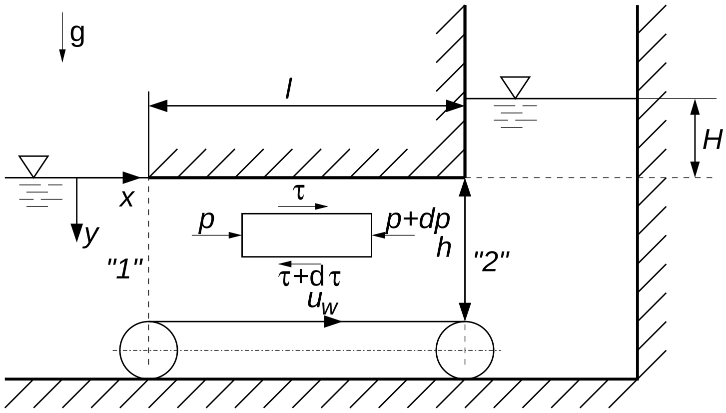
Tutorenprogramm - Strömungsmechanik I

Laminare Reibungsbehaftete Strömungen - Musterlösung

1. Aufgabe

1. Couette-Strömung (mit Druckgradient).
2. Kräftebilanz am Volumenelement in x-Richtung:



$$\left(p-\left(p+\frac{\partial p}{\partial x}dx\right)\right)dy+\left(\tau-\left(\tau+\frac{d\tau}{dy}dy\right)\right)dx=0$$

$$\frac{d\tau}{dy}=-\frac{\partial p}{\partial x}\ ,\quad \rightarrow \frac{\partial p}{\partial x}=\eta\frac{d^2u}{dy^2}$$

Bernoulli/Hydrostatik :

$$p_2=p_1+\varrho gH\ ,\quad \frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\varrho gH}{l}$$

$$\rightarrow \frac{\varrho gH}{l}=\eta\frac{d^2u}{dy^2}$$

$$\rightarrow u(y)=\frac{\varrho gH}{2\eta l}y^2+c_1y+c_2$$

Randbedingungen:

$$\left.\begin{array}{ll} y=0: & u=0 \\ y=h: & u=u_w \end{array}\right\}\rightarrow u(y)=\frac{\varrho gH}{2\eta l}\left(y^2-yh\right)+y\frac{u_w}{h}$$

Maximale Höhe $\rightarrow \quad \dot{V}=0$

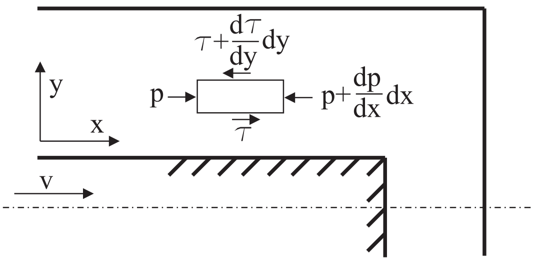
$$\rightarrow 0=\int_0^h\left[\frac{\varrho gH}{2\eta l}\left(y^2-yh\right)+y\frac{u_w}{h}\right]dy$$

$$\rightarrow 0=\frac{\varrho gH}{2\eta l}\left(-\frac{h^3}{6}\right)+\frac{hu_w}{2}$$

$$\rightarrow H=\frac{6\eta l u_w}{\varrho g h^2}$$

Quelle: Frühjahr 2009

2. Aufgabe



1. Bilanzierung an infinitesimal kleinem Element

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{d\tau}{dy}$$

$$\tau = -\eta\frac{du}{dy} \quad \Longrightarrow \quad \frac{d^2u}{dy^2} = \frac{1}{\eta}\frac{dp}{dx}$$

1. Integration: $\frac{du}{dy} = \frac{1}{\eta}\frac{dp}{dx}y + C_1 \quad \wedge \quad$ 2. Integration: $u = \frac{1}{2\eta}\frac{dp}{dx}y^2 + C_1 y + C_2$

R.B.:

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & y = 0: \quad u = v \\ 2) & y = \frac{b_2 - b_1}{2} \equiv H: \quad u = 0 \end{array}\right\} \text{Haftbedingung}$$

aus 1) $\quad C_2 = v$

aus 2) $\quad 0 = \frac{1}{2\eta}\frac{dp}{dx}H^2 + C_1 H + v = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad C_1 = -\frac{1}{2\eta}\frac{dp}{dx}H - \frac{v}{H}$

$$\Longrightarrow \quad u(y) = \frac{1}{2\eta}\frac{dp}{dx}H^2 \cdot \left(\frac{y^2}{H^2} - \frac{y}{H}\right) + v \cdot \left(1 - \frac{y}{H}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad u(y) = \frac{1}{4\eta}\frac{dp}{dx}y \cdot (b_2 - b_1)\left(\frac{y}{b_2 - b_1} - 1\right) + v \cdot \left(1 - \frac{2y}{b_2 - b_1}\right)$$

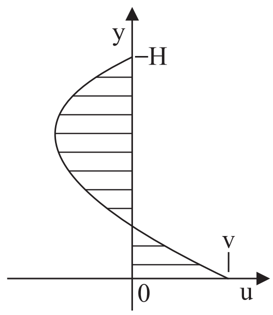
2. Volumenstrombilanz: $\frac{\dot{V}}{B} = 2 \cdot \int_0^H u(y)dy = -b_1 \cdot v$

$$\int_0^H u(y)dy = \frac{1}{2\eta}\frac{dp}{dx}H^2\left(\frac{1}{3}\frac{y^3}{H^2} - \frac{1}{2}\frac{y^2}{H}\right) + v \cdot \left(y - \frac{1}{2}\frac{y^2}{H}\right)\Bigg|_0^H$$

$$= -\frac{1}{12\eta}\frac{dp}{dx}H^3 + v\frac{H}{2} = -b_1\frac{v}{2} \Longleftrightarrow v \cdot \left(\frac{b_1}{2} + \frac{H}{2}\right) = \frac{1}{12\eta}\frac{dp}{dx}H^3$$

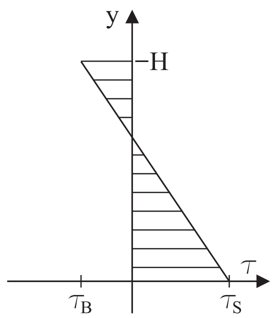
$$\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{2\eta}\frac{dp}{dx}H^2 = 3\frac{v}{H}(H + b_1) \Longleftrightarrow \frac{dp}{dx} = \frac{6\eta v}{H^2} \cdot \left(1 + \frac{b_1}{H}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad u(y) = 3v \cdot \left(1 + \frac{b_1}{H}\right)\left(\frac{y^2}{H^2} - \frac{y}{H}\right) + v \cdot \left(1 - \frac{y}{H}\right)$$



$$\Longrightarrow \quad u(y) = 6v \cdot \left(1 + \frac{2b_1}{b_2 - b_1}\right)\left(\frac{2y^2}{(b_2 - b_1)^2} - \frac{y}{b_2 - b_1}\right) + v \cdot \left(1 - \frac{2y}{b_2 - b_1}\right)$$

3. $\tau = -\eta \dfrac{du}{dy} = -\eta \left(3v \left(1 + \dfrac{b_1}{H} \right) \left(\dfrac{2y}{H^2} - \dfrac{1}{H} \right) - \dfrac{v}{H} \right)$



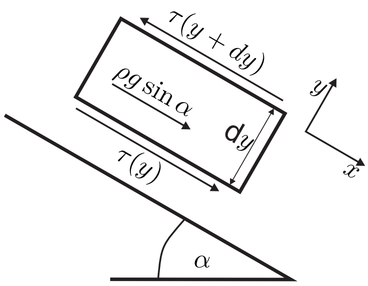
Stempel $y = 0$: $\tau_S = 3\eta \dfrac{v}{H} \left(1 + \dfrac{b_1}{H} \right) + \eta \dfrac{v}{H}$

B-Wand $y = H$: $\tau_B = -3\eta \dfrac{v}{H} \left(1 + \dfrac{b_1}{H} \right) + \eta \dfrac{v}{H}$

Quelle: Frühjahr 2010

3. Aufgabe

a) Kräftebilanz am Volumenelement in x-Richtung:



$\tau(y)dx - \tau(y+dy)dx + \rho g \sin\alpha dxdy = 0$

$\tau dx - \left(\tau + \frac{d\tau}{dy}dy\right) dx + \rho g \sin\alpha dxdy = 0$

$\frac{d\tau}{dy} = \rho g \sin\alpha \qquad \left[\frac{kg}{m^2 s}\right]$

b)
1. Die Schubspannung ist am Übergang zur Luft null: $\tau(y = 2\delta) = 0$
2. Die Schubspannung am Übergang der Fluide ist gleich: $\tau_1(y = \delta) = \tau_2(y = \delta)$
3. Die Geschwindigkeit des Fluids an der Wand entspricht der Wandgeschwindigkeit (Haftbedingung): $u_1(y = 0) = -u_W$
4. Die Geschwindigkeit am Übergang der Fluide ist gleich: $u_1(y = \delta) = u_2(y = \delta)$

c) Schubspannungsverteilung in den beiden Fluiden:

$\tau_1 = \rho g \sin\alpha y + c_1$

$\tau_2 = \rho g \sin\alpha y + c_2$

Mit Randbedingung 1:

$\tau_2(2\delta) = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = -2\rho g \sin\alpha\delta$

$\tau_2 = \rho g \sin\alpha y - 2\rho g \sin\alpha\delta$

$\tau_2 = \rho g \sin\alpha(y - 2\delta)$

Einsetzen von Randbedingung 2:

$\tau_1(y = \delta) = \tau_2(y = \delta) \;\Rightarrow\; \rho g \sin\alpha\delta + c_1 = \rho g \sin\alpha\delta - 2\rho g \sin\alpha\delta$

$c_1 = c_2 = -2\rho g \sin\alpha\delta$

$\tau_1 = \rho g \sin\alpha(y - 2\delta)$

Newtonsches Fluid: $\tau_n = -\eta_n \frac{du}{dy}$

$\frac{du_1}{dy} = \frac{\rho g \sin\alpha}{\eta_1}(-y + 2\delta)$

$\frac{du_2}{dy} = \frac{\rho g \sin\alpha}{\eta_2}(-y + 2\delta)$

Unbestimmte Integration:

$u_1 = \frac{\rho g \sin\alpha}{\eta_1}(-\frac{y^2}{2} + 2\delta y) + c_3$

$u_2 = \frac{\rho g \sin\alpha}{\eta_2}(-\frac{y^2}{2} + 2\delta y) + c_4$

Einsetzen von Randbedingung 3: $\quad u_1(y = 0) = -u_W \;\Rightarrow c_3 = -u_W$

$\Rightarrow \quad u_1 = \frac{\rho g \sin\alpha}{\eta_1}(-\frac{y^2}{2} + 2\delta y) - u_W$

Anwenden von Randbedingung 4: $\quad u_1(y = \delta) = u_2(y = \delta)$

$\Rightarrow \; \frac{\rho g \sin\alpha}{\eta_1}(-\frac{\delta^2}{2} + 2\delta^2) - u_W = \frac{\rho g \sin\alpha}{\eta_2}(-\frac{\delta^2}{2} + 2\delta^2) + c_4$

$\Leftrightarrow \frac{\rho g \sin\alpha}{\eta_1}\frac{3\delta^2}{2} - u_W = \frac{\rho g \sin\alpha}{\eta_2}3\frac{\delta^2}{2} + c_4$

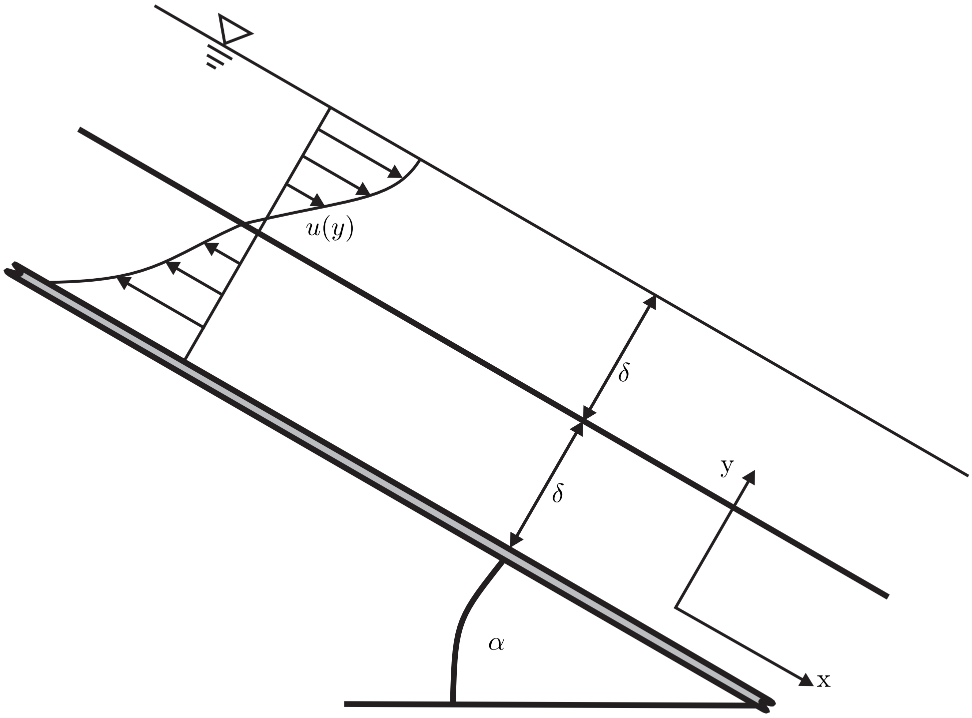
$$\Rightarrow c_4 = \frac{3\rho g \sin\alpha}{2}\delta^2(\frac{1}{\eta_1} - \frac{1}{\eta_2}) - u_W$$

Geschwindigkeitsverteilung in beiden Fluiden:

$$0 \leq y \leq \delta: \quad u_1(y) = \frac{\rho g \sin\alpha}{\eta_1}(-\frac{y^2}{2} + 2\delta y) - u_W \qquad \left[\frac{m}{s}\right]$$

$$\delta \leq y \leq 2\delta: \quad u_2(y) = \frac{\rho g \sin\alpha}{\eta_2}(-\frac{y^2}{2} + 2\delta y) + \frac{3\rho g \sin\alpha}{2}\delta^2(\frac{1}{\eta_1} - \frac{1}{\eta_2}) - u_W \qquad \left[\frac{m}{s}\right]$$

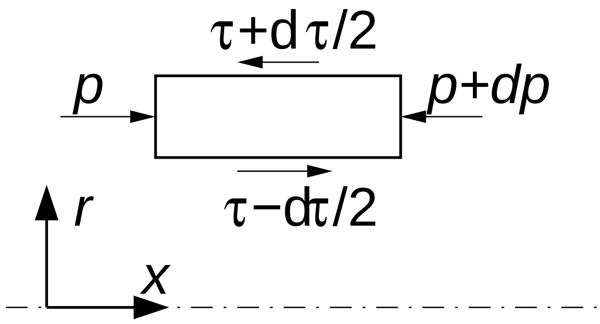
d) Qualitative Geschwindigkeitsverteilung im Fluid:



Quelle: Herbst 2013

4. Aufgabe

1. Der Geschwindigkeitsgradient besitzt ein negatives Vorzeichen.
2. Kräftebilanz am Volumenelement in x-Richtung:



$$\left(p - \left(p + \frac{dp}{dx}dx\right)\right) 2\pi r dr + \left(2\pi(r - \frac{dr}{2})dx\right)\left(\tau - \frac{d\tau}{dr}\frac{dr}{2}\right) -$$

$$\left(2\pi(r + \frac{dr}{2})dx\right)\left(\tau + \frac{d\tau}{dr}\frac{dr}{2}\right) = 0$$

$$-\frac{dp}{dx} - \frac{d\tau}{dr} - \frac{\tau}{r} = 0$$

$$-\frac{dp}{dx} - \frac{1}{r}\frac{d(\tau r)}{dr} = 0$$

$$\rightarrow \tau r = -\int_0^r \frac{dp}{dx} r dr$$

$$\rightarrow \tau = -\frac{dp}{dx}\frac{r}{2} + \frac{k_1}{r}$$

Symmetrie: $\tau(r = 0) = 0, \quad \rightarrow k_1 = 0, \quad \rightarrow \tau = -\frac{dp}{dx}\frac{r}{2}$

Randbedingung für die Geschwindigkeit: $u(r = R) = 0$

Einsetzen der Beziehung für die Schubspannung:

$$c\sqrt{\left|\frac{du}{dr}\right|} = \frac{dp}{dx}\frac{r}{2}$$

$$\left|\frac{du}{dr}\right| = \left(\frac{dp}{dx}\right)^2 \frac{r^2}{4c^2}$$

Für $\frac{dp}{dx} < 0$ ist $\frac{du}{dr} < 0$.

$$\rightarrow \frac{du}{dr} = -\left(\frac{dp}{dx}\right)^2 \frac{r^2}{4c^2}$$

$$\rightarrow u = -\left(\frac{dp}{dx}\right)^2 \frac{r^3}{12c^2} + k_2$$

Mit der Randbedingung $u(r = R) = 0$: $\rightarrow u = \left(\frac{dp}{dx}\right)^2 \frac{1}{12c^2}(R^3 - r^3)$

3. Volumenstrom:

$$\dot{V} = \int_0^R 2\pi r u(r) dr = \frac{2\pi}{12c^2}\left(\frac{dp}{dx}\right)^2 \int_0^R R^3 r - r^4 dr = \frac{\pi}{20c^2}\left(\frac{dp}{dx}\right)^2 R^5$$

Mittlere Geschwindigkeit:

$$\bar{u} = \frac{\dot{V}}{\pi R^2} = \frac{1}{20c^2}\left(\frac{dp}{dx}\right)^2 R^3$$

Maximale Geschwindigkeit:

$$u_{max} = u(r = 0) = \frac{1}{12c^2}\left(\frac{dp}{dx}\right)^2 R^3$$

$$\frac{u_{max}}{\bar{u}} = \frac{5}{3}$$

4. Mittlere Viskosität:

$$\bar{\eta} = \frac{1}{\pi R^2}\int_0^R 2\pi r \eta(r) dr$$

$$\frac{du}{dr} = -\frac{1}{4c^2}\left(\frac{dp}{dx}\right)^2 r^2$$

$$\eta = -\frac{2c^2}{\frac{dp}{dx} r}$$

$$\bar{\eta} = \frac{-1}{\pi R^2}\int_0^R \frac{4\pi c^2}{\frac{dp}{dx}} dr = \frac{-4c^2}{R}\frac{1}{\frac{dp}{dx}}$$

Quelle: Herbst 2009