[3]{\frac{\dot{V}^2}{gB^2}} \qquad \left[\left(\frac{m^6}{s^2}\frac{s^2}{m}\frac{1}{m^2}\right)^{1/3}\right] = [m]$$

$$\Rightarrow H_{min} = z_{gr} + \frac{\dot{V}^2}{2gB^2z_{gr}^2} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{\dot{V}^2}{gB^2}} \qquad \left[\sqrt[3]{\frac{m^6}{s^2}\frac{s^2}{m}\frac{1}{m^2}}\right] = [m]$$

3. Skizze:



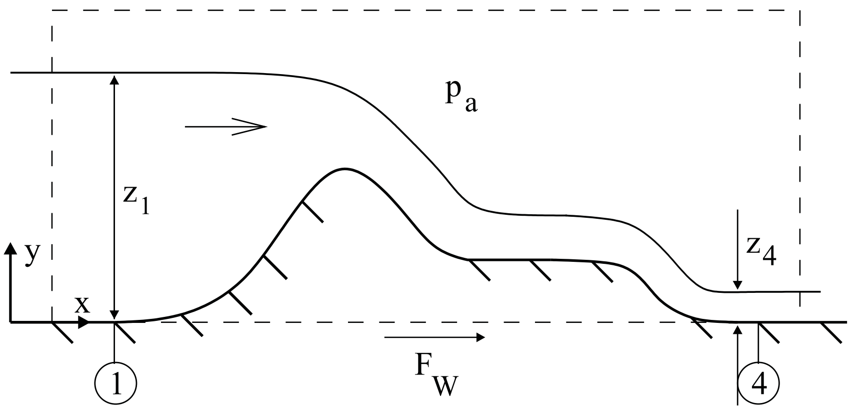
4. Konti:

$$v_4 z_4 B = v_1 z_1 B \Rightarrow v_4 = v_1 \frac{z_1}{z_4} = 4 v_1$$

$$\Rightarrow Fr_4 = \frac{v_4}{\sqrt{g z_4}} = \frac{v_1}{\sqrt{g \frac{z_4}{z_1} z_1}} \frac{z_1}{z_4} = 8 \frac{v_1}{\sqrt{g z_1}} \quad \text{mit} \quad v_1 = \frac{\dot{V}}{B z_1}$$

$$\Rightarrow Fr_4 = 8 \frac{\dot{V}}{B z_1 \sqrt{g z_1}} \qquad [.]$$

5. Impulserhaltungssatz (Bilanzhülle):



$$-v_1^2 z_1 B - B\int_0^{z_1} p_1(z)\mathrm{d}z + \rho v_4^2 z_4 B + B\int_0^{z_4} p_4(z)\mathrm{d}z + p_a B(z_1 - z_4) + F_W = 0$$

mit $\quad p_1(z) = p_a + \rho g(z_1 - z) \quad$ und $\quad p_4(z) = p_a + \rho g(z_4 - z)$

$$F_W = \rho v_1^2 z_1 B - \rho v_4^2 z_4 B + B\rho g\frac{z_1^2}{2} - B\rho g\frac{z_4^2}{2}$$

$$F_W = \rho B\left(v_1^2 z_1 - 4v_1^2 z_1 + g\frac{z_1^2}{2} - g\frac{z_1^2}{32}\right) = \rho B\left(\frac{15}{32}\ g z_1^2 - 3\ v_1^2 z_1\right)$$

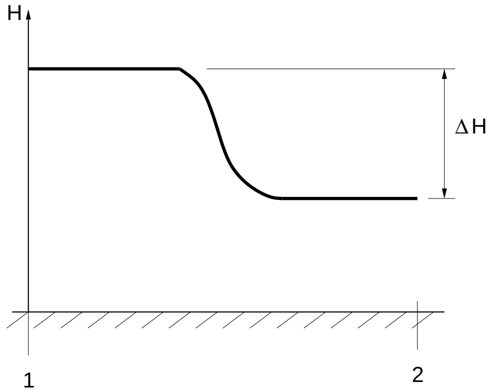
$$F_W = \rho B\left(\frac{15}{32}\ g z_1^2 - \frac{3}{64}\ g z_1^2\right)$$

$$F_W = \frac{27}{64}\ \rho B g\ z_1^2 \qquad \left[\frac{kg}{m^3}\frac{m}{s^2} mm^2\right] = [N]$$

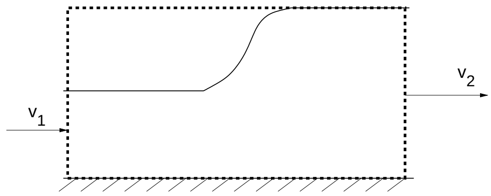
Quelle: Herbst 2012

4. Aufgabe

1. Skizze des Verlustes an Energiehöhe:



2. x-Impulssatz: $\dfrac{dI_x}{dt} = \sum F_x$



$$-\varrho v_1^2 z_1 b + \varrho v_2^2 z_2 b = b p_a (z_2 - z_1) + b \left(\int_0^{z_1} p_a + \varrho g z \mathrm{d}z - \int_0^{z_2} p_a + \varrho g z \mathrm{d}z \right)$$

$$\rightarrow \frac{1}{g} \left(v_2^2 z_2 - v_1^2 z_1 \right) = \left(\frac{z_1^2}{2} - \frac{z_2^2}{2} \right)$$

Konti: $v_1 z_1 = v_2 z_2$

$$\rightarrow \frac{1}{g} \left(\frac{v_1^2 z_1^2}{z_2} - v_1^2 z_1 \right) = \frac{1}{2}(z_1^2 - z_2^2)$$

$$\rightarrow \frac{v_1^2 z_1}{g z_2} (z_1 - z_2) = \frac{1}{2}(z_1 - z_2)(z_1 + z_2)$$

$$\rightarrow \frac{v_1^2 z_1}{g z_2} = \frac{1}{2}(z_1 + z_2)$$

$$\rightarrow z_2^2 + z_1 z_2 - 2\frac{v_1^2 z_1}{g} = 0, \quad \text{mit } Fr = \frac{v}{\sqrt{gz}}$$

$$\rightarrow z_2^2 + z_1 z_2 - 2 F r_1^2 z_1^2 = 0$$

$$\rightarrow z_{2_{1,2}} = -\frac{z_1}{2} \pm \sqrt{\frac{z_1^2}{4} + 2 F r_1^2 z_1^2}$$

Einzige physikalisch sinnvolle Lösung: $z_2 = \dfrac{z_1}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + 8 F r_1^2} \right)$

3. Energiesatz: $z_1 + \dfrac{v_1^2}{2g} = z_2 + \dfrac{v_2^2}{2g} + \Delta H_{12}$

$$\rightarrow z_1 + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{v_1^2 z_1^2}{2 g z_2^2} + \Delta H_{12}$$

$$\rightarrow \Delta H_{12} = z_1 \left(1 - \frac{z_2}{z_1} + \frac{Fr_1^2}{2}\left(1 - \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2\right)\right)$$

Quelle: Herbst 2008